

Mathematik II für Biologen

Klausur am 27.07.2015

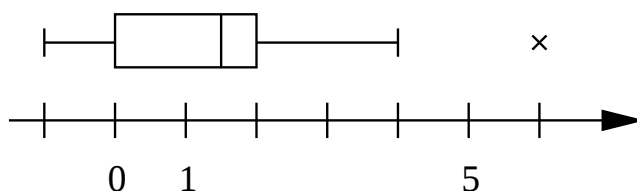
Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe (nicht Teilaufgabe) auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!** Es sind maximal 79 Punkte erreichbar, 66 Punkte $\hat{=}$ 100% ($\hat{=}$ Note 1,0), 50% $\hat{=}$ 33 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\hat{=}$ Note 4,0).

Hilfsmittel: Zwei beidseitig handbeschriebene A4-Blätter, nicht internetfähiger Taschenrechner.
Bearbeitungszeit: 105 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Für eine Stichprobe wurde der folgende Boxplot angefertigt.



Geben Sie (ohne Begründung)

- den Median,
- die Quartilsdifferenz,
- den größten Wert der Stichprobe und
- den kleinsten Wert der Stichprobe

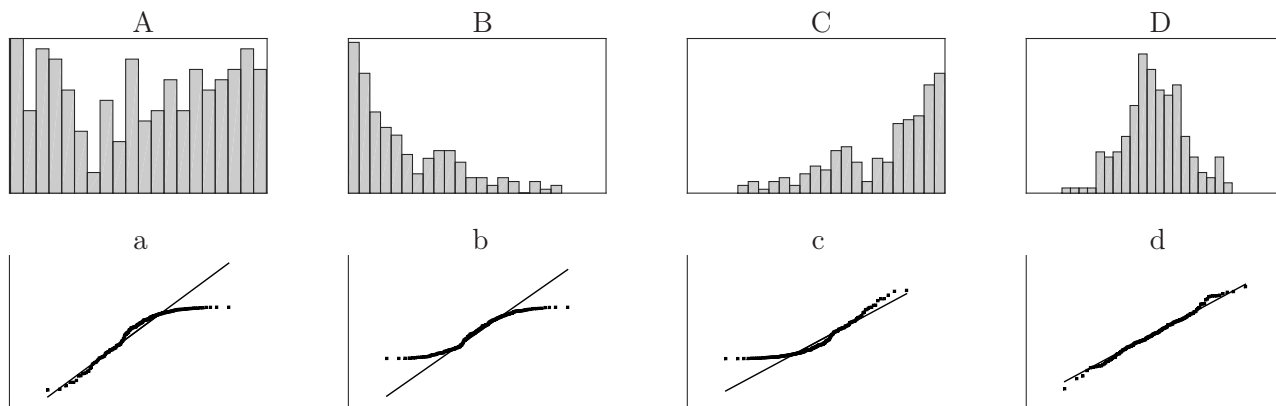
an. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen; unbeantwortete Teilaufgaben geben null Punkte.*

Aufgabe 2

(8 Punkte)

In der folgenden Abbildung ist für 4 Stichproben vom Umfang 200 jeweils ein Histogramm und ein QQ-Plot dargestellt. Ordnen Sie die Plots einander zu, d.h. notieren Sie Paare von Groß- und Kleinbuchstaben von Plots, die von der gleichen Stichprobe stammen.

Für jede richtige Zuordnung erhalten Sie zwei Punkte, für jede falsche Zuordnung werden zwei Punkte abgezogen; nicht gemachte Zuordnungen geben null Punkte.*



*Sollte sich so für die Aufgaben 1 & 2 in der Summe eine negative Punktzahl ergeben, so werden beide Aufgaben mit null Punkten gewertet.

Aufgabe 3

(1+3+1+2+6+2 = 15 Punkte)

Unbehandeltes Bögtnen-Fieber verläuft meist tödlich. Eine neuartige Therapie wird an 10 an Bögtnen-Fieber erkrankten Personen getestet. Alle 10 werden geheilt. Sie möchten auf der Basis dieser Beobachtung Aussagen über die Wahrscheinlichkeit w treffen, mit der eine an Bögtnen-Fieber erkrankte und mit dieser Therapie behandelte Person wieder gesund wird. Wir testen dazu die Nullhypothese $H_0 : w = w_0$ gegen die Alternativhypothese $H_A : w > w_0$.

- a) Beschreiben Sie in einem Satz die Teststatistik X .
- b) Wie ist X unter H_0 verteilt?
- c) Welcher Wert von X wurde beobachtet?
- d) Berechnen Sie den p-Wert des Tests.
- e) Bestimmen Sie, im Sinne dieses Tests,
 - (i) das 95%-Vertrauensintervall und
 - (ii) das 99%-Vertrauensintervallfür die Heilungswahrscheinlichkeit w .
- f) Verwirft dieser Test die Nullhypothese $H_0 : w = 65\%$ auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ zugunsten der Alternativhypothese $H_A : w > 65\%$?

Aufgabe 4

(2+3+3 = 8 Punkte)

Sie würfeln mit einem schwarzen und einem weißen Würfel (beide fair). Wir definieren die folgenden Ereignisse:

G = "Mindestens ein Würfel zeigt eine gerade Augenzahl."

Z = "Der schwarze Würfel zeigt $\blacksquare$."

- a) Bestimmen Sie $P[Z]$ und $P[Z \cap G]$.
- b) Berechnen Sie $P[G]$.
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der schwarze Würfel $\blacksquare$ zeigt, wenn mindestens ein Würfel eine gerade Zahl zeigt? Drücken Sie die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit in der Form $P[\dots]$ aus, und bestimmen Sie ihren Wert.

Aufgabe 5

(2+4+3+3+1+1+1 = 15 Punkte)

Auf manchen Sprudelflaschen sind Witze abgedruckt. Die Witze bestehen immer aus einem Dialog von Äffle und Pferdle. Bei manchen Witzen hat das Äffle das letzte Wort, bei den anderen das Pferdle. Einige dieser Witze finden Sie witzig, andere nicht. Sie lesen die Witze auf acht Sprudelflaschen und notieren in einer Tabelle, wer das letzte Wort hat und ob der Witz witzig ist:

<i>beobachtet</i>	Äffle	Pferdle	
witzig	5	0	5
nicht witzig	1	2	3
	6	2	8

Wir untersuchen mithilfe eines χ^2 -Tests, ob die Qualität der Witze (witzig oder nicht) davon abhängt, wer das letzte Wort hat.

- Formulieren Sie die Nullhypothese H_0 und die Alternativhypothese H_A .
- Bestimmen Sie die Kontingenztafel der unter H_0 "erwarteten" Werte. Runden Sie dabei **nicht**!
- Berechnen Sie den Wert der Test-Statistik. (Wie immer mit Rechenweg.) Runden Sie das Ergebnis ggf. auf zwei gültige Stellen.

Die Werte in den Tafeln sind zu gering, um die Faustregel anwenden zu dürfen. Eine Kommilitonin simuliert deshalb unter der Annahme der Nullhypothese Tafeln mit denselben Randhäufigkeiten. In der Simulation treten überhaupt nur drei unterschiedliche χ^2 -Werte auf, und zwar mit den folgenden Häufigkeiten:

χ^2	0,18	1,6	4,4
relative Häufigkeit	0,536	0,357	0,107

- Warum treten in der Simulation nur drei χ^2 -Werte auf?
- Bestimmen Sie den p-Wert des Tests.
- Wird die Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 10\%$ verworfen?
- Formulieren Sie das Testergebnis in einem Satz.

Aufgabe 6

(6+3 = 9 Punkte)

Verwenden Sie die Angaben aus Aufgabe 5.

Wir wählen zufällig eine der acht Sprudelflaschen aus Aufgabe 5 aus (jede mit gleicher Wahrscheinlichkeit), und definieren die folgenden Ereignisse:

$\ddot{A}$ = "Im Witz auf der Flasche hat das Äffle das letzte Wort."

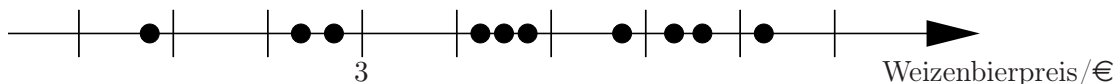
W = "Der Witz auf der Flasche ist witzig."

- Beschreiben Sie in Worten, was $P[\ddot{A}|W]$, $P[W|\ddot{A}]$ sowie $P[W \cap \ddot{A}]$ bedeuten.
- Bestimmen Sie $P[\ddot{A}|W]$, $P[W|\ddot{A}]$ und $P[W \cap \ddot{A}]$.

Aufgabe 7

(2+5+2+1+2+2+2+1+3 = 20 Punkte)

Ein Kommilitone behauptet, dass ein Weizenbier in Tübinger Gaststätten im Schnitt 3€ kostet. Sie vermuten aber, dass sowohl der Median m als auch der Erwartungswert μ der Verteilung der Weizenbierpreise *größer* ist. Um dies zu überprüfen, ermitteln Sie die Preise in einigen Gaststätten und stellen die Werte im folgenden (linearen, unverzerrten) Diagramm durch Punkte (•) dar.



Außerdem haben Sie mit MATLAB den Median, den Mittelwert und die empirische Varianz der Stichprobe ermittelt (weizen enthalte die zehn Bierpreise in €):

```
>> median(weizen)
```

```
ans = 3.4500
```

```
>> mean(weizen)
```

```
ans = 3.4700
```

```
>> var(weizen)
```

```
ans = 0.48900
```

Führen Sie zunächst einen Wilcoxon-Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ durch:

- Geben Sie die Nullhypothese H_0 und Alternativhypothese H_A an.
- Bestimmen Sie den Wert der Teststatistik.
Notieren Sie als Zwischenschritt auch die Ränge aller positiven und negativen Abweichungen.
- Bestimmen Sie das Verwerfungskriterium.[†]
- Geben Sie die Testentscheidung an.

Führen Sie nun mit denselben Daten auch einen t-Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ durch:

- Geben Sie die Nullhypothese H_0 und Alternativhypothese H_A an.
- Bestimmen Sie den Wert der Teststatistik T .
- Geben Sie das Verwerfungskriterium an. Dabei hilft der folgende MATLAB-Code mit Ausgabe.

```
>> tinv(0.95,8:12)
```

```
ans = 1.8595 1.8331 1.8125 1.7959 1.7823
```

```
>> tinv(0.975,8:12)
```

```
ans = 2.3060 2.2622 2.2281 2.2010 2.1788
```

- Wie entscheidet der t-Test?
- Bestimmen Sie außerdem ein 95%-Vertrauensintervall für den mittleren Weizenbierpreis im Sinne eines *beidseitigen* t-Tests.

[†]Der Wilcoxon-Test auf Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ verwirft für Stichprobenumfang n , falls $\min(U^+, U^-) \leq U_{\text{krit}}$ (zweiseitig) oder falls $U^- \leq U_{\text{krit}}$ bzw. $U^+ \leq U_{\text{krit}}$ (rechts- bzw. linksseitig). Dabei bezeichnen U^+ und U^- die Rangsummen der positiven und negativen Abweichungen.

n	7	8	9	10	11	12	13
U_{krit} einseitig	3	5	8	10	13	17	21
U_{krit} zweiseitig	2	3	5	8	10	13	17