

Mathematik II für Biologen

Übungsblatt 10 (Abgabe am 26.06.2015)

Aufgabe 37

(10 Punkte)

Die Wartezeit X bis zum nächsten Erdbeben in Schüttelhausen (vgl. Vorlesung) ist exponentialverteilt mit Parameter 8, d.h. $X \sim \text{Expo}(8)$.

- Zeichnen Sie (von Hand oder mit MATLAB) die Graphen der Dichte $f(t)$ und der Verteilungsfunktionen $F(t)$. Wählen Sie einen sinnvollen t -Bereich.
- Berechnen Sie den Erwartungswert von X .
HINWEISE: (i) Benutzen Sie partielle Integration.
(ii) Das Ergebnis finden Sie bereits in den Vorlesungsfolien.
- Bestimmen Sie den Median von X , d.h. die Zahl med mit $F(\text{med}) = \frac{1}{2}$. Berechnen Sie auch das Verhältnis $\text{med}/E[X]$.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X einen Wert zwischen $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{4}$ annimmt. Zeichnen Sie diese Wahrscheinlichkeit in die beiden Abbildungen aus Teil a ein.
- Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass $X \leq \frac{1}{4}$ unter der Bedingung $X \geq \frac{1}{10}$.

Aufgabe 38 MATLAB

(10 Punkte)

Die Datei `fishy.dat` enthält in der ersten Spalte die Länge (in cm), in der zweiten Spalte das Gewicht (Einheit leider unbekannt) und in der dritten Spalte den DDT-Gehalt (in ppm) von $n = 96$ Welsen, die im Tennessee River in Alabama, USA, gefangen wurden (Quelle: Mendenhall, Sincich: *Statistics for Engineering and the Sciences*, Prentice Hall. Appendix III. Daten leicht geändert, daher das y im Dateinamen.).

- Bestimmen Sie den empirischen Median der DDT-Gehalte.
- Ist dieser empirische Median signifikant (zum Signifikanz-Niveau $\alpha = 5\%$) von 10 verschieden? Beantworten Sie diese Frage mit einem zweiseitigen Vorzeichentest.
- Bestimmen Sie das zum Vorzeichentest gehörige 95%-Vertrauensintervall $[a, b]$ für den "wahren, theoretischen" Median des DDT-Gehaltes eines solchen Fisches, indem Sie den Test aus Aufgabe (b) für verschiedene Werte wiederholen und dabei beobachten, ob der Test verwirft. Bestimmen Sie dabei a und b so genau, dass die erste Ziffer nach dem Komma sicher stimmt.

Unvollständiger MATLAB-Code:

```
load fishy.dat
ddt=fishy(:,3);
[p,h]=signtest(ddt,10) % help signtest
```

Aufgabe 39

(3 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 05.07.15 auf www.khanacademy.org die *Skill*

- *Empirical rule.*

HINWEISE: Um die Aufgaben zu lösen, muss man ausschließlich mit den folgenden Werten für die Normalverteilung arbeiten: Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dann gilt

$$P[|X - \mu| \leq n\sigma] \approx 68\%, 95\%, 99,7\% \text{ für } n = 1, 2, 3.$$

Für allgemeine Hinweise zu Khan-Aufgaben siehe Aufgabe 3 (Blatt 1).

Aufgabe 40

(10 Punkte)

Die Inkubationszeit X (in Monaten) einer bestimmten ansteckenden Krankheit wird als *log-normal* verteilt mit $\mu = 0$ und $\sigma = 0,4$ modelliert, d.h. man nimmt an, dass $\log X \sim \mathcal{N}(0; 0,4^2)$, wobei $\log$ der natürliche Logarithmus ist.

- a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass die Inkubationszeit mehr als 3 Monate beträgt.
HINWEIS: Der MATLAB-Befehl `normcdf(x)` berechnet $\Phi(\mathbf{x})$.
- b) Berechnen Sie den Median med von X .
- c) Für eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable Y gilt bekanntlich

$$\begin{aligned} P[\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma] &\approx 68\% & \text{und} \\ P[\mu - 1,96\sigma \leq Y \leq \mu + 1,96\sigma] &\approx 95\%. \end{aligned}$$

Finden Sie Konstanten c_1 und c_2 , so dass

$$\begin{aligned} P\left[\frac{\text{med}}{c_1} \leq X \leq \text{med} \cdot c_1\right] &\approx 68\% & \text{und} \\ P\left[\frac{\text{med}}{c_2} \leq X \leq \text{med} \cdot c_2\right] &\approx 95\%. \end{aligned}$$

Aufgabe 41

(10 Zusatzpunkte)

Lesen Sie den Comic auf <http://xkcd.com/1132/>.

- a) Wie gelangt der *Frequentist*¹³ zur Schlussfolgerung, dass die Sonne explodiert ist? Führen Sie zur Erklärung einen Hypothesentest mit p-Wert durch.
- b) Der *Bayes'sche Statistiker* glaubt offensichtlich nicht, dass die Sonne explodiert ist. Erklären Sie mithilfe des Satz von Bayes warum.

¹³Das Assoziieren dieses Vorgehens mit dem frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff ist nicht ganz fair und führte bei Erscheinen des Comics zu heftigen Diskussionen im Netz. Der Autor des Comics stellte klar, dass die Argumentation des *Frequentisten* im Comic vielmehr auf einer unsinnigen Anwendung des Konzepts des Hypothesentests beruht, als auf dem frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff.