

# Vorzeichenstest: Waage (Folienr. 6)

- ①  $H_0$ : Waage geeicht
- ②  $H_A$ : Waage nicht geeicht
- ③  $T = \# \{ \text{Werte} < 20 \}$
- ④  $T \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{2})$
- ⑤  $\alpha = 5\%$

Test mit p-Wert

⑦  $T = 1$

⑧  $p\text{-Wert} = \mathbb{P}[T \leq 1] \cdot 2$

$$= \left[ \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^0 + \binom{10}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1 \right] \cdot 2$$

$$= (1 + 10) \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot 2 = \frac{22}{2^{10}} = \frac{22}{1024} \approx 2\%$$

Test beidseitig

⑩  $H_0$  wird verworfen, da  $p\text{-Wert} < \alpha$   
(auf Signifikanzniveau 5%)

---

Erwartungswert für  $X \sim \text{Bin}(n, p)$

$$E[X] = \sum_{h=0}^n h \cdot P[X=h]$$

$$= \sum_{h=0}^n \underline{h} \cdot \binom{n}{h} p^h (1-p)^{n-h} = \sum_{h=1}^n h \cdot \binom{n}{h} p^h (1-p)^{n-h}$$

$$h \cdot \binom{n}{h} = h \cdot \frac{n!}{h! (n-h)!} = \frac{n!}{(h-1)! (n-h)!} = n \frac{(n-1)!}{(h-1)! (n-h)!} = n \binom{n-1}{h-1}$$

$$= n \sum_{h=1}^n \binom{n-1}{h-1} p^h (1-p)^{n-h} = n \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{h} p^{h+1} (1-p)^{n-(h+1)}$$

|

$$= np \sum_{h=0}^{n-1} \underbrace{\binom{n-1}{h} p^h (1-p)^{(n-1)-h}}_{\text{Wahrsd. einer Bin}(n-1, p)}$$

$= 1$

$$= np$$

Linearität von  $E[\cdot]$

$$E[ax + bY] = \sum_{h, l} (ah + bl) P[X=h \text{ und } Y=l]$$

$$= a \sum_{h, l} h \underbrace{P[X=h \text{ und } Y=l]}_{\text{egal}} + b \sum_{h, l} l \underbrace{P[X=h \text{ und } Y=l]}_{\text{egal}}$$

$$= a \sum_h h P[X=h] + b \sum_l l P[Y=l]$$

$$= a E[X] + b E[Y]$$

Varianz

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= E[(X - E[X])^2] \\&= E[\underline{X^2} - \underline{2X E[X]} + (E[X])^2] \\&\stackrel{\text{Linearität}}{=} E[\underline{X^2}] - \underline{2 E[X] E[X]} + E[X]^2 \\&= E[X^2] - (E[X])^2\end{aligned}$$

Erwartungstreue

① Stichwort  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$   $X_i \leadsto X_i$

$$E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] \stackrel{\text{Lin.}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{E[X_i]}_{\substack{= E[X] \\ \text{alle gleich}}} = E[X]$$

② empirische Varianz

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( x_i^2 - 2 \frac{x_i}{n} \sum_{j=1}^n x_j + \frac{1}{n^2} \left( \sum_{j=1}^n x_j \right)^2 \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j x_k$$

$$= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j x_k \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j x_k$$

$$= - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i^2 - x_i x_j)$$

jeder  $x_i \rightsquigarrow X_i$

$$E \left[ \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i^2 - X_i X_j) \right]$$

Lin.  $= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( E[X_i^2] - \underline{E[X_i X_j]} \right)$

$$E[X_i X_j] = \begin{cases} E[X_i] \cdot E[X_j], & i \neq j \\ E[X_i^2], & i = j \end{cases}$$

← unabhängig, vgl. Vorl. 5 & später  
n<sup>2</sup>-n mal  
n mal

$$= \frac{1}{n(n-1)} \left( n^2 E[X^2] - (n^2 - n) E[X] E[X] - n E[X^2] \right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{n(n-1)}} \left( \cancel{n^2 - n} E[X^2] - \cancel{(n^2 - n)} (E[X])^2 \right)$$

$$= \text{Var}(X)$$

$X =$  Augenzahl beim Wurf eines faire Würfels

