

Mathematik II für Biologen  
Schließende Statistik: Hypothesentests (Forts.)

Stefan Keppeler

15. Mai 2015



## Testablauf (Wdh.)

### Ein- und zweiseitige Tests

#### p-Wert

- Definition

- Äquivalente Definition

- Interpretation verschiedener p-Werte

#### Vertrauensintervall

#### Fehler 1. und 2. Art

- Fehler 2. Art und Macht des Tests

#### Erweitertes Testschema

- p-Wert

- Vertrauensintervall



	Allgemein	im Beispiel
1	Nullhypothese $H_0$	$k = 80$
2	Alternativhypothese $H_A$	$k > 80$
3	Wähle Teststatistik $X$	$\# \left\{ \begin{array}{l} \text{kranke Individuen unter} \\ 10 \text{ zufällig gewählten} \end{array} \right\}$
4	Verteilung von $X$ falls $H_0$ wahr	Simulation
5	Wähle Signifikanzniveau $\alpha$	$\alpha = 5\%$
6	Verwerfungsbereich $K$ (aus 4 & 5)	$K = \{3, 4, 5, \dots, 10\}$
7	Bestimme $X$ aus Daten	$X = 3$
8	Testentscheidung: $X \in K$ oder $X \notin K$ ?	$X \in K$ : $H_0$ wird verworfen

**Merke:** Je kleiner  $\alpha$  desto schwieriger wird es,  $H_0$  zu verwerfen.

**Beispiel:** Hätten wir  $\alpha = 1\%$  gewählt, so wäre  $K = \{4, 5, \dots, 10\}$  gewesen und damit  $X = 3 \notin K$ ...



- ▶ Einseitige Tests haben die Form

$$H_0 : k = k_0$$

$$H_A : k > k_0 \quad (\text{oder } H_A : k < k_0)$$

Behauptung, die gezeigt werden soll:

$k$  ist größer (kleiner) als erwartet.

- ▶ Zweiseitige Tests haben die Form

$$H_0 : k = k_0$$

$$H_A : k \neq k_0$$

Behauptung, die gezeigt werden soll:

$k$  weicht von Erwartung ab (egal in welche Richtung.)



**Im Beispiel:** Falls  $X = 3$  beobachtet wurde, so wird...

... $H_0$  verworfen für  $\alpha = 5\%$

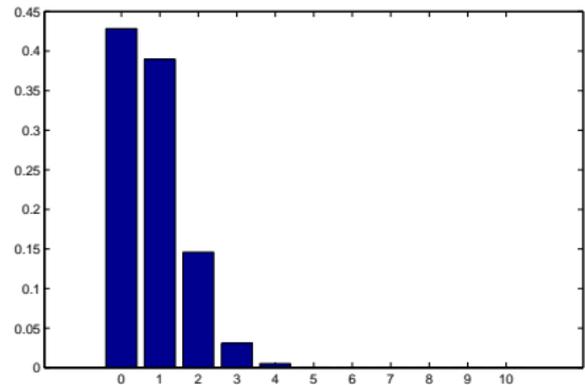
... $H_0$  nicht verworfen für  $\alpha = 1\%$

... $H_0$  verworfen, falls  $\alpha \geq 3,6\%$

... $H_0$  nicht verworfen für  $\alpha < 3,6\%$

**Definition:** Das Signifikanzniveau, an dem der Test zwischen *verwerfen* und *nicht verwerfen* schwankt, heißt **p-Wert**.

**Im Beispiel:** Für  $X = 3$  beträgt der p-Wert **3,6%**



**Äquivalent:** Der p-Wert ist die Wahrscheinlichkeit (unter  $H_0$ ) dafür, etwas zu beobachten, das  $H_A$  mindestens so stark unterstützt wie das, was tatsächlich beobachtet wurde.

**Im Beispiel:**  $X = 3$  beobachtet (in 3% der Fälle); noch mehr als  $X = 3$  würde  $X = 4, 5, \dots, 10$  die Alternativhypothese  $H_A$  unterstützen.

$X \geq 3$  wird in 3,6% der Fälle beobachtet (p-Wert).



## Interpretation verschiedener p-Werte: (mit Vorsicht zu genießen)

$$\text{p-Wert} > 5\%$$

Test nicht einmal signifikant auf 5%-Niveau:  
kein (statistischer) Widerspruch zwischen  
Daten und Modell  $H_0$

$$5\% \geq \text{p-Wert} > 1\%$$

Test signifikant auf 5%- aber nicht auf 1%-Niveau:  
schwacher Widerspruch zwischen Daten und  $H_0$

$$1\% \geq \text{p-Wert} > 0,1\%$$

Test signifikant auf 1%- (also auch auf 5%-)  
aber nicht auf 0,1%-Niveau

$$0,1\% \geq \text{p-Wert}$$

Test (sogar) signifikant auf 0,1%-Niveau:  
sehr starker Widerspruch zwischen Daten und  $H_0$



Angenommen,  $X = 3$  wurde beobachtet (und  $\alpha = 5\%$ ) dann...

- ▶ wird  $H_0: k = 80$  verworfen zugunsten von  $H_A: k > 80$
- ▶ würde  $H_0: k = 79$  erst recht verworfen zugunsten von  $H_A: k > 79$ , ebenso wie  $H_0: k = k_0$  zugunsten von  $H_A: k > k_0$  für alle  $k_0 \leq 80$ .

**Was passiert für  $k_0 > 80$ ?**

Neue Rechnung/Simulation (wiederhole Testschritt 4) zeigt

- ▶  $H_0: k = k_0$  wird verworfen zugunsten von  $H_A: k > k_0$  für alle  $k_0 \leq 87$ ,
- ▶  $H_0: k = k_0$  wird nicht verworfen zugunsten von  $H_A: k > k_0$  für alle  $k_0 > 87$ ,

denn (für  $X = 3$ ):

$k_0$	87	88
p-Wert	4,87% < 5%	5,02% > 5%



**Definition:** Das  $(1 - \alpha)$ -**Vertrauensintervall** (Konfidenzintervall, -bereich) für  $k$  besteht aus denjenigen Zahlen  $k_0$  für die  $H_0 : k = k_0$  **nicht verworfen** wird.

**Im Beispiel:** Falls  $X = 3$  beobachtet wurde:  
95%-Vertrauensintervall für  $k$ :  $\{88, 89, \dots, 1000\}$ .

**Merke:** Das Vertrauensintervall hängt (wie der p-Wert) vom beobachteten Wert von  $X$  ab.



	$H_0$ wird verworfen	$H_0$ wird nicht verworfen
$H_0$ ist wahr	 Fehler 1. Art	 Richtige Entscheidung
$H_0$ ist falsch	 Richtige Entscheidung	 Fehler 2. Art

- ▶ Fehler 1. Art  $\leftrightarrow$  Signifikanzniveau:

Falls  $H_0$  gilt, so begeht der Test in  $\leq \alpha$  der Fälle einen Fehler 1. Art (gemäß Konstruktion des Verwerfungsbereichs  $K$ ).

- ▶ Fehler 2. Art  $\leftrightarrow$  Zusätzliche Annahmen, Simulation...



**Beispiel:**  $H_0 : k = 80$ ,  $\alpha = 5\%$ ,  $K = \{3, 4, 5, \dots, 10\}$

Annahme: In Wirklichkeit gilt nicht  $H_0$  sondern  $H_A : k = 200$ .

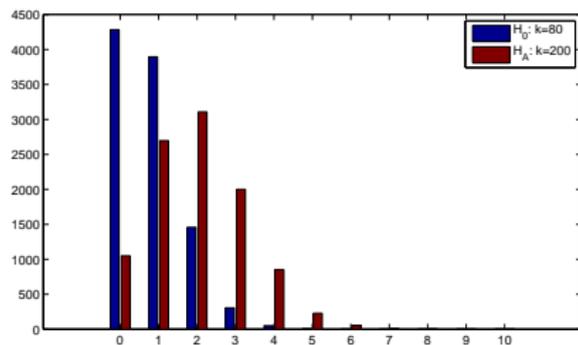
```
N=1000;
k=200;
X=[];
for wdh=1:10^4 % besser 10^5
    urne=[ones(1,k),zeros(1,N-k)];
    n=10;
    stichprobe=[];
    for j=1:n
        kugel=unidrnd(length(urne));
        stichprobe=[stichprobe,urne(kugel)];
        urne(kugel)=[];
    end;
    X=[X,sum(stichprobe)];
end

verteilungH0=[4283 3896 1458 306 51 6 0 0 0 0]
Z=[verteilungH0,hist(X,0:10)];
Z=reshape(Z,11,2);
bar(0:10,Z)
legend('H_0: k=80','H_A: k=200')
```

Fehler 2. Art      Macht des Tests

$\beta \approx 69\%$

$1-\beta \approx 31\%$



$\approx 3,6\%$   
 Fehler 1. Art



## Beispiel (Forts.): (Annahme: $H_A$ gilt)

- ▶ In 31% der Fälle wird  $H_0$  verworfen, in 69% der Fälle nicht.
- ▶ Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art ist  $\beta = 69\%$  (falls  $H_A$  gilt).
- ▶  $1 - \beta$  (hier = 31%) heißt **Macht des Tests**.



	einfacher Test	Test mit p-Wert
1	Nullhypothese $H_0$	
2	Alternativhypothese $H_A$	
3	Wähle Teststatistik $X$	
4	Verteilung von $X$ falls $H_0$ wahr	
5	Wähle Signifikanzniveau $\alpha$	
6	Verwerfungsbereich $K$ (aus 4 & 5)	
7	Bestimme $X$ aus Daten	
8	Testentscheidung: $X \in K$ oder $X \notin K$ ?	
9		p-Wert (aus 4 & 7)
10		Testentscheidung: p-Wert $\leq \alpha$ oder $> \alpha$

$X \in K$  bzw. p-Wert  $\leq \alpha$ :  $H_0$  wird verworfen  
 ( $H_A$  statistisch bewiesen)

$X \notin K$  bzw. p-Wert  $> \alpha$ :  $H_0$  wird nicht verworfen



	Testschemata	$(1-\alpha)$ -Vertrauensintervall	
1	Nullhypothese $H_0$	enthält einen Parameter	
2	Alternativhypothese $H_A$		
3	Wähle Teststatistik $X$		
4	Verteilung von $X$ falls $H_0$ wahr		
5	Wähle Signifikanzniveau $\alpha$	bereits festgelegt	
6	Verwerfungsbereich $K$ (aus 4 & 5)		
7	Bestimme $X$ aus Daten		
8	Testentscheidung: $X \in K$ oder $X \notin K$ ?		
9	p-Wert (aus 4 & 7)		
10	Testentscheidung: p-Wert $\leq \alpha$ oder $> \alpha$		

$X \in K$  bzw. p-Wert  $\leq \alpha$ : Wert des Parameters liegt nicht im Vertrauensintervall für den Parameter

$X \notin K$  bzw. p-Wert  $> \alpha$ : Wert des Parameters liegt im Vertrauensintervall

