Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork

17.10.24

Maß- und Integrationstheorie
WS 2024/25
1.Übung

AUFGABE 1:
Das Zählmaß ν auf einer beliebigen Menge X ist definiert durch

$$\nu(S) := \begin{cases} \#(S) := \text{ Anzahl der Elemente von } S, & \text{falls } S \text{ endlich ist,} \\ \infty, & \text{falls } S \text{ unendlich ist.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß ν ein Maß ist und alle $S \subseteq X$ meßbar bezüglich ν sind.

AUFGABE 2:
Zeigen Sie, eine Nullmenge A bezüglich eines Maßes μ , d.h. $\mu(A) = 0$, ist immer $\mu-$meßbar.

AUFGABE 3:
Für $S \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir das Lebesgue-Maß durch

$$\mathcal{L}^1(S) := \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) \mid S \subseteq \cup_{k=1}^{\infty}]a_k, b_k[, a_k < b_k \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}^1$ ein Maß ist und daß alle Intervalle $]a, b[$ und mit der Proposition 1.1 der Vorlesung alle offenen und abgeschlossenen Mengen $\mathcal{L}^1-$meßbar sind.

AUFGABE 4:
Für $A_k \subseteq X$ sei

$$\limsup_{k\to\infty} A_k := \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} A_k \quad \liminf_{k\to\infty} A_k := \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{k=l}^{\infty} A_k.$$

Zeigen Sie für A_k meßbar bezüglich eines Maßes μ auf X

$$\mu(\liminf_{k\to\infty} A_k) \leq \liminf_{k\to\infty} \mu(A_k),$$
$$\limsup_{k\to\infty} \mu(A_k) \leq \mu(\limsup_{k\to\infty} A_k), \quad \text{falls } \mu(X) < \infty.$$

Abgabetermin ist Donnerstag, 24.10.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork

24.10.24

Maß- und Integrationstheorie
WS 2024/25
2.Übung

AUFGABE 5:
Es sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma-$Algebra auf X . Zeigen Sie

$$f := \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \chi_{A_l}$$

mit $X = \sum_{l=1}^{k} A_l$ eine Zerlegung und α_k paarweise verschieden ist $\mathcal{A}-$meßbar genau dann, wenn alle $A_l \in \mathcal{A}$.

AUFGABE 6:
Es seien $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ meßbar bezüglich einer $\sigma-$Algebra $\mathcal{A}$ auf X . Zeigen Sie

$$[f < g] := \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}, [f = g] := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{A}.$$

AUFGABE 7:
Zeigen Sie, daß die Konklusion des Satzes von Egoroff für das Zählmaß ν auf $\mathbb{N}$ und $f_k(l) := 1$ für $l \geq k, f_k(l) := 0$ für $l < k$ nicht gilt. Wie steht das im Einklang mit dem Satz von Egoroff ?

AUFGABE 8:
Es sei $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k := \chi_{[j2^{-l},(j+1)2^{-l}]} \quad \text{für } k = 2^l + j, 0 \leq j < 2^l, l \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie $f_k \to 0$ im Maß bezüglich $\mathcal{L}^1$, aber $\{f_k(t)\}_k$ konvergiert für kein $t \in [0,1]$, insbesondere konvergiert f_k nicht $\mathcal{L}^1-$fast überall. Geben Sie eine Teilfolge an, für die $f_{k_i} \to 0$ fast überall bezüglich $\mathcal{L}^1$.

Abgabetermin ist Donnerstag, 31.10.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork

31.10.24

Maß- und Integrationstheorie
WS 2024/25
3.Übung

AUFGABE 9:
$f, g : X \to [0, \infty]$ seien meßbar bezüglich eines Maßes μ auf X und $f = g$ fast überall bezüglich μ . Zeigen Sie

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int g \, \mathrm{d}\mu.$$

AUFGABE 10: (Tschebychef-Ungleichung)
Zeigen Sie für eine bezüglich eines Maßes μ auf X meßbare Funktion $f : X \to [-\infty, \infty], \mathbb{C}$

$$\mu(|f| \geq t) \leq t^{-1} \int |f| \, \mathrm{d}\mu \quad \forall t > 0.$$

Schließen Sie, $[f \neq 0]$ ist $\sigma-$endlich bezüglich μ , falls $\int |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$.

AUFGABE 11:
Zeigen Sie für das Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^1$ auf $X = [0, 1]$

$$\int_{[0,1]} (1/x) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x) = \infty \quad \text{und} \quad \int_{[0,1]} (1/\sqrt{x}) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x) = 2.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Beppo Levi.)

AUFGABE 12: (Fresnel-Integrale)
Diskutieren Sie für das Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^1$ auf $X = [0, \infty[$, ob die Lebesgue-Integrale

$$\int_{[0,\infty[} \cos(x^2) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x) \quad \text{und} \quad \int_{[0,\infty[} \sin(x^2) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x)$$

existieren.

Abgabetermin ist Donnerstag, 07.11.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork

07.11.24

Maß- und Integrationstheorie
WS 2024/25
4.Übung

AUFGABE 13:
$f_k : X \to \mathbb{C}$ seien meßbar bezüglich eines Maßes μ auf X und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_k| \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Zeigen Sie, die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiert fast überall bezüglich μ absolut und

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k \, \mathrm{d}\mu.$$

AUFGABE 14:
μ sei ein $\sigma-$endliches Maß auf X , und $f : X \to [-\infty, \infty]$ sei $\mu-$meßbar. Zeigen Sie

$$|f| \leq \| f \|_{L^\infty(\mu)} \quad \text{fast überall bezüglich } \mu.$$

AUFGABE 15:
Es sei μ ein Maß auf X und $f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)$ mit $1 \leq r \leq p, q \leq \infty$ und

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Zeigen Sie $fg \in L^r(\mu)$ und

$$\| fg \|_{L^r(\mu)} \leq \| f \|_{L^p(\mu)} \| g \|_{L^q(\mu)} .$$

(Hinweis: Verwenden Sie die Hölder-Ungleichung.)

AUFGABE 16:
Es sei μ ein Maß auf X und $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu), 1 \leq p \leq q \leq \infty$. Zeigen Sie $f \in L^r(\mu)$ für $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$ und

$$\| f \|_{L^r(\mu)} \leq \| f \|_{L^p(\mu)}^{\lambda} \| f \|_{L^q(\mu)}^{1-\lambda},$$

wobei

$$\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{q}.$$

Zeigen Sie weiter für $\mu-$meßbares $g : X \to [0, \infty], 1 \leq p \leq \infty$,

$$\| g \|_{L^p(\mu)} \leq \liminf_{q \to p} \| g \|_{L^q(\mu)} .$$

(Hinweis: Verwenden Sie die Hölder-Ungleichung und das Lemma von Fatou.)

Abgabetermin ist Donnerstag, 14.11.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork

14.11.24

Maß- und Integrationstheorie
WS 2024/25
5.Übung

AUFGABE 17:
Zeigen Sie für das Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^1$ auf $X = [0,1]$ und $f(x) := \log(1/x)$, daß $f \in L^p(\mathcal{L}^1)$ für alle $1 \leq p < \infty$, aber $f \notin L^\infty(\mathcal{L}^1)$.
(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 11.)
AUFGABE 18:
Es sei μ ein Maß auf X , und $f_k \to f$ in $L^p(\mu)$ für ein $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie $f_k \to f$ im Maß bezüglich μ und geben Sie ein Beispiel an, für das f_k nicht $\mu-$fast überall gegen f konvergiert.
(Hinweis: Verwenden Sie die Tschebychef-Ungleichung aus Aufgabe 10 und betrachten Sie das Beispiel aus Aufgabe 8.)
AUFGABE 19: (Variante des Konvergenzsatzes von Lebesgue)
$f_k, f : X \to \mathbb{C}$ seien meßbar bezüglich eines Maßes μ auf $X, 1 \leq p < \infty$,

$$f_k \to f \quad \text{im Maß bezüglich } \mu$$

und

$$|f_k| \leq g_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

für $g_k, g \in L^p(\mu)$ mit

$$g_k \to g \text{ in } L^p(\mu).$$

Zeigen Sie $f_k, f \in L^p(\mu)$ und

$$f_k \to f \text{ in } L^p(\mu).$$

(Hinweis: Bilden Sie $\bar{g} := g_1 + \sum_{k=2}^\infty |g_k - g_{k-1}|$ für $\| g_k - g_{k-1} \|_{L^p(\mu)} \leq 2^{-k}$.)
AUFGABE 20: (Konvergenzsatz von Vitali)
Es sei μ ein Mass auf X und $f_k, f \in L^1(\mu)$. Zeigen Sie $f_k \to f$ in $L^1(\mu)$ genau dann, wenn

$$f_k \to f \quad \text{im Maß bezüglich } \mu,$$

f_k sind gleichgradig integrierbar bezüglich μ , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall A \subseteq X \text{ messbar bezüglich } \mu, \mu(A) \leq \delta : \forall k \in \mathbb{N} : \int_A |f_k| \leq \varepsilon,$$

und

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists A \subseteq X \text{ messbar bezüglich } \mu, \mu(A) < \infty : \forall k \in \mathbb{N} : \int_{X-A} |f_k| \leq \varepsilon.$$

(Hinweis: Verwenden Sie die Tschebychef-Ungleichung aus Aufgabe 10, den Satz von Beppo Levi oder den Konvergenzsatz von Lebesgue und den Satz von Egoroff.)

AUFGABE 21:

Zeigen Sie durch wiederholte Produktintegration

$$\int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{t^2}{n})^n \mathrm{dt} = \frac{2\ 4 \cdots 2\mathrm{n}}{1\ 3 \cdots (2\mathrm{n}-1)} \frac{\sqrt{\mathrm{n}}}{2\mathrm{n}+1}.$$

Schließen Sie daraus mit der Wallisschen Produktdarstellung

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2k)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2k-1)^2} \frac{1}{2k},$$

daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{dt} = \sqrt{\pi}.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Konvergenzsatz von Lebesgue.)

Abgabetermin ist Donnerstag, 21.11.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 21.11.24
Dr. N. Jork

Maß- und Integrationstheorie
WS 2024/25
6.Übung

AUFGABE 22:
Es sei μ ein Maß auf X , $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \times X \to \mathbb{R}$ mit $f(t,.)$ integrierbar bezüglich μ für jedes $t \in I$ und in der ersten Variablen partiell differenzierbar mit

$$|\partial_t f(t,x)| \leq g(x) \quad \text{für alle } (t,x) \in I \times X$$

und ein $g \in L^1(\mu)$.

Zeigen Sie $t \mapsto \int f(t,x) \, \mathrm{d}\mu(x)$ ist differenzierbar und

$$\frac{d}{dt} \int f(t,x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int \partial_t f(t,x) \, \mathrm{d}\mu(x) \quad \text{für alle } t \in I.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Konvergenzsatz von Lebesgue.)

AUFGABE 23:
Es sei $l^p := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < \infty \}$ für $1 \leq p < \infty$ und $l^\infty := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{C}, \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty \}$ mit den Normen

$$\| (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \|_p := \Big(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p \Big)^{1/p} \text{ für } 1 \leq p < \infty,$$

$$\| (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|.$$

Wir schreiben $e_k := (\delta_{kl})_{l\in\mathbb{N}} \in \cap_{1\leq p\leq\infty} l^p$ mit $\delta_{kl} := 1$ für $k = l$ und $\delta_{kl} := 0$ für $k \neq l$.

Für $(1/p) + (1/q) = 1$ betrachten wir die normerhaltendenen Einbettungen

$$l^q \hookrightarrow (l^p)^*$$

aus der Vorlesung, d.h. jedes $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^q$ erzeugt ein stetiges lineares Funktional auf l^p durch

$$x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^p \mapsto \sum_{k=1}^\infty x_k y_k.$$

Zeigen Sie für $1 \leq p < \infty$ sind diese Einbettungen surjektiv, also gilt $l^q \cong (l^p)^*$.
(Hinweis: Betrachten Sie für $\Lambda \in (l^p)^*$ die Folge $y_k := \Lambda e_k$.)

AUFGABE 24:
Zeigen Sie für borelmeßbares $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$

$$\int f \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int \dots \int f(x_1,\dots,x_n) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x_1) \dots \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x_n).$$

AUFGABE 25:
Berechnen Sie
$$\mathcal{L}^2(B_1(0)) = \int \chi_{B_1(0)} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^2.$$
(Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Fubini.)

Abgabetermin ist Donnerstag, 28.11.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork

28.11.24

Maß- und Integrationstheorie
WS 2024/25
7.Übung

AUFGABE 26:
$\mathcal{L}^1$ sei das Lebesgue-Maß und ν das Zählmaß auf $[0,1]$. Zeigen Sie, daß die Diagonale $\Delta := \{(x,x) \mid x \in [0,1] \}$ meßbar bezüglich des Produktmaßes $\mathcal{L}^1 \otimes \nu$ ist und

$$(\mathcal{L}^1 \otimes \nu)(\Delta) = \infty,$$
$$(\mathcal{L}^1 \otimes \nu)(\{x\} \times [0,1]) = 0 \quad \forall x \in [0,1],$$
$$(\mathcal{L}^1 \otimes \nu)([0,1] \times \{y\}) = 1 \quad \forall y \in [0,1].$$

Zeigen Sie weiter

$$\int \int \chi_\Delta(x,y) \; \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x) \; \mathrm{d}\nu(y) = 0 \neq 1 = \int \int \chi_\Delta(x,y) \; \mathrm{d}\nu(y) \; \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x).$$

(Hinweis: Zeigen Sie, daß die Projektionen π_x, π_y mit $(x,y) \mapsto x, y$ meßbar bezüglich $\mathcal{L}^1 \otimes \nu$ sind, d.h. für $A, B \subseteq [0,1]$ messbar bezüglich $\mathcal{L}^1$ bzw. ν sind $\pi_x^{-1}(A)$ und $\pi_y^{-1}(B)$ messbar bezüglich $\mathcal{L}^1 \otimes \nu$.)

AUFGABE 27*:
Es seien μ, ν, σ Maße auf den Mengen X, Y, Z und μ und σ seien $\sigma-$endlich. Zeigen Sie

$$(\mu \otimes \nu) \otimes \sigma = \mu \otimes (\nu \otimes \sigma).$$

Gilt dies auch ohne die Annahme der $\sigma-$Endlichkeit von σ ?
(Hinweis: Zeigen Sie für $\mu, \nu = \mathcal{L}^1, Z = \{0\}, \sigma(Z) = \infty, D := \{(x,x) | x \in \mathbb{R}\}$, dass

$$(\mathcal{L}^1 \otimes (\mathcal{L}^1 \otimes \sigma))(D \times Z) = \infty \neq 0 = ((\mathcal{L}^1 \otimes \mathcal{L}^1) \otimes \sigma)(D \times Z).)$$

AUFGABE 28:(Fundamental-lemma der Variationsrechnung)
Es sei $f \in L^p(\Omega) := L^p(\mathcal{L}^n \lfloor \Omega), 1 < p \leq \infty, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit

$$\int_\Omega fg \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n = 0 \quad \forall g \in C_0^\infty(\Omega).$$

Zeigen Sie $f = 0$ fast überall bezüglich $\mathcal{L}^n$.
(Hinweis: Betrachten Sie die normerhaltende Einbettung $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)^*$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$ und verwenden Sie die Dichtheit von $C_0^\infty(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$.)

AUFGABE 29:
Zeigen Sie für $f \in L^p(\mathcal{L}^n), 1 \leq p < \infty$, dass

$$\lim_{|h|\to 0} \| f(.+h) - f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

(Hinweis: Approximieren Sie f mit $g \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$.)

AUFGABE 30:
Berechnen Sie das Volumen des Kegels mit abgeschlossener Grundfläche $A \subseteq \mathbb{R}^2$ und Höhe $h > 0$, d.h.

$$Kegel := \{ta + (1-t)he_3 \mid a \in A, 0 \leq t \leq 1 \},$$

als

$$\mathcal{L}^3(Kegel) = \frac{1}{3} h \mathcal{L}^2(A).$$

(Hinweis: Wenden Sie den Satz von Fubini auf $\mathcal{L}^3 = \mathcal{L}^2 \otimes \mathcal{L}^1$ an und verwenden Sie $\mathcal{L}^2(\lambda S) = \lambda^2 \mathcal{L}^2(S)$.)

Bearbeiten Sie vier der fünf Aufgaben.
Abgabetermin ist Donnerstag, 05.12.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork
05.12.24

Maß- und Integrationstheorie
WS 2024/25
8.Übung

AUFGABE 31:
Es seien $f, g \in L^1(\mathcal{L}^n)$. Zeigen Sie für $\mathcal{L}^n -$ fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$(y \mapsto f(x-y)g(y)) \in L^1(\mathcal{L}^n),$$

$$\Big(x \mapsto (f * g)(x) := \int f(x-y)g(y) \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n(y)\Big) \in L^1(\mathcal{L}^n),$$

und

$$\| f * g \|_{L^1(\mathcal{L}^n)} \leq \| f \|_{L^1(\mathcal{L}^n)} \| g \|_{L^1(\mathcal{L}^n)} .$$

(Hinweis: Betrachten Sie zuerst borelmeßbare f, g und verwenden Sie den Satz von Fubini.)

AUFGABE 32:
Es sei μ ein Maß auf einer Menge X , und $f : X \to [0, \infty]$ sei meßbar bezüglich μ . Zeigen Sie

$$\{(x,t) \mid f(x) > t \geq 0 \ \} \text{ ist meßbar bezüglich } \mu \otimes \mathcal{L}^1,$$

$$\Big(t \mapsto \mu(f > t)\Big) \text{ ist meßbar bezüglich } \mathcal{L}^1,$$

und

$$\int_0^\infty \mu(f > t) \ \mathrm{d}\mathcal{L}^1(t) = \int f \ \mathrm{d}\mu.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Fubini.)

AUFGABE 33: (Überdeckungssatz von Wiener)
Zeigen Sie für endlich viele Bälle $B_{\varrho_i}(x_i) \subseteq \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, N$ existiert $S \subseteq \{1, \ldots, N\}$ mit

$$\{B_{\varrho_i}(x_i)\}_{i \in S} \text{ sind paarweise disjunkt},$$

$$\cup_{i=1}^N B_{\varrho_i}(x_i) \subseteq \cup_{i \in S} B_{3\varrho_i}(x_i).$$

(Hinweis: Nehmen Sie $\varrho_1 \geq \ldots \geq \varrho_N$ an.)

AUFGABE 34:
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ heißt ober- bzw. unterhalbstetig, wenn

$$f(x) \geq \limsup_{y \to x} f(y) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \leq \liminf_{y \to x} f(y).$$

Zeigen Sie ober- bzw. unterhalbstetige Funktionen sind borelmeßbar.
(Hinweis: Zeigen Sie, daß $[f < \alpha]$ bzw. $[f > \alpha]$ offene Mengen sind.)

Abgabetermin ist Donnerstag, 12.12.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 12.12.24
Dr. N. Jork

Maß- und Integrationstheorie
WS 2024/25
9.Übung

AUFGABE 35: Für ein Radon-Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ und $f \in L^1_{loc}(\mu)$, d.h. $\chi_{B_R(0)} f \in L^1(\mu)$, und $f \geq 0$ setzen wir

$$(f\mu)(S) := \inf_{B \supseteq S \text{ Borelmenge}} \int_B f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{für } S \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, $f\mu$ ist ein Radon-Maß und

$$(f\mu)(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{für } A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ meßbar bezüglich } \mu.$$

Zeigen Sie weiter

$$\int g \, \mathrm{d}(f\mu) = \int gf \, \mathrm{d}\mu$$

für alle $\mu-$meßbaren $g : X \to [0, \infty]$ bzw. $\mu-$meßbaren $g \in L^1(f\mu)$, und im zweiten Fall gilt $gf \in L^1(\mu)$.
(Hinweis: Verwenden Sie Proposition 4.1.)

AUFGABE 36:
Es gelte für drei borelreguläre Maße μ, μ_1, μ_2 auf $\mathbb{R}^n$

$$\mu(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A) \quad \text{für alle Borelmengen } A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie

$$\mu(S) = \mu_1(S) + \mu_2(S) \quad \text{für alle } S \subseteq \mathbb{R}^n,$$

und zeigen Sie weiter, μ ist ein Radon-Maß genau dann, wenn μ_1 und μ_2 Radon-Maße sind.
(Hinweis: Verwenden Sie Proposition 4.1).

AUFGABE 37: (Lebesgue-Zerlegung)
Es sei μ ein Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie es existiert eine Lebesgue-Zerlegung

$$\mu = \mu_{abs} + \mu_{sing}$$

in ein bezüglich $\mathcal{L}^n$ absolutstetiges Radon-Maß μ_{abs} , d.h. $\mathcal{L}^n(A) = 0 \Rightarrow \mu_{abs}(A) = 0$, und ein zu $\mathcal{L}^n$ singuläres Radon-Maß μ_{sing} , d.h. es existiert eine Borelmenge $Z \subseteq$

$\mathbb{R}^n$ mit $\mu_{sing}(\mathbb{R}^n - Z) = 0 = \mathcal{L}^n(Z)$, und zeigen Sie, diese Zerlegung ist eindeutig. Zeigen Sie weiter

$$\overline{D}\mu_{sing} = 0 \quad \text{fast überall bezüglich } \mathcal{L}^n$$

und

$$\underline{D}\mu_{sing} = \infty \quad \text{fast überall bezüglich } \mu_{sing}.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Differentiationssatz.)

<u>AUFGABE 38:</u>

Für $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton nichtfallend mit $\varphi(t-) := \lim_{s \nearrow t} \varphi(s), \varphi(t+) := \lim_{s \searrow t} \varphi(s)$, definieren wir das Lebesgue-Stieltjes-Maß durch

$$\mu(S) := \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi(b_k-) - \varphi(a_k+)) \mid S \subseteq \cup_{k=1}^{\infty}]a_k, b_k[, a_k < b_k \in \mathbb{R} \Big\}.$$

für $S \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie μ ist ein Radon-Maß auf $\mathbb{R}$ mit

$$\mu(]a, b[) = \varphi(b-) - \varphi(a+) \quad \text{für } -\infty < a < b < \infty.$$

Abgabetermin ist Donnerstag, 19.12.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork

19.12.24

Maß- und Integrationstheorie
WS 2024/25
10.Übung

AUFGABE 39:
Es sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, bijektiv, mit stetiger Inverse und mit

$$\mathcal{L}^n(A) = 0 \Longrightarrow \mathcal{L}^n(\varphi(A)) = 0 \quad \text{für alle Borelmengen } A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie es existiert ein borelmeßbares $w \in L^1_{loc}(\mathcal{L}^n), w \geq 0$, mit

$$\int f \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int (f \circ \varphi) w \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

für alle borelmeßbaren $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ bzw. borelmeßbaren $f \in L^1(\mathcal{L}^n)$, und im zweiten Fall ist $(f \circ \varphi)w \in L^1(\mathcal{L}^n)$ borelmeßbar.
(Hinweis: Zeigen Sie, das Bildmaß $\mu := \varphi_*^{-1}(\mathcal{L}^n)$ ist ein Radon-Maß und absolutstetig bezüglich $\mathcal{L}^n$. Wenden Sie dann den Differentiationssatz auf μ an.)

AUFGABE 40: (Singuläre Funktion von Lebesgue)
Für ein Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}, a < b,$ definieren wir

$$\Phi_-([a, b]) := [a, a + (b - a)/3], \quad \Phi_+([a, b]) := [b - (b - a)/3, b],$$
$$\Phi_0([a, b]) :=]a + (b - a)/3, b - (b - a)/3[.$$

Damit definieren wir rekursiv

$$J_{0,1} := [0, 1],$$

und für $n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, 2^{n-1}$

$$J_{n,2k-1} := \Phi_-(J_{n-1,k}), \quad J_{n,2k} := \Phi_+(J_{n-1,k}),$$
$$I_{n,k} := \Phi_0(J_{n-1,k}).$$

Wir setzen $C_n := \cup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}$ und die Cantor-Menge $C := \cap_{n=0}^{\infty} C_n$. Zeigen Sie C ist kompakt,

$$C_{n-1} = C_n + \sum_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k} \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

$$\mathcal{L}^1(J_{n,k}) = (1/3)^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0, k = 1, \ldots, 2^n,$$

$$\mathcal{L}^1(C_n) = (2/3)^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

und $\mathcal{L}^1(C) = 0$.

Nun sei $\varphi(0) := 0, \varphi :\equiv (2k-1)2^{-n}$ auf $I_{n,k}$ und $\varphi(t) := \sup\{\varphi(s) \mid s \in [0,1]-C, s < t\}$ für $t > 0$. Zeigen Sie φ ist stetig, nicht-fallend, $\varphi([0,1]) = [0,1]$, aber $\varphi' = 0$ fast überall bezüglich $\mathcal{L}^1$, also

$$\int_0^1 \varphi'(t)\ \mathrm{d}t = 0 \neq 1 = \varphi(1) - \varphi(0).$$

<u>AUFGABE 41:</u>
Es sei $f \in L^1(\mathcal{L}^1)$ und $F(t) := \int_0^t f\ \mathrm{d}\mathcal{L}^1$. Zeigen Sie, daß F absolutstetig ist, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall -\infty < a_1 < b_1 < \ldots < a_n < b_n < \infty :$$
$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \Longrightarrow \sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon,$$

und insbesondere $\mathcal{L}^1-$Nullmengen wieder in Nullmengen abbildet. Zeigen Sie weiter, daß F fast überall bezüglich $\mathcal{L}^1$ differenzierbar ist und

$$F' = f \quad \mathcal{L}^1 - \text{fast überall.}$$

<u>AUFGABE 42:</u>
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lokal lipschitzstetig. Zeigen Sie, daß $Df(x) = 0$ für $\mathcal{L}^n-$fast alle $x \in [f = 0]$.
(Hinweis: Zeigen Sie für $f_\varrho(x) := (f(\varrho x) - f(0))/\varrho$, daß $f_\varrho \to Df(0)$ gleichmäßig auf $B_1(0)$, falls f differenzierbar in 0 ist, wobei $Df(0)$ als Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aufgefasst wird. Nehmen Sie weiter an, dass $f(0) = 0$ und 0 ein Lebesguepunkt von $\chi_{[f=0]} \in L^1_{loc}(\mathcal{L}^n)$ ist.)

Abgabetermin ist Donnerstag, 09.01.25.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork 09.01.25

Maß- und Integrationstheorie
WS 2024/25
11.Übung

AUFGABE 43:
Es sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton nichtfallend und absolutstetig wie in Aufgabe 41. Zeigen Sie

$$\varphi(b) = \varphi(a) + \int_a^b \varphi' \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 \quad \text{für } -\infty < a < b < \infty.$$

(Hinweis: Zeigen Sie, daß das Lebesgue-Stieltjes-Maß erzeugt durch φ aus Aufgabe 36 absolutstetig bezüglich $\mathcal{L}^1$ ist, und wenden Sie den Differentiationssatz an.)

AUFGABE 44:
Berechnen Sie das Volumen der Kugel im dreidimensionalen euklidischen Raum

$$\mathcal{L}^3(B_r(0)) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

(Hinweis: Führen Sie Kugelkoordinaten $f(r, \varphi, \theta) := (r \cos\varphi \sin\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\theta)$ ein.)

AUFGABE 45:
Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^2(x, y) = \pi$$

mit Hilfe von Polarkoordinaten $(x, y) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$ und der Substitutionsformel aus der Vorlesung. Zeigen Sie damit und mit dem Satz von Fubini

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi},$$

vgl. Aufgabe 21.

AUFGABE 46:
Zeigen Sie für borelmeßbares $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$

$$\int f \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int_0^\infty \int_{\partial B_1(0)} r^{n-1} f(r\omega) \, \mathrm{d}area_{\partial B_1(0)}(\omega) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1(r)$$

und schließen Sie

$$area_{\partial B_1(0)}(\partial B_1(0)) = n\mathcal{L}^n(B_1(0)).$$

(Hinweis: Betrachten Sie eine lokale Parametrisierung $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \to \partial B_1(0)$ und wenden Sie die Substitutionsformel auf $\Psi : U \times]0, \infty[\to \mathbb{R}^n$ mit $\Psi(y, r) := r\Phi(y)$ an.)

Abgabetermin ist Donnerstag, 16.01.25.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 16.01.25
Dr. N. Jork

Maß- und Integrationstheorie
WS 2024/25
12.Übung

AUFGABE 47:
$M \subseteq \mathbb{R}^m$ sei eine $C^k - n-$Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m, n, k \in \mathbb{N}$, und $\Phi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\approx} M \cap V_\alpha, U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n, V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\alpha = 1, 2,$ seien zwei lokale Parametrisierungen mit Übergangsabbildung

$$\varphi_{12} := \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : U_{12} := \Phi_1^{-1}(M \cap V_1 \cap V_2) \xrightarrow{\approx} U_{21} := \Phi_2^{-1}(M \cap V_1 \cap V_2).$$

Zeigen Sie $\varphi_{12} \in C^k(U_{12})$.
(Hinweis: Verwenden Sie den Satz über inverse oder implizite Funktionen.)

AUFGABE 48:
Es sei $f : \{x_n \geq 0\} \cap \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-Abbildung mit kompaktem Träger $\overline{[f \neq 0]} \subseteq B_R(0)$. Zeigen Sie

$$\int\limits_{[x_n > 0]} div\ f \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = - \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(y, 0) \ \mathrm{d}\mathcal{L}^{n-1}(y),$$

wobei $div\ f := \sum_{i=1}^n \partial_i f_i$ fast-überall bezüglich $\mathcal{L}^n$ definiert ist.
(Hinweis: Verwenden Sie die Sätze von Fubini und Rademacher.)

AUFGABE 49: (Stereographische Projektion)
Die stereographische Projektion $T : \partial B_1(0) - \{e_3\} \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^2$ ordnet jedem Punkt der Einheitskugel $p \in \partial B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^3, p \neq e_3$, den Schnittpunkt der Gerade durch p und e_3 und der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \cong \mathbb{R}^2$ zu, d.h.

$$T(x, t) := \frac{x}{1 - t} \quad \text{für } (x, t) \in \partial B_1(0) - \{e_3\}.$$

Zeigen Sie die Inverse $\Phi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\approx} \partial B_1(0) - \{e_3\}$ ist eine lokale Parametrisierung eines Teils der Einheitskugel mit induzierter Metrik

$$g_{ij}(x) := \langle \partial_i \Phi(x), \partial_j \Phi(x) \rangle = \frac{4}{(1 + |x|^2)^2} \delta_{ij}$$

mit $\delta_{ij} := 1$ für $i = j$ und andernfalls $:= 0$, insbesondere ist Φ winkeltreu bzw. konform, d.h.

$$\cos \sphericalangle(D\Phi(x).v, D\Phi(x).w) = \cos \sphericalangle(v, w) := \frac{\langle v, w \rangle}{|v| \cdot |w|} \quad \text{für } x, v, w \in \mathbb{R}^2, v, w \neq 0.$$

AUFGABE 50:(Gramsche Determinante)
Es sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$. Für $v_1, \ldots, v_k \in V$ ist die Gramsche Determinante definiert durch

$$Gr(v_1, \ldots, v_k) := \det(\langle v_i, v_j \rangle).$$

Zeigen Sie

$$Gr(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k + v_1) = Gr(v_1, \ldots, v_k)$$

und schließen Sie

$$Gr(v_1, \ldots, v_k) = \prod_{i=1}^{k} |\pi_{span\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}^\perp} v_i|^2,$$

wobei $\pi_U : V \to U$ die orthogonale Projektion auf den Unterraum $U \subseteq V$ bezeichnet, also insbesondere $Gr(v_1, \ldots, v_k) \neq 0 \Longleftrightarrow v_1, \ldots, v_k$ sind linear unabhängig.
(Hinweis: Verwenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren.)

Abgabetermin ist Donnerstag, 23.01.25.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork

23.01.25

Maß- und Integrationstheorie
WS 2024/25
13.Übung

AUFGABE 51:

Zeigen Sie für jede offene, beschränkte Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Lipschitzrand und äußerer Einheitsnormale ν_Ω an $\partial\Omega$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{x}{|x|^n} \cdot \nu_\Omega(x) \, \mathrm{d}area_{\partial\Omega}(x) = \begin{cases} area_{\partial B_1(0)}(\partial B_1(0)) \neq 0 & \text{für } 0 \in \Omega, \\ 0 & \text{für } 0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

(Hinweis: Zeigen Sie $div(x/|x|^n) = 0$ für $x \neq 0$ und verwenden Sie den Satz von Gauß.)

AUFGABE 52*:

Das durch eine Ladungs- oder Massenbelegung der Dichte ϱ, die borelmessbar, beschränkt und mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}^3$ ist, erzeugte Potential ϕ ist gegeben durch

$$\phi(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho(y)}{|x-y|} \, \mathrm{d}y \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3,$$

und $F := -grad\ \phi$ ist die elektrische Feldstärke oder die Schwerkraft.

Zeigen Sie, dass ϕ stetig differenzierbar in $\mathbb{R}^3$ ist, und für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, beschränkt mit Lipschitzrand und äusserer Einheitsnormale ν_Ω, dass

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu_\Omega \, \mathrm{d}area_{\partial\Omega} = 4\pi \int_{\Omega} \varrho \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

Zeigen Sie weiter für $\varrho = \chi_{B_r(0)}$ gilt

$$F(x) = -\frac{x}{|x|^3} \begin{cases} 4\pi r^3/3 & \text{für } |x| \geq r, \\ 4\pi |x|^3/3 & \text{für } 0 < |x| \leq r, \end{cases}$$

d.h. die Schwerkraft einer homogenen Kugel ist gleich der Schwerkraft der im Ursprung konzentrierten Masse der Kugel, wobei bei Punkten innerhalb der Kugel nur die Masse der Kugel unterhalb des Punktes beiträgt.

AUFGABE 53:

Eine Metrik $(g_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in C^{k-1}(V), k \in \mathbb{N}$, auf einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung von V in die Menge der positiv definiten Matrizen. Wir setzen $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}, g = \det(g_{ij})$,

$$(grad_g f)^i = g^{ij}\partial_j f \quad \text{für } f \in C^1(V,\mathbb{R}), i = 1,\dots,n,$$
$$div_g f = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g} f^i) \quad \text{für } f \in C^1(V,\mathbb{R}^n), k \geq 2,$$
$$\Delta_g f = div_g grad_g f = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g} g^{ij}\partial_j f) \quad \text{für } f \in C^2(V,\mathbb{R}), k \geq 2,$$

wobei wir über Indices, die als untere und obere Indices auftreten, von $1,\dots,n$ summieren.

Für einen C^k-Diffeomorphismus $\varphi : U \xrightarrow{\approx} V$ der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ auf V definieren wir die Pullback-Metrik $\tilde{g} = \varphi^* g$ bezüglich φ auf U durch

$$\tilde{g}_{rs} = \partial_r\varphi^i\partial_s\varphi^j(g_{ij}\circ\varphi).$$

Zeigen Sie

$$grad_{\tilde{g}}(f\circ\varphi)^r\partial_r\varphi^i = grad_g(f)^i\circ\varphi \quad \text{für } f \in C^1(V,\mathbb{R}), i = 1,\dots,n,$$
$$div_{\tilde{g}}((D\varphi)^{-1}(f\circ\varphi)) = div_g(f)\circ\varphi \quad \text{für } f \in C^1(V,\mathbb{R}^n), k \geq 2,$$
$$\Delta_{\tilde{g}}(f\circ\varphi) = \Delta_g(f)\circ\varphi \quad \text{für } f \in C^2(V,\mathbb{R}), k \geq 2.$$

(Hinweis: Wenden Sie beim Beweis für die Divergenz die Substitutionsformel auf $\int div_g(f)\psi \, \mathrm{d}\mu_g$ für $\psi \in C_0^1(V)$ und $\mu_g = \sqrt{g}\mathcal{L}^n\lfloor V$ an.)

AUFGABE 54:

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine $C^{k+1} - n-$Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m, k \geq 0$. Zeigen Sie jedes Vektorfeld $f \in C^k(M,\mathbb{R}^m)$ auf M kann eindeutig in Tangential- und Normalanteil

$$f = f^{tang} + f^{\perp}$$

zerlegt werden, d.h. $f^{tang}(x) \in T_xM, f^{\perp}(x) \in N_xM$ für alle $x \in M$, und weiter gilt $f^{tang}, f^{\perp} \in C^k(M,\mathbb{R}^m)$.

AUFGABE 55:

Eine $C^2 - n-$Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^{n+1}$ kann nach Translation und Rotation lokal als Graph

$$M \cap B_\varrho(0) = graph\ \varphi \cap B_\varrho(0)$$

einer Funktion $\varphi \in C^2(B_\varrho^n(0),\mathbb{R})$ mit $\varphi(0) = 0, \nabla\varphi(0) = 0$ dargestellt werden. Zeigen Sie

$$\vec{\mathbf{H}}_M(0) = spur\ D^2\varphi(0)\ e_{n+1}.$$

Bearbeiten Sie vier der fünf Aufgaben.
Abgabetermin ist Donnerstag, 30.01.25.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 30.01.25
Dr. N. Jork

Maß- und Integrationstheorie
WS 2024/25
14.Übung

AUFGABE 56:
Es sei M eine $C^2 - n-$Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ mit C^1-Einheitsnormalenfeld ν . Zeigen Sie

$$\vec{\mathbf{H}}_M = -\nu \ div_M \nu.$$

AUFGABE 57:
Wir betrachten den Vektorraum $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ mit der Supremumsnorm $\| \ f \ \| := \sup_{\mathbb{R}^n} |f|$ für $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ als normierten Vektorraum. Zeigen Sie, zu jedem stetigen, linearen Funktional Λ auf $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ existiert ein endliches Radon-Maß μ auf $\mathbb{R}^n$, d.h. $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$, und eine borelmeßbare Funktion $\sigma : \mathbb{R}^n \to \partial B_1(0) \subseteq \mathbb{C}$ mit

$$\Lambda f = \int f\sigma \ \mathrm{d}\mu \quad \text{für alle } f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$$

und $\mu(\mathbb{R}^n) = \| \ \Lambda \ \|$.
(Hinweis: Verwenden Sie den Darstellungssatz von Riesz in der vektorwertigen Version.)
AUFGABE 58:
Zeigen Sie für $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, dass

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{x}{|x|^n} \cdot div \ \varphi(x) \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n(x) \Big| \leq \| \ \varphi \ \|_{L^\infty(\Omega)},$$

also erweitert $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n) \mapsto \int_\Omega (x/|x|^n) \cdot div \ \varphi(x) \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n(x)$ zu einem stetigen, linearen Funktional auf $C_0^0(\mathbb{R}^n)$. Bestimmen Sie nach dem Darstellungssatz von Riesz in der vektorwertigen Version das Radon-Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ und die borelmeßbare Funktion $\sigma : \mathbb{R}^n \to \partial B_1(0) \subseteq \mathbb{C}$ mit

$$\int\limits_\Omega \frac{x}{|x|^n} \cdot div \ \varphi(x) \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n(x) = \int \varphi \cdot \sigma \ \mathrm{d}\mu \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n).$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Integralsatz von Gauss und beachten Sie Aufgabe 51.)
AUFGABE 59:
Es sei φ ein stetiger komplexer Homomorphismus auf $C_0^0(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\varphi : C_0^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ ist stetig, linear und $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ für $f, g \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, für $\varphi \neq 0$ existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\varphi(f) = f(x_0) \quad \text{für alle } f \in C_0^0(\mathbb{R}^n).$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Darstellungssatz von Riesz und zeigen Sie für offene, disjunkte Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$, daß $\mu(U) = 0$ oder $\mu(V) = 0$. Zeigen Sie anschließend, daß der Träger $spt\ \mu := \mathbb{R}^n - \bigcup\{U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen} \mid \mu(U) = 0\ \}$ nur aus einem Punkt besteht.)

Keine Abgabe.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 06.02.25
Dr. N. Jork

Maß- und Integrationstheorie
WS 2024/25
15.Übung

AUFGABE 60:
Es sei $\Lambda : C_0^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ein lineares Funktional und μ ein Radon-Mass auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$|\Lambda f| \leq \int |f| \, \mathrm{d}\mu \quad \forall f \in C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie, es existiert eine beschränkte, borelmessbare Funktion $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit

$$\Lambda f = \int f\sigma \, \mathrm{d}\mu \quad \forall f \in C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}).$$

(Hinweis: Für reelles, komplex-lineares Λ im Sinne $\Lambda f \in \mathbb{R}$ für $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ schreiben Sie mit dem Darstellungssatz von Riesz, Satz 7.1, $\int f \, \mathrm{d}\mu - \Lambda f = \int f \, \mathrm{d}\nu$ für ein Radon-Mass $\nu \leq 2\mu$ auf $\mathbb{R}^n$ und wenden anschliessend den Satz von Radon-Nikodym an. Schreiben Sie schliesslich $\Lambda = \Lambda_r + i\Lambda_i$ mit reellen, komplex-linearen Funktionalen Λ_r, Λ_i auf $C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ in obigem Sinn.)

AUFGABE 61:
μ, ν, λ seien Maße auf X und $\mathcal{A}$ eine $\sigma-$Algebra aus $\mu-, \nu-$ und $\lambda-$meßbaren Mengen. Zeigen Sie

$$\nu \ll_{\mathcal{A}} \mu, \nu \perp_{\mathcal{A}} \mu \Longrightarrow \nu = 0$$

und

$$\lambda \ll_{\mathcal{A}} \nu, \nu \ll_{\mathcal{A}} \mu \Longrightarrow \lambda \ll_{\mathcal{A}} \mu.$$

Zeigen Sie im zweiten Fall, falls μ, ν, λ alle $\sigma-$endlich bezüglich $\mathcal{A}$ sind,

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}_{\mathcal{A}} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu}_{\mathcal{A}} \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}_{\mathcal{A}}.$$

Zeigen Sie für $\mu \ll_{\mathcal{A}} \nu, \nu \ll_{\mathcal{A}} \mu$ gilt $(\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu)_{\mathcal{A}} \neq 0$ fast überall bezüglich μ bzw. ν .

AUFGABE 62:
μ und ν seien zwei Maße auf X und $\mathcal{A}$ eine $\sigma-$Algebra von $\mu-$ und $\nu-$meßbaren Mengen. ν sei endlich und $\nu \ll_{\mathcal{A}} \mu$. Zeigen Sie

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall A \in \mathcal{A} : \Big(\mu(A) < \delta \Longrightarrow \nu(A) < \varepsilon\Big).$$

AUFGABE 63:
Es sei μ ein Maß auf X , und $\nu(S) := 0,$ wenn $\mu(S) = 0$ und $\nu(S) := \infty,$ wenn $\mu(S) >$

0 . Zeigen Sie ν ist ein Maß auf $X, \mathcal{A}_\nu = \mathcal{P}(X)$ und $\nu \ll_{\mathcal{A}_\mu} \mu$. Bestimmen eine Radon-Nikodym-Ableitung von ν nach μ .

AUFGABE 64:

μ und ν seien zwei Maße auf X und $\mathcal{A}$ eine $\sigma-$Algebra von $\mu-$ und $\nu-$meßbaren Mengen. μ sei endlich und $\nu \ll_{\mathcal{A}} \mu$. Zeigen Sie, daß eine Menge $B \in \mathcal{A}$ existiert mit

$$\nu(A) = 0 \text{ oder } \nu(A) = \infty,$$
$$\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$$

für alle $A \subseteq B, A \in \mathcal{A}$, und $\nu\lfloor(X - B)$ ist $\sigma-$endlich bezüglich $\mathcal{A}$. Zeigen Sie damit, daß der Satz von Radon-Nikodym für ν, μ gilt, wenn nur $\sigma-$Endlichkeit von μ bezüglich $\mathcal{A}$ angenommen wird.
(Hinweis: Betrachten Sie $\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{A} \mid \forall A \subseteq B, A \in \mathcal{A} : \nu(A) = 0 \text{ oder } \nu(A) = \infty\ \}$ und $\alpha := \sup_{B \in \mathcal{D}} \mu(B)$.)

AUFGABE 65:

Es sei $l^p = L^p(\nu)$ für das Zählmaß ν auf $\mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$, d.h. $l^p := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^\infty |x_i|^p < \infty\ \}$ für $1 \le p < \infty$ bzw. $l^\infty := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid \sup_{i=1}^\infty |x_i| < \infty\ \}$. Zeigen Sie, zu jedem stetigen, linearen Funktional Λ auf l^p für $1 \le p < \infty$ existiert ein $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l^q, 1 < q \le \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1,$ mit

$$\Lambda(x_i)_{i \in \mathbb{N}} = \sum_{i=1}^\infty x_i y_i \quad \text{für alle } (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l^p.$$

(Hinweis: Setzen Sie $y_i := \Lambda e_i$ mit $e_i := (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}} \in l^p$.)

Keine Abgabe.