Analysis III

Maß- und Integrationstheorie

Reiner Schätzle
Wintersemester 2024/25
Universität Tübingen

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Maßtheorie

1 Abstrakte Integration

Definition 1.1 *Eine Abbildung* $\mu : \mathcal{P}(X) \mapsto [0,\infty]$ *heißt Maß auf der Menge* X *, falls*

- $\mu(\emptyset) = 0,$
- $\mu(A) \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ *für* $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq X.$

Für $A \subseteq X$ *heißt* $\mu\lfloor A$ *, definiert durch*

$$(\mu\lfloor A)(B) := \mu(B \cap A) \quad \forall B \in \mathcal{P}(X),$$

die Restriktion von μ *auf* A *.*

Eine Menge $A \subseteq X$ *heißt* μ*-meßbar oder meßbar bezüglich* μ *, falls*

$$\forall S \subseteq X : \mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S - A). \tag{1.1}$$

□

Bemerkungen:

1. Üblicherweise wird μ wie in Definition 1.1 ein äußeres Maß genannt, und die Einschränkung von μ auf die meßbaren Teilmengen ein Maß genannt. Wir werden aber sehen, daß es sehr nützlich sein wird, daß auch nicht-meßbaren Mengen ein Wert durch μ zugeordnet wird.
2. Wegen der Subadditivität, genügt es für die Meßbarkeit
$$\mu(S) \ge \mu(S \cap A) + \mu(S - A) \quad \forall S \subseteq X, \mu(S) < \infty \tag{1.2}$$
zu zeigen.
3. $A \subseteq X$ ist genau dann $\mu-$meßbar, wenn $X - A$ meßbar bezüglich μ ist. Weiter sind die $\mu-$meßbaren Mengen für alle $S \subseteq X$ auch $(\mu\lfloor S)-$meßbar.
4. Ist $\mu(A) = 0$, so ist A meßbar bezüglich μ und heisst eine $\mu-$Nullmenge. Weiter heißt eine $\mu-$meßbare Menge $A \subseteq X$ lokale $\mu-$Nullmenge, falls
$$\forall B \subseteq A \text{ meßbar bezüglich } \mu : \mu(B) = 0 \text{ oder } \mu(B) = \infty.$$

□

Beispiele:

1. Das Zählmaß ν auf einer beliebigen Menge X ist definiert durch
$$\nu(S) := \begin{cases} \#(S) := \text{ Anzahl der Elemente von } S, & \text{falls } S \text{ endlich ist,} \\ \infty, & \text{falls } S \text{ unendlich ist.} \end{cases}$$
Man sieht leicht, daß alle $S \subseteq X$ meßbar bezüglich des Zählmaßes sind.

2. Für $S \subseteq \mathbb{R}^n$ definieren wir das $n-$dimensionale Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$\mathcal{L}^n(S) := \inf\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} (b_{ki} - a_{ki}) \mid S \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n}]a_{ki}, b_{ki}[, a_{ki} < b_{ki} \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Man sieht leicht, daß alle Intervalle $\prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[$ und mit der folgenden Proposition alle offenen und abgeschlossenen Menge $\mathcal{L}^n-$meßbar sind. Weiter gilt $\mathcal{L}^n(a \pm \lambda S) = \lambda^n \mathcal{L}^n(S)$ für $\lambda \geq 0$. Aus der Definition erhalten wir

$$\mathcal{L}^n(\prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[) \leq \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Gleichheit im Eindimensionalen

$$\mathcal{L}^1([a, b]) = \mathcal{L}^1([a, b[) = \mathcal{L}^1(]a, b]) = \mathcal{L}^1(]a, b[) = b - a \tag{1.3}$$

sieht man leicht, während wir Gleichheit im Mehrdimensionalen erst durch den Satz von Fubini erhalten.

□

Einfache Eigenschaften meßbarer Mengen sind in der folgenden Proposition zusammengestellt.

Proposition 1.1 *μ sei ein Maß auf X , und $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge von $\mu-$meßbaren Mengen. Dann gilt:*

$$\cup_{k=1}^{\infty} A_k, \cap_{k=1}^{\infty} A_k \text{ sind wieder } \mu - \text{meßbar}, \tag{1.4}$$

$$\mu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad \text{für } A_k \text{ paarweise disjunkt}, \tag{1.5}$$

$$\mu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k) \quad \text{für } A_k \subseteq A_{k+1}, \tag{1.6}$$

$$\mu(\cap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k) \quad \text{für } A_k \supseteq A_{k+1}, \mu(A_1) < \infty. \tag{1.7}$$

Beweis:
Da die $A_k, k \in \mathbb{N}, \mu-$meßbar sind, gilt für alle $S \subseteq X$

$$\begin{aligned} \mu(S) = \mu(S \cap A_1) + \mu(S - A_1) = \\ = \mu(S \cap A_1) + \mu((S - A_1) \cap A_2) + \mu((S - A_1) - A_2) \geq \\ \geq \mu(S \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(S - (A_1 \cup A_2)). \end{aligned}$$

Somit sind $A_1 \cup A_2$ und alle endlichen Vereinigungen auch $\mu-$meßbar. Da

$$X - (A_1 \cap A_2) = (X - A_1) \cup (X - A_2),$$

sind $A_1 \cap A_2$ und alle endlichen Durchschnitte auch $\mu-$meßbar.

Sind die A_k paarweise disjunkt, so gilt für $B_l := \cup_{k=1}^l A_k$

$$\mu(B_{l+1}) = \mu(B_{l+1} \cap A_{l+1}) + \mu(B_{l+1} - A_{l+1}) = \mu(A_{l+1}) + \mu(B_l)$$

und mit Induktion

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{l} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{l} \mu(A_k).$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \le \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

also (1.5) mit Subadditivität.

Zum Beweis von (1.6) sehen wir mit (1.5)

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{k+1} - A_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

Für $\nu := \mu\lfloor S, \mu(S) < \infty$, sind A_k und $B_l := \cup_{k=1}^l A_k \subseteq B_{l+1}$ auch $\nu-$meßbar, also mit (1.6)

$$\mu\Big(S \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big)\Big) + \mu\Big(S - \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) + \nu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}(X - B_k)\Big) \le$$

$$\le \lim_{k\to\infty} \nu(B_k) + \lim_{k\to\infty} \nu(X - B_k) = \nu(X) = \mu(S),$$

und $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$ ist $\mu-$meßbar. Da

$$X - \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}(X - A_k),$$

ist $\cap_{k=1}^{\infty} A_k$ auch $\mu-$meßbar.

Zum Beweis von (1.7) rechnen wir mit (1.6) und Subadditivität

$$\mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_1 - A_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_1 - A_k)\Big) \ge \mu(A_1) - \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big),$$

also

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \le \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big),$$

und Gleichheit folgt mit Monotonie.

///

Obige Proposition legt folgende Definition nahe.

Definition 1.2 *Eine Familie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt $\sigma -$ Algebra auf X, falls*

- $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,

- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X - A \in \mathcal{A}$,
- $A_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Für ein Maß μ *auf* X *setzen wir* $\mathcal{A}_\mu$ *die* $\sigma-$*Algebra der* $\mu-$*meßbaren Mengen.*

□

Beispiel:
Da der Schnitt von $\sigma-$Algebren wieder eine $\sigma-$Algebra ist und $\mathcal{P}(X)$ eine $\sigma-$Algebra ist, erzeugt jede Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine kleinste $\sigma-$Algebra, die $\mathcal{F}$ enthält.

Auf $X = \mathbb{R}^n$ oder allgmeiner auf einem topologischen Raum X heißt die kleinste $\sigma-$Algebra $\mathcal{B}$, die die offenen bzw. abgeschlossenen Mengen enthält, die Borel $\sigma-$Algebra und ihre Elemente heißen die Borelmengen.

Für das $n-$dimensionale Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ sehen wir, daß alle Borelmengen meßbar sind.

□

Definition 1.3 *Eine Teilmenge* $A \subseteq X$ *heißt* $\sigma-$*endlich bezüglich eines Maßes* μ *und einer* $\sigma-$*Algebra* $\mathcal{A}$ *auf* X *, falls*

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

für eine Folge von $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ *mit* $\mu(A_k) < \infty$ *. Für* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu$ *nennen wir* A *kurz* $\sigma-$*endlich bezüglich* μ *.*

Das Maß μ *heißt endlich bzw.* $\sigma-$*endlich, falls* $\mu(X) < \infty$ *bzw.* X *insgesamt* $\sigma-$*endlich bezüglich* $\mathcal{A}_\mu$ *ist.*

□

Wir kommen nun zu dem Begriff der meßbaren Funktion.

Definition 1.4 *Es sei*

$$[-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

wobei $\infty = +\infty \neq -\infty \notin \mathbb{R}$ *zwei Symbole sind. Wir erweitern die Ordnung und die Rechenregeln von* $\mathbb{R}$ *auf* $[-\infty, \infty]$ *durch*

$$-\infty < a < \infty \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

$$a + \infty = \infty + a := \infty \quad \forall -\infty < a \leq \infty,$$

$$a - \infty = -\infty + a := -\infty \quad \forall -\infty \leq a < \infty,$$

$$(\pm\infty)(\pm a) = (\pm a)(\pm\infty) := \infty \quad \forall 0 < a \leq \infty,$$

$$(\pm\infty)(\mp a) = (\mp a)(\pm\infty) := -\infty \quad \forall 0 < a \leq \infty,$$

$$\pm\infty \cdot 0 = 0 \cdot (\pm\infty) := 0.$$

$\infty - \infty$ *bzw.* $-\infty + \infty$ *sind nicht definiert.*

$\square$

Definition 1.5 *$\mathcal{A}$ sei eine $\sigma-$Algebra auf X . Eine Funktion $f : X \to [-\infty, \infty]$ heißt $\mathcal{A}-$meßbar oder meßbar bezüglich $\mathcal{A}$, falls*

$$[a \leq f \leq b] := f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{A} \quad \textit{für alle } -\infty \leq a \leq b \leq \infty.$$

Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt $\mathcal{A}-$meßbar, falls $Re(f), Im(f) : X \to \mathbb{R} \subseteq [-\infty, \infty]$ meßbar bezüglich $\mathcal{A}$ sind.

Eine Funktion f auf einem topologischen Raum X heißt borelmeßbar, falls sie meßbar bezüglich der Borel $\sigma-$Algebra von X ist.

Für ein Maß μ auf X heißt eine Funktion $f : X \to [-\infty, \infty], \mathbb{C}$ meßbar bezüglich μ bzw. $\mu-$meßbar, wenn f bezüglich $\mathcal{A}_\mu$ meßbar ist.

$\square$

Bemerkung:

Eine Funktion $f : X \to [-\infty, \infty]$ ist genau dann $\mathcal{A}-$meßbar, wenn

$$[-\infty \leq f < a] = f^{-1}([-\infty, a[) \in \mathcal{A} \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}$$

oder

$$[-\infty \leq f \leq a] = f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A} \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist genau dann $\mathcal{A}-$meßbar, wenn

$$f^{-1}(]a, b[\times]c, d[) \in \mathcal{A} \quad \text{für alle } a < b, c < d,$$

oder, da jede offene Menge eine abzählbare Vereinigung von Intervallen der Form $]a, b[\times]c, d[$ ist, wenn

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{A} \quad \text{für alle offenen } U \subseteq \mathbb{C}. \tag{1.8}$$

Da

$$\mathcal{F} := \{B \subseteq \mathbb{C} \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$$

eine $\sigma-$Algebra auf $\mathbb{C}$ ist und alle offenen Mengen enthält, ist die Borel $\sigma-$Algebra $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ und somit

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \text{für alle Borelmengen } B \subseteq \mathbb{C}. \tag{1.9}$$

$\square$

Einfache Eigenschaften meßbarer Funktionen sind in der folgenden Proposition zusammengestellt.

Proposition 1.2 *$\mathcal{A}$ sei eine $\sigma-$Algebra auf X und $f, g : X \to \mathbb{C}$ und $f_k : X \to [-\infty, \infty], k \in \mathbb{N}$, seien $\mathcal{A}-$meßbare Funktionen, und $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei borelmessbar, z.B. stetig. Dann sind*

$$\begin{aligned} &f + g, fg, |f|, \bar{f}, \varphi \circ f, \\ &\min(f, g), \max(f, g), && \textit{falls } f, g : X \to \mathbb{R}, \\ &f/g, && \textit{falls } g(x) \neq 0 \ \forall x \in X, \end{aligned}$$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k, \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k, \limsup_{k\to\infty} f_k, \liminf_{k\to\infty} f_k,$$

wieder $\mathcal{A}-$meßbar.

Beweis:
Für stetiges φ und offenes $U \subseteq \mathbb{C}$ ist $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{C}$ wieder offen, insbesondere eine Borelmenge von $\mathbb{C}$, und φ ist borelmessbar. Für borelmessbares $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und offenes $U \subseteq \mathbb{C}$ ist $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{C}$ mit (1.8) eine Borelmenge und weiter mit (1.9) ist

$$(\varphi \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(\varphi^{-1}(U)) \in \mathcal{A}.$$

Daher ist $\varphi \circ f$ mit (1.8) meßbar bezüglich $\mathcal{A}$.

Betrachten wir insbesondere $\varphi(z) := |z|, \bar{z}$, so sehen wir, daß $|f|, \bar{f}$ meßbar bezüglich $\mathcal{A}$ sind. Für den Rest genügt es, $f, g : X \to \mathbb{R}$ zu betrachten. Für die stetige Abbildung $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \varphi(z) := Re(z) + Im(z),$ gilt

$$f + g = \varphi \circ (f + ig),$$

und $f + g$ ist $\mathcal{A}-$meßbar. Da die Abbildungen $(a, b) \mapsto a \cdot b, \max(a, b), \min(a, b)$ stetig sind, sind auch $fg, \max(f, g), \min(f, g)$ meßbar bezüglich $\mathcal{A}$.

Da

$$[-\infty \le \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k \le a] = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [-\infty \le f_k \le a],$$
$$[-\infty \le \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k < a] = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [-\infty \le f_k < a],$$

sind $\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$, $\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k$ meßbar bezüglich $\mathcal{A}$. Gleiches gilt für $\limsup_{k \to \infty} f_k, \liminf_{k \to \infty} f_k$, da

$$\limsup_{k \to \infty} f_k = \inf_{l \in \mathbb{N}} \sup_{k \ge l} f_k, \quad \liminf_{k \to \infty} f_k = \sup_{l \in \mathbb{N}} \inf_{k \ge l} f_k.$$

Für $g(x) \neq 0 \; \forall x \in X$ beachten wir $1/z = \bar{z}/|z|^2$ für $z \neq 0$ und betrachten $\varphi_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\varphi_k(z) := \bar{z}/(|z|^2 + k^{-2})$ für $z \in \mathbb{C}$. Da φ_k stetig sind, ist

$$\lim_{k \to \infty} (\varphi_k \circ g) = \lim_{k \to \infty} \bar{g}/(|g|^2 + k^{-2}) = \bar{g}/|g|^2 = 1/g,$$

da $g \neq 0$ auf X, meßbar bezüglich $\mathcal{A}$, und somit ist auch $f/g = f \cdot (1/g)$ meßbar bezüglich $\mathcal{A}$.

///

Bemerkung:
Für $\mathcal{A}-$meßbare Abbildungen $f, g : X \to [-\infty, \infty]$, sind $f+g, fg, f/g$ jeweils auf einer in $\mathcal{A}$ enthaltenen Menge definiert und $\mathcal{A}-$meßbar in dem Sinne, daß für $h = f + g, fg, f/g$ die Mengen

$$[a \le h \le b] = h^{-1}([a, b]) \in \mathcal{A} \quad \text{für alle } -\infty \le a \le b \le \infty.$$

□

Folgende Zerlegung meßbarer Funktionen ist nützlich.

Proposition 1.3 *$f : X \to [0, \infty]$ sei meßbar bezüglich einer $\sigma-$Algebra $\mathcal{A}$ auf X, und $\alpha_k > 0$ mit $\alpha_k \to 0, \alpha_k \le \sum_{l=k+1}^{\infty} \alpha_l \; \forall k \ge 1$ und*

$$f \le M := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \in]0, \infty].$$

Dann existieren $A_k \in \mathcal{A}$ *mit*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \chi_{A_k}.$$

Beweis:
Wir setzen

$$A_1 := [f \geq \alpha_1]$$

und induktiv

$$A_k := \left[f \geq \alpha_k + \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_l \chi_{A_l} \right] \quad \text{für } k \geq 2.$$

Klarerweise sind $A_k \in \mathcal{A}$, und

$$f \geq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \chi_{A_k}. \tag{1.10}$$

Für $f(x) = M$ gilt $x \in A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \chi_{A_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = M = f(x).$$

Für $0 \leq f(x) < M$ gilt mit (1.10) für mindestens ein $l \in \mathbb{N}$, daß $x \notin A_l$. Für solches l haben wir

$$0 \leq f(x) - \sum_{k=1}^{l-1} \alpha_k \chi_{A_k}(x) < \alpha_l.$$

Sind dies unendlich viele solche $l \in \mathbb{N}$ mit $x \notin A_l$, so erhalten wir mit einem Grenzübergang und $\alpha_l \to 0$, daß

$$f(x) \leq \limsup_{l \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{l-1} \alpha_k \chi_{A_k}(x) + \alpha_l \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \chi_{A_k}(x).$$

Andernfalls wählen wir $l \in \mathbb{N}$ mit $x \notin A_l$ und $x \in A_m$ für alle $m > l$ und erhalten $\chi_{A_m}(x) = 1$ für $m > l$ und $\chi_{A_l}(x) = 0$. Da $\alpha_l \leq \sum_{k=l+1}^{\infty} \alpha_k$, gilt

$$0 \leq f(x) - \sum_{k=1}^{l-1} \alpha_k \chi_{A_k}(x) < \alpha_l \leq \sum_{k=l+1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=l}^{\infty} \alpha_k \chi_{A_k}(x),$$

also

$$f(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \chi_{A_k}(x).$$

///

Bemerkung:
Im folgenden werden wir z.B. $\alpha_k = k^{-1}$ bzw. $\alpha_k = 2^{-k}$ wählen.

□

Definition 1.6 *Wir sagen eine Eigenschaft gilt fast überall bezüglich eines Maßes μ auf X , falls die Eigenschaft für $x \in A \subseteq X$ gilt und*

$$\mu(X - A) = 0.$$

□

Satz 1.1 (Satz von Egoroff) *Es seien $f_k, f : X \to \mathbb{C}$ meßbar bezüglich einer $\sigma-$Algebra $\mathcal{A}$ auf X, μ ein Maß auf X mit $\mu(X) < \infty, \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$ und*

$$f_k \to f \quad \textit{fast überall bezüglich } \mu.$$

Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit

$$\mu(X - A) < \varepsilon,$$

$$f_k \to f \quad \textit{gleichmäßig auf } A.$$

Beweis:
Für die Mengen

$$C_{ij} := \bigcup_{k=j}^{\infty} \left[|f_k - f| > 2^{-i} \right] \in \mathcal{A}$$

gilt $C_{i,j+1} \subseteq C_{ij}$. Da $\mu(X) < \infty$, gilt mit Proposition 1.1

$$\lim_{j \to \infty} \mu(C_{ij}) = \mu(\cap_{j=1}^{\infty} C_{ij}) = 0.$$

Also existiert $j_i \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(C_{i,j_i}) < \varepsilon 2^{-i}.$$

Wir setzen $A := X - \cup_{i=1}^{\infty} C_{i,j_i}$ und sehen

$$\mu(X - A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_{i,j_i}) < \varepsilon.$$

Weiter gilt für $i \in \mathbb{N}, k \geq j_i, x \in A$

$$|f_k(x) - f(x)| \leq 2^{-i},$$

also $f_k \to f$ gleichmäßig auf A .

///

Verwandt mit der Fast-Überall-Konvergenz ist die Maßkonvergenz.

Definition 1.7 *$f_k, f : X \to \mathbb{C}$ seien meßbar bezüglich eines Maßes μ auf X . Wir sagen*

$$f_k \to f \quad \textit{im Maß bezüglich } \mu,$$

wenn

$$\mu(|f_k - f| \geq \varepsilon) \to 0 \quad \textit{für } k \to \infty \textit{ und alle } \varepsilon > 0.$$

$\square$

Folgender Zusammenhang besteht zwischen Fast-Überall-Konvergenz und Maßkonvergenz.

Proposition 1.4 *$f_k, f : X \to \mathbb{C}$ seien meßbar bezüglich eines Maßes μ auf X . Konvergiert $f_k \to f$ fast überall bezüglich μ und $\mu(X) < \infty$, so konvergiert*

$$f_k \to f \quad \text{im Maß bezüglich } \mu.$$

Konvergiert umgekehrt $f_k \to f$ im Maß bezüglich μ , so konvergiert für eine Teilfolge $k_l \to \infty$

$$f_{k_l} \to f \quad \text{fast überall bezüglich } \mu.$$

Beweis:
Da $f_k \to f$ fast überall bezüglich μ , gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\mu(\cap_{l=1}^\infty \cup_{k=l}^\infty [|f_k - f| \geq \varepsilon]) = 0.$$

Da $\mu(X) < \infty$ folgt mit Proposition 1.1 (1.7)

$$\limsup_{k\to\infty} \mu(|f_k - f| \geq \varepsilon) \leq \lim_{l\to\infty} \mu(\cup_{k=l}^\infty [|f_k - f| \geq \varepsilon]) = 0,$$

und $f_k \to f$ im Maß bezüglich μ .

//

Da $f_k \to f$ im Maß bezüglich μ , existiert für $l \in \mathbb{N}$ ein $k_l \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(|f_{k_l} - f| \geq 2^{-l}) \leq 2^{-l},$$

und weiter können wir $k_l \nearrow \infty$ annehmen. Wir setzen

$$A := \bigcup_{j=1}^\infty \bigcap_{l=j}^\infty [|f_{k_l} - f| < 2^{-l}]$$

und sehen

$$f_{k_l} \to f \quad \text{punktweise auf } A.$$

Andererseits gilt

$$\mu(X - A) \leq \mu(\cup_{l=j}^\infty [|f_{k_l} - f| \geq 2^{-l}]) \leq \sum_{l=j}^\infty \mu(|f_{k_l} - f| \geq 2^{-l}) \leq 2^{-j+1},$$

also $\mu(X - A) = 0$, und $f_{k_l} \to f$ fast überall bezüglich μ .

///

Definition 1.8 *Eine Funktion $g : X \to [-\infty, \infty], \mathbb{C}$ heißt einfach, falls*

$$g(X) \text{ endlich ist.}$$

Für eine einfache, nicht-negative, bezüglich eines Maßes μ auf X meßbare Funktion g definieren wir das Integral von g bezüglich μ

$$\int g \, \mathrm{d}\mu := \sum_{0 \leq t \leq \infty} t\mu(g = t).$$

$\square$

Proposition 1.5 *$g, h : X \to [0, \infty]$ seien einfach, nicht-negativ und meßbar bezüglich eines Maßes μ auf X . Dann gilt*

$$\int (g+h)\ \mathrm{d}\mu = \int g\ \mathrm{d}\mu + \int h\ \mathrm{d}\mu, \tag{1.11}$$

$$\int (\alpha g)\ \mathrm{d}\mu = \alpha \int g\ \mathrm{d}\mu \quad \textit{für } \alpha \geq 0, \tag{1.12}$$

und, falls $g \leq h$,

$$\int g\ \mathrm{d}\mu \leq \int h\ \mathrm{d}\mu, \tag{1.13}$$

also insbesondere

$$\int h\ \mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int g\ \mathrm{d}\mu \ \middle|\ 0 \leq g \leq h \textit{ ist einfach und } \mu - \textit{meßbar} \right\}. \tag{1.14}$$

Beweis:
Es sei $g(X) = \{\alpha_1 < \ldots < \alpha_I\} \subseteq [0, \infty], A_i := [g = \alpha_i], i = 1, \ldots, I$ und $h(X) = \{\beta_1 < \ldots < \beta_J\} \subseteq [0, \infty], B_j := [h = \beta_j], j = 1, \ldots, J$. Klarerweise gilt

$$X = \sum_{i=1}^{I} A_i = \sum_{j=1}^{J} B_j, \tag{1.15}$$

$$\int g\ \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i \mu(A_i) \quad \text{und} \quad \int h\ \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{J} \beta_j \mu(B_j). \tag{1.16}$$

Wir setzen

$$C_{ij} := A_i \cap B_j \quad i = 1, \ldots, I, j = 1, \ldots, J,$$

und sehen

$$\begin{aligned} A_i &= \sum_{j=1}^{J} C_{ij} \quad i = 1, \ldots, I, \\ B_j &= \sum_{i=1}^{I} C_{ij} \quad j = 1, \ldots, J, \\ g + h &\equiv \alpha_i + \beta_j \quad \text{auf } C_{ij}, i = 1, \ldots, I, j = 1, \ldots, J, \end{aligned} \tag{1.17}$$

insbesondere

$$[g + h = \gamma] = \sum_{\alpha_i + \beta_j = \gamma} C_{ij} \quad \text{für } 0 \leq \gamma \leq \infty.$$

Mit Proposition 1.1 (1.5), Definition 1.8 und (1.15) - (1.17) gilt

$$\int (g+h)\ \mathrm{d}\mu = \sum_{0 \leq \gamma \leq \infty} \gamma\ \mu(g + h = \gamma) = \sum_{0 \leq \gamma \leq \infty} \gamma\ \mu\Big(\sum_{\alpha_i + \beta_j = \gamma} C_{ij} \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (\alpha_i + \beta_j) \mu(C_{ij}) = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i \mu(\sum_{j=1}^{J} C_{ij}) + \sum_{j=1}^{J} \beta_j \mu(\sum_{i=1}^{I} C_{ij}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{I} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{J} \beta_j \mu(B_j) = \int g \ \mathrm{d}\mu + \int h \ \mathrm{d}\mu,$$

und (1.11) ist bewiesen.

Für $0 < \alpha < \infty$ ergibt sich mit der Definition des Integrals

$$\int (\alpha g) \ \mathrm{d}\mu = \sum_{0 \le t \le \infty} t\mu(\alpha g = t) = \alpha \sum_{0 \le t \le \infty} (t/\alpha)\mu(g = t/\alpha) =$$

$$= \alpha \sum_{0 \le s \le \infty} s\mu(g = s) = \alpha \int g \ \mathrm{d}\mu,$$

und für $\alpha = \infty$

$$\int (\infty g) \ \mathrm{d}\mu = \sum_{0 \le t \le \infty} t\mu(\infty g = t) = \infty\mu(g > 0) = \sum_{0 \le t \le \infty} \infty t\mu(g = t) =$$

$$= \infty \sum_{0 \le t \le \infty} t\mu(g = t) = \infty \int g \ \mathrm{d}\mu.$$

Für $\alpha = 0$ gilt $\int (0g) \ \mathrm{d}\mu = 0\mu(X) = 0 = 0 \int g \ \mathrm{d}\mu$, und (1.11) ist bewiesen.

Für $g \le h$ ist $h - g\chi_{[g<\infty]}$ einfach, nicht-negativ und $\mu-$meßbar mit Proposition 1.2, und es gilt $h = g + (h - g\chi_{[g<\infty]})$. Daraus folgt mit (1.11)

$$\int h \ \mathrm{d}\mu = \int g \ \mathrm{d}\mu + \int (h - g\chi_{[g<\infty]}) \ \mathrm{d}\mu \ge \int g \ \mathrm{d}\mu,$$

also (1.13).

///

Damit kommen wir zur Definition des Lebesgue-Integrals für nicht-negative, meßbare Funktionen.

Definition 1.9 *Für eine nicht-negative bezüglich eines Maßes μ auf X meßbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ definieren wir das Lebesgue-Integral von f bezüglich μ*

$$\int f \ \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int g \ \mathrm{d}\mu \ \middle| \ 0 \le g \le f \ \textit{ist einfach und} \ \mu - \textit{meßbar} \right\}.$$

Um die Integrationsvariable herauszustellen, schreiben wir

$$\int f \ \mathrm{d}\mu = \int f(x) \ \mathrm{d}\mu(x).$$

□

Bemerkungen:

1. Die Definitionen des Integrals für einfache Funktionen in den Definitionen 1.8 und 1.9 stimmen mit (1.14) überein.

2. Eine analoge Approximation mit einfachen Funktionen von oben ist nicht sinnvoll, wie das folgende Beispiel zeigt.

   Es sei $X =]0,1], \mu = \mathcal{L}^1, f(x) := 1/\sqrt{x}$. Da eine einfache Funktion g nur endlich viele Werte annimmt, gilt für $g \geq f$ und $\alpha = \max g(X) - \{\infty\} < \infty$, daß $]0, \min(1, 1/\alpha^2)[\subseteq [g = \infty]$, also $\int g \; \mathrm{d}\mathcal{L}^1 = \infty$, aber $\int f \; \mathrm{d}\mathcal{L}^1 = 2 < \infty$.

□

Einfache Eigenschaften des Lebesgue-Integrals sind in der folgenden Proposition zusammengestellt.

Proposition 1.6 $f, g : X \to [0,\infty]$ *seien nicht-negativ und meßbar bezüglich eines Maßes* μ *auf* X *. Dann gilt*

$$\int g \; \mathrm{d}\mu \leq \int f \; \mathrm{d}\mu \quad \textit{für } g \leq f, \tag{1.18}$$

$$\int (\alpha f) \; \mathrm{d}\mu = \alpha \int f \; \mathrm{d}\mu \quad \textit{für } \alpha \geq 0, \tag{1.19}$$

$$\int f \; \mathrm{d}\mu < \infty \Longrightarrow \mu(f = \infty) = 0, \tag{1.20}$$

$$\int f \; \mathrm{d}\mu = 0 \Longleftrightarrow \mu(f > 0) = 0. \tag{1.21}$$

Beweis:
(1.18) folgt direkt aus der Definition 1.9. (1.19) ist klar im Fall $0 < \alpha < \infty$, da für eine einfache, nicht-negative, $\mu-$meßbare Funktion g die Funktion αg wieder einfach, nicht-negativ, $\mu-$meßbar ist und

$$g \leq f \Longleftrightarrow \alpha g \leq \alpha f \quad \text{für } 0 < \alpha < \infty,$$
$$\int (\alpha g) \; \mathrm{d}\mu = \alpha \int g \; \mathrm{d}\mu.$$

Da $\int 0 \; \mathrm{d}\mu = 0$, folgt (1.19) für $\alpha = 0$.

Da $\infty \chi_{[f=\infty]} \leq f$, gilt mit (1.18)

$$\infty \mu(f = \infty) = \int \infty \chi_{[f=\infty]} \; \mathrm{d}\mu \leq \int f \; \mathrm{d}\mu.$$

Ist $\int f \; \mathrm{d}\mu < \infty$, so folgt

$$\mu(f = \infty) = 0$$

und (1.20).

Da $f \leq \infty \chi_{[f>0]}$, gilt mit (1.18)

$$\int f \; \mathrm{d}\mu \leq \int \infty \chi_{[f>0]} \; \mathrm{d}\mu = \infty \mu(f > 0).$$

Ist $\mu(f > 0) = 0$, so folgt

$$\int f \; \mathrm{d}\mu = 0.$$

Gilt andererseits $\int f \; \mathrm{d}\mu = 0$, so folgt mit (1.18)

$$\mu(f > 1/k)/k \leq \int f \; \mathrm{d}\mu = 0,$$

also mit Proposition 1.1 (1.6)

$$\mu(f > 0) = \mu(\cup_{k=1}^{\infty}[f > 1/k]) = \lim_{k\to\infty} \mu(f > 1/k) = 0,$$

und (1.21) ist bewiesen.

Schließlich zeigen wir (1.19) für $\alpha = \infty$. Es gilt $\infty f = \infty\chi_{[f>0]}$ und mit (1.21)

$$\int (\infty f)\ \mathrm{d}\mu = \infty\mu(f > 0) = \left\{ \begin{array}{c} \infty,\ \text{falls}\ \mu(f > 0) > 0, \\ 0,\ \text{falls}\ \mu(f > 0) = 0, \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \infty,\ \text{falls}\ \int f\ \mathrm{d}\mu > 0, \\ 0,\ \text{falls}\ \int f\ \mathrm{d}\mu = 0, \end{array} \right\} = \infty \int f\ \mathrm{d}\mu.$$

///

Die Additivität des Lebesgue-Integrals zeigen wir mit dem folgenden ersten wichtigen Konvergenzsatz.

Satz 1.2 (Satz von der monotonen Konvergenz, Satz von Beppo Levi) $f_k : X \to [0, \infty]$ *seien nicht-negativ, meßbar bezüglich eines Maßes* μ *auf* X *und*

$$f_k \le f_{k+1}.$$

Dann gilt

$$\int \lim_{k\to\infty} f_k\ \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k\ \mathrm{d}\mu.$$

Beweis:
Mit (1.18) gilt $\int f_k\ \mathrm{d}\mu \le \int f_{k+1}\ \mathrm{d}\mu$, und es existiert

$$\alpha := \lim_{k\to\infty} \int f_k\ \mathrm{d}\mu \in [0, \infty].$$

Mit Proposition 1.2 ist $f := \lim_{k\to\infty} f_k = sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$ meßbar bezüglich μ . Da $f_k \le f$, folgt $\int f_k\ \mathrm{d}\mu \le \int f\ \mathrm{d}\mu$ aus (1.18) und

$$\alpha \le \int f\ \mathrm{d}\mu.$$

Für die umgekehrte Ungleichung müssen wir mit Definition 1.9 zeigen, daß für alle einfachen, nicht-negativen, $\mu-$meßbaren $g : X \to [0, \infty]$ mit $g \le f$

$$\int g\ \mathrm{d}\mu \le \alpha. \tag{1.22}$$

Wie im Beweis von Proposition 1.5 sei $g(X) = \{\alpha_1 < \ldots < \alpha_I\} \subseteq [0, \infty], A_i := [g = \alpha_i], i = 1, \ldots, I$. Wieder gilt

$$X = \sum_{i=1}^{I} A_i \quad \text{und} \quad \int g\ \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i \mu(A_i).$$

Für $\alpha_{I-1} < m < \infty$ gilt

$$\lim_{m\to\infty} \int \min(g,m)\ \mathrm{d}\mu =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{I-1} \alpha_i \mu(A_i) + \min(\alpha_I, m)\mu(A_I) \right) = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i \mu(A_i) = \int g\ \mathrm{d}\mu,$$

und wir können o.B.d.A $a_1 < \ldots < a_I < \infty$ annehmen.

Für $0 < \tau < 1$ setzen wir

$$E_k := [f_k \geq \tau g] \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

E_k sind $\mu-$meßbar und $E_k \subseteq E_{k+1}$. Für $x \in X$ mit $g(x) > 0$ gilt $\tau g(x) < g(x) \leq f(x)$, da $g(x) < \infty$, also $x \in E_k$ für großes $k \in \mathbb{N}$. Ist $g(x) = 0$, so gilt $\tau g(x) = 0 \leq f_1(x)$ und $x \in E_1$. Zusammen folgt

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k. \tag{1.23}$$

Da $\tau \chi_{E_k} g \leq f_k$, folgt mit Proposition 1.6

$$\int f_k\ \mathrm{d}\mu \geq \int \tau \chi_{E_k} g\ \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{I} \tau \alpha_i \mu(E_k \cap A_i).$$

Da $E_k \cap A_i \subseteq E_{k+1} \cap A_i$ und $\cup_{k=1}^{\infty} (E_k \cap A_i) = A_i$ mit (1.23), erhalten wir mit Proposition 1.1 (1.6)

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \int f_k\ \mathrm{d}\mu \geq \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{I} \tau \alpha_i \mu(E_k \cap A_i) = \tau \sum_{i=1}^{I} \alpha_i \mu(A_i) = \tau \int g\ \mathrm{d}\mu.$$

Lassen wir $\tau \nearrow 1$, so folgt (1.22), und der Satz ist bewiesen.

///

Als einfache Konsequenz ergibt sich das sogenannte Lemma von Fatou.

Satz 1.3 (Lemma von Fatou) $f_k : X \to [0, \infty]$ *seien nicht-negativ, meßbar bezüglich eines Maßes* μ *auf* X *. Dann gilt*

$$\int \liminf_{k\to\infty} f_k\ \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k\ \mathrm{d}\mu.$$

Beweis:
Mit Proposition 1.2 sind $g_l := \inf_{k\geq l} f_k$ meßbar bezüglich μ und mit (1.18)

$$\int g_l\ \mathrm{d}\mu \leq \inf_{k\geq l} \int f_k\ \mathrm{d}\mu.$$

Weiter gilt $g_k \leq g_{k+1}$ und $\lim_{l\to\infty} g_l = \liminf_{k\to\infty} f_k$. Dann folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, Satz 1.2,

$$\int \liminf_{k\to\infty} f_k\ \mathrm{d}\mu = \int \lim_{l\to\infty} g_l\ \mathrm{d}\mu = \lim_{l\to\infty} \int g_l\ \mathrm{d}\mu \leq \lim_{l\to\infty} \inf_{k\geq l} \int f_k\ \mathrm{d}\mu = \liminf_{k\to\infty} \int f_k\ \mathrm{d}\mu.$$

///

Nun können wir die Additivität des Lebesgue-Integrals zeigen.

Proposition 1.7 $f_k : X \to [0,\infty]$ *seien nicht-negativ und meßbar bezüglich eines Maßes* μ *auf* X *. Dann gilt*

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k \, \mathrm{d}\mu, \tag{1.24}$$

Beweis:
Mit Proposition 1.3 existieren einfache, nicht-negative, $\mu-$meßbare Funktionen f_{kj} mit

$$f_{kj} \nearrow f_k.$$

Mit Proposition 1.5 und dem Satz von der monotonen Konvergenz, Satz 1.2, folgt

$$\int (f_k + f_l) \, \mathrm{d}\mu \leftarrow \int (f_{kj} + f_{lj}) \, \mathrm{d}\mu = \int f_{kj} \, \mathrm{d}\mu + \int f_{lj} \, \mathrm{d}\mu \to \int f_k \, \mathrm{d}\mu + \int f_l \, \mathrm{d}\mu,$$

und insbesondere

$$\int \sum_{k=1}^{K} f_k \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{K} \int f_k \, \mathrm{d}\mu.$$

Da $\sum_{k=1}^{K} f_k \nearrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, Satz 1.2,

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, \mathrm{d}\mu \leftarrow \int \sum_{k=1}^{K} f_k \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{K} \int f_k \, \mathrm{d}\mu \to \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k \, \mathrm{d}\mu.$$

///

Definition 1.10 μ *sei ein Maß auf* X *. Für* $\mu-$*meßbares* $f : X \to [-\infty,\infty]$ *definieren wir das Integral durch*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \int f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int f_- \, \mathrm{d}\mu,$$

wobei $f_+ := \max(f,0), f_- := \max(-f,0)$ *, falls diese Differenz wohldefiniert ist, d.h.*

$$\int f_+ \, \mathrm{d}\mu < \infty \quad \textit{oder} \quad \int f_- \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ *heißt integrierbar bezüglich eines Maßes* μ *auf* X *, kurz* $\mu-$*integrierbar, falls* f *meßbar bezüglich* μ *ist und*

$$\int |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty,$$

und wir definieren das Lebesgue-Integral durch

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \int Re(f) \, \mathrm{d}\mu + i \int Im(f) \, \mathrm{d}\mu.$$

Weiter setzen wir für $\mu-$*meßbares* $A \subseteq X$

$$\int\limits_A f \; \mathrm{d}\mu := \int \chi_A f \; \mathrm{d}\mu.$$

falls das Integral auf der rechten Seite definiert ist.

Falls für ein $f : A \to [-\infty, \infty], \mathbb{C}$ *mit* $\mu(X - A) = 0$ *eine Fortsetzung* $\hat{f}$ *auf ganz* X *existiert, für die das Integral* $\int \hat{f} \; \mathrm{d}\mu$ *definiert ist, so setzen wir*

$$\int f \; \mathrm{d}\mu := \int \hat{f} \; \mathrm{d}\mu.$$

Da Nullmengen $\mu-$*meßbar sind und mit (1.21), ist in diesem Fall für alle Fortsetzungen von* f *auf* X *das Integral definiert und unabhängig von der Fortsetzung.*

□

Bemerkung:
Da $0 \leq Re(f)_+, Re(f)_-, Im(f)_+, Im(f)_- \leq |f|$, ist für $\mu-$integrierbares f

$$0 \leq \int Re(f)_+ \; \mathrm{d}\mu, \int Re(f)_- \; \mathrm{d}\mu, \int Im(f)_+ \; \mathrm{d}\mu, \int Im(f)_- \; \mathrm{d}\mu \leq \int |f| \; \mathrm{d}\mu < \infty,$$

und $\int f \; \mathrm{d}\mu$ ist wohldefiniert.

□

Einfache Eigenschaften des Lebesgue-Integrals sind in den folgenden Propositionen zusammengestellt.

Proposition 1.8 $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ *seien meßbar bezüglich eines Maßes* μ *auf* X *, und die Integrale bezüglich* μ *seien definiert. Dann gilt*

$$\int g \; \mathrm{d}\mu \leq \int f \; \mathrm{d}\mu \quad \text{für } g \leq f, \tag{1.25}$$

$$\int (\alpha f) \; \mathrm{d}\mu = \alpha \int f \; \mathrm{d}\mu \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}, \tag{1.26}$$

$$\int (f + g) \; \mathrm{d}\mu = \int f \; \mathrm{d}\mu + \int g \; \mathrm{d}\mu, \tag{1.27}$$

falls die Summe der Integrale definiert ist.

Beweis:
Aus $g \leq f$ folgt $g_+ \leq f_+$ und $f_- \leq g_-$ und mit (1.18)

$$\int g \; \mathrm{d}\mu = \int g_+ \; \mathrm{d}\mu - \int g_- \; \mathrm{d}\mu \leq \int f_+ \; \mathrm{d}\mu - \int f_- \; \mathrm{d}\mu = \int f \; \mathrm{d}\mu.$$

Für $\alpha \geq 0$ gilt $(\alpha f)_+ = \alpha f_+, (\alpha f)_- = \alpha f_-$ und mit Proposition 1.7

$$\int (\alpha f) \; \mathrm{d}\mu = \alpha \int f_+ \; \mathrm{d}\mu - \alpha \int f_- \; \mathrm{d}\mu = \alpha \int f \; \mathrm{d}\mu.$$

Weiter gilt $(-f)_+ = f_-, (-f)_- = f_+$ und

$$\int (-f) \; \mathrm{d}\mu = \int f_- \; \mathrm{d}\mu - \int f_+ \; \mathrm{d}\mu = -\int f \; \mathrm{d}\mu.$$

Zusammen folgt (1.26).

Nun sei die Summe $\int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu$ definiert, d.h.

$$(\int f \, \mathrm{d}\mu, \int g \, \mathrm{d}\mu) \neq (\pm\infty, \mp\infty).$$

Wegen der Homogenität können wir o.B.d.A.

$$\int f \, \mathrm{d}\mu, \int g \, \mathrm{d}\mu > -\infty$$

also

$$\int f_- \, \mathrm{d}\mu, \int g_- \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

annehmen. Mit (1.20) folgt

$$f, g > -\infty, f_-, g_- < \infty \quad \text{fast überall bezüglich } \mu.$$

Damit ist $h := f + g > -\infty$ fast überall bezüglich μ definiert und $h_- < \infty$ und

$$h_+ - h_- = h = f + g = f_+ - f_- + g_+ - g_- \quad \text{fast überall bezüglich } \mu.$$

Daraus folgt

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+ \quad \text{fast überall bezüglich } \mu$$

und

$$h_- \leq f_- + g_- \quad \text{fast überall bezüglich } \mu.$$

Mit Proposition 1.7 und (1.18) folgt

$$\int h_- \leq \int f_- \, \mathrm{d}\mu + \int g_- \, \mathrm{d}\mu < \infty,$$

und das Integral $\int h \, \mathrm{d}\mu$ ist definiert. Weiter folgt mit Proposition 1.7

$$\int h_+ \, \mathrm{d}\mu + \int f_- \, \mathrm{d}\mu + \int g_- \, \mathrm{d}\mu = \int h_- \, \mathrm{d}\mu + \int f_+ \, \mathrm{d}\mu + \int g_+ \, \mathrm{d}\mu,$$

also, da die Integrale $\int (f, g, h)_- \, \mathrm{d}\mu$ endlich sind,

$$\int (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int h \, \mathrm{d}\mu = \int h_+ \, \mathrm{d}\mu - \int h_- \, \mathrm{d}\mu =$$

$$= \int f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int f_- \, \mathrm{d}\mu + \int g_+ \, \mathrm{d}\mu - \int g_- \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu.$$

///

Proposition 1.9 *Die Menge der bezüglich eines Maßes μ auf X integrierbaren Funktionen bilden einen komplexen Vektorraum, und die Abbildung*

$$f \mapsto \int f \, \mathrm{d}\mu$$

ist ein lineares Funktional. Weiter gilt

$$\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu,$$

und die Abbildung

$$f \mapsto \int |f| \,\mathrm{d}\mu \tag{1.28}$$

ist eine Pseudo-Norm. Dabei verschwindet die Pseudo-Norm von f *genau dann, wenn*

$$f = 0 \quad \textit{fast überall bezüglich } \mu.$$

Beweis:
Es seien f, g integrierbar bezüglich μ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Da $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha| \; |f| + |\beta| \; |g|$, erhalten wir mit Proposition 1.6

$$\int |\alpha f + \beta g| \,\mathrm{d}\mu \leq |\alpha| \int |f| \,\mathrm{d}\mu + |\beta| \int |g| \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Damit ist $\alpha f + \beta g$ ist wieder $\mu-$integrierbar, und der Raum der $\mu-$integrierbaren Funktionen ein komplexer Vektorraum.

Da $Re(f+g) = Re(f) + Re(g), Im(f+g) = Im(f) + Im(g)$ folgt mit Proposition 1.8

$$\int (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int Re(f+g) \,\mathrm{d}\mu + i \int Im(f+g) \,\mathrm{d}\mu =$$

$$= \int Re(f) \,\mathrm{d}\mu + \int Re(g) \,\mathrm{d}\mu + i \int Im(f) \,\mathrm{d}\mu + i \int Im(g) \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu,$$

und das Integral ist additiv.

//

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $Re(\alpha f) = \alpha Re(f), Im(\alpha f) = \alpha Im(f)$ und mit Proposition 1.8

$$\int (\alpha f) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int Re(f) \,\mathrm{d}\mu + i\alpha \int Im(f) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Weiter gilt $Re(if) = -Im(f), Im(if) = Re(f)$ und

$$\int (if) \,\mathrm{d}\mu = \int -Im(f) \,\mathrm{d}\mu + i \int Re(f) \,\mathrm{d}\mu = i \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Zusammen gilt für komplexwertiges f und $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\int (\alpha f) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu,$$

und das Integral ist komplex linear.

Zum Beweis der Betragsungleichung setzen wir $z := \int f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{C}$ und wählen $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ und $\alpha z = |z|$. Dann gilt $Re(\alpha f) \leq |\alpha f| = |f|$ und

$$\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu = \int \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \int Re(\alpha f) \,\mathrm{d}\mu \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

Da $\int |f| \, \mathrm{d}\mu \geq 0, \int |\alpha f| \, \mathrm{d}\mu = |\alpha| \int |f| \, \mathrm{d}\mu$ und

$$\int |f+g| \, \mathrm{d}\mu \leq \int (|f| + |g|) \, \mathrm{d}\mu = \int |f| \, \mathrm{d}\mu + \int |g| \, \mathrm{d}\mu,$$

ist die Abbildung $f \mapsto \int |f| \, \mathrm{d}\mu$ eine Pseudo-Norm. Mit (1.21) gilt

$$\int |f| \, \mathrm{d}\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \text{ fast überall bezüglich } \mu.$$

///

Bemerkung:
Das Lebesgue-Integral bezüglich des eindimensionalen Lebesgue-Maßes $\mathcal{L}^1$ auf $[0,1]$ und das Regel-Integral stimmen auf Regelfunktionen, insbesondere auf stetigen Funktionen, überein, d.h. jede Regelfunktion $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ ist integriebar bezüglich $\mathcal{L}^1$ mit

$$\int\limits_{[0,1]} f \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 = \int\limits_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Zuerst gilt für $\varphi = \chi_{[a,b[}$ mit $0 \leq a \leq b \leq 1$

$$\int\limits_{[0,1]} \varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1([a,b[) = b - a = \int\limits_0^1 \varphi(t) \, \mathrm{d}t,$$

und das Lebesgue-Integral bezüglich $\mathcal{L}^1$ und das Regel-Integral stimmen auf Treppenfunktionen überein. Für eine Regelfunktion $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ existiert per Definition eine Folge von Treppenfunktionen $\varphi_k \to f$ gleichmäßig auf $[0,1]$. Mit Proposition 1.2 ist f meßbar bezüglich $\mathcal{L}^1$. Weiter folgt mit dem Lemma von Fatou, Satz 1.3,

$$\int\limits_{[0,1]} |f| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 \leq \liminf_{k \to \infty} \int\limits_{[0,1]} |\varphi_k| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 = \liminf_{k \to \infty} \int\limits_0^1 |\varphi_k(t)| \, \mathrm{d}t = \int\limits_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty,$$

da $|\varphi_k| \to |f|$ gleichmäßig auf $[0,1]$ und $|f|$ somit eine Regelfunktion ist. Wir schließen, daß f integriebar bezüglich $\mathcal{L}^1$ ist, und erhalten mit Proposition 1.9

$$\left| \int\limits_{[0,1]} f \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 - \int\limits_{[0,1]} \varphi_k \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 \right| \leq \int\limits_{[0,1]} |f - \varphi_k| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 \leq \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - \varphi_k(t)| \to 0.$$

Dies ergibt

$$\int\limits_{[0,1]} f \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 \leftarrow \int\limits_{[0,1]} \varphi_k \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 = \int\limits_0^1 \varphi_k(t) \, \mathrm{d}t \to \int\limits_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t.$$

□

Definition 1.11 *Für ein Maß* μ *auf* X *und* $T : X \to Y$ *definieren wir das Bildmaß* $T_*\mu$ *von* μ *unter* T *durch*

$$(T_*\mu)(S) := \mu(T^{-1}(S)) \text{ für } S \subseteq Y.$$

□

Proposition 1.10 $T_*\mu$ *ist ein Maß auf* Y *, und die* $\sigma-$*Algebra* $\mathcal{A} := \{A \subseteq Y \mid T^{-1}(A) \in \mathcal{A}_\mu \}$ *enthält nur* $T_*\mu-$*meßbare Mengen, d.h.* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{T_*\mu}$ *. Weiter gilt*

$$\int f \ \mathrm{d}(T_*\mu) = \int (f \circ T) \ \mathrm{d}\mu \qquad (1.29)$$

für alle $\mathcal{A}-$*meßbaren* $f : Y \to [0, \infty]$ *bzw.* $\mathcal{A}-$*meßbaren,* $T_*\mu-$*integrierbaren* $f : Y \to \mathbb{C}$ *, und im zweiten Fall ist* $f \circ T$ *integrierbar bezüglich* μ *.*

Ist μ *endlich und regulär, d.h. zu jedem* $Z \subseteq X$ *existiert ein* $\mu-$*meßbares* $C \supseteq Z$ *mit* $\mu(C) = \mu(Z)$ *, so gilt* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{T_*\mu}$ *.*

Beweis:
Klarerweise gilt $(T_*\mu)(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Für $S \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} S_k \subseteq Y$ gilt $T^{-1}(S) \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} T^{-1}(S_k)$

$$(T_*\mu)(S) = \mu(T^{-1}(S)) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(T^{-1}(S_k)) \le \sum_{k=1}^{\infty} (T_*\mu)(S_k),$$

und $T_*\mu$ ist ein Maß auf Y .

Für $A \in \mathcal{A}$ ist $T^{-1}(A)$ meßbar bezüglich μ , also gilt für $S \subseteq Y$

$$(T_*\mu)(S) = \mu(T^{-1}(S)) = \mu(T^{-1}(S) \cap T^{-1}(A)) + \mu(T^{-1}(S) - T^{-1}(A)) =$$

$$= \mu(T^{-1}(S \cap A)) + \mu(T^{-1}(S - A)) = (T_*\mu)(S \cap A) + (T_*\mu)(S - A),$$

und A ist $T_*\mu-$meßbar.

Per Definition gilt (1.29) für $f = \chi_A$ mit $A \in \mathcal{A}$, also mit Proposition 1.3 und dem Satz von der monotonen Konvergenz, Satz 1.2, für alle $\mathcal{A}-$meßbaren $f : X \to [0, \infty]$. $\mathcal{A}-$meßbares, $T_*\mu-$integrierbares $f : Y \to \mathbb{C}$ schreiben wir in der Form $f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4)$ mit nicht-negativen, $\mathcal{A}-$meßbaren $f_j, j = 1, \ldots, 4$. Damit gilt $\int f_j \ \mathrm{d}(T_*\mu) = \int (f_j \circ T) \ \mathrm{d}\mu \in [0, \infty[$, also ist $f \circ T = (f_1 \circ T - f_2 \circ T) + i(f_3 \circ T - f_4 \circ T)$ integrierbar bezüglich μ und

$$\int f \ \mathrm{d}(T_*\mu) = \int f_1 \ \mathrm{d}(T_*\mu) - \int f_2 \ \mathrm{d}(T_*\mu) + i\Big(\int f_3 \ \mathrm{d}(T_*\mu) - \int f_4 \ \mathrm{d}(T_*\mu)\Big) =$$

$$= \int f_1 \circ T \ \mathrm{d}\mu - \int f_2 \circ T \ \mathrm{d}\mu + i\Big(\int f_3 \circ T \ \mathrm{d}\mu - \int f_4 \circ T \ \mathrm{d}\mu\Big) = \int f \circ T \ \mathrm{d}\mu.$$

Schließlich sei μ endlich und regulär. Für $A \in \mathcal{A}_{T_*\mu}$ müssen wir $B := T^{-1}(A) \in \mathcal{A}_\mu$ zeigen. Wir sehen

$$\mu(B) + \mu(X - B) = (T_*\mu)(A) + (T_*\mu)(Y - A) = (T_*\mu)(Y) = \mu(X).$$

Da μ regulär ist, existiert zu jedem $Z \subseteq X$ eine $\mu-$meßbare Menge $C \supseteq Z$ mit $\mu(C) = \mu(Z)$. Damit rechnen wir

$$\mu(C) + \mu(X - C) = \mu(X) = \mu(B) + \mu(X - B) =$$

$$= \mu(B \cap C) + \mu(B - C) + \mu(C - B) + \mu(X - (B \cup C)) \geq$$

$$\geq \mu(C \cap B) + \mu(C - B) + \mu(X - C).$$

Da μ endlich ist, erhalten wir

$$\mu(Z) = \mu(C) \geq \mu(C \cap B) + \mu(C - B) \geq \mu(Z \cap B) + \mu(Z - B),$$

und $B = T^{-1}(A)$ ist $\mu-$meßbar.

///

Folgende Proposition ist nützlich.

Proposition 1.11 *μ sei ein Maß auf X , das $\sigma-$endlich bezüglich einer $\sigma-$Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$ ist. Weiter sei f meßbar bezüglich $\mathcal{A}$, integrierbar bezüglich μ und $S \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen. Es gelte*

$$\mu(A)^{-1} \int_A f \, \mathrm{d}\mu \in S \quad \forall A \in \mathcal{A}, 0 < \mu(A) < \infty. \tag{1.30}$$

Dann gilt $f(x) \in S$ für $\mu -$ fast alle $x \in X$, d.h.

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) \notin S \}) = 0.$$

Beweis:
Es seien $X_k \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X_k) < \infty$ und $\cup_{k=1}^{\infty} X_k = X$. Da $\mathbb{C} - S$ als eine abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Bällen geschrieben werden kann, genügt es für $\overline{B_\varrho(z)} \cap S = \emptyset, A := f^{-1}(\overline{B_\varrho(z)})$ zu zeigen, daß

$$\mu(A \cap X_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.31}$$

Angenommen $\mu(A \cap X_k) > 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt $A_k := A \cap X_k \in \mathcal{A}$ und $0 < \mu(A_k) < \infty$. Mit (1.30) folgt

$$w := \mu(A_k)^{-1} \int_{A_k} f \, \mathrm{d}\mu \in S.$$

Andererseits gilt

$$|w - z| \leq \mu(A_k)^{-1} \int_{A_k} |f - z| \, \mathrm{d}\mu \leq \varrho,$$

also $w \in \overline{B_\varrho(z)}$, im Widerspruch zu $S \cap \overline{B_\varrho(z)} = \emptyset$. Daraus folgt (1.31), und die Proposition bewiesen.

///

2 L^p-Räume

Definition 2.1 *Für* $f : X \to [-\infty,\infty], \mathbb{C}$ *meßbar bezüglich eines Maßes* μ *auf* X *setzen wir für* $1 \le p < \infty$

$$\| f \|_{L^p(\mu)} := \left(\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}.$$

Wir setzen

$$\| f \|_{L^\infty(\mu)} := \inf\{0 \le \lambda \le \infty \mid [|f| > \lambda] \textit{ ist eine lokale } \mu - \textit{Nullmenge }\}.$$

Für $f : X \to [-\infty,\infty]$ *meßbar bezüglich eines Maßes* μ *auf* X *definieren wir das essentielle Supremum*

$$\operatorname{ess\,sup} f := \inf\{-\infty \le \lambda \le \infty \mid [f > \lambda] \textit{ ist eine lokale } \mu - \textit{Nullmenge }\}$$

und das essentielle Infimum

$$\operatorname{ess\,inf} f := \sup\{-\infty \le \lambda \le \infty \mid [f < \lambda] \textit{ ist eine lokale } \mu - \textit{Nullmenge }\}.$$

□

Bemerkungen:

1. Für ein $\sigma-$endliches Maß μ stimmen die lokalen $\mu-$Nullmengen mit den $\mu-$Nullmengen überein.
2. Da die abzählbare Vereinigung von lokalen $\mu-$Nullmengen wieder ein lokale $\mu-$Nullmenge ist, sind für $\mu-$meßbares $f : X \to [-\infty,\infty]$ die Mengen $[f > \operatorname{ess\,sup} f], [f < \operatorname{ess\,inf} f]$ und $[|f| > \| f \|_{L^\infty(\mu)}]$ lokale $\mu-$Nullmengen.

□

Wir beginnen mit dem Beweis einiger wichtiger Ungleichungen.

Satz 2.1 (Jensen-Ungleichung) *Es sei* $\Phi :]a,b[\to \mathbb{R}, -\infty \le a < b \le \infty,$ *konvex und* $f : X \to]a,b[$ *sei integrierbar bezüglich eines Maßes* μ *auf* X *mit* $\mu(X) = 1$ *. Dann gilt* $\int (\Phi \circ f)_- \, \mathrm{d}\mu < \infty$ *und*

$$\Phi\Big(\int f \, \mathrm{d}\mu \Big) \le \int (\Phi \circ f) \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis:
Da reelle konvexe Funktionen stetig sind, ist $\Phi \circ f$ mit Proposition 1.2 auch $\mu-$meßbar.

Wir setzen $t := \int f \, \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$ und behaupten

$$a < t < b. \tag{2.1}$$

Es genügt $t < b$ zu zeigen. Wenn $b = \infty$, so gilt dies trivial. Ist $b < \infty$, so ist $b - f > 0$ nicht-negativ und $\mu(b - f > 0) = \mu(X) = 1 > 0$. Mit (1.21) folgt

$$\int (b - f) \, \mathrm{d}\mu > 0,$$

also $t = \int f \, \mathrm{d}\mu < b$. Da Φ konvex ist, existiert $\alpha \in \partial\Phi(t) \neq \emptyset$ im Subgradienten von Φ an der Stelle t, d.h.

$$\Phi(s) \geq \Phi(t) + \alpha(s - t) \quad \forall s \in]a, b[.$$

Daraus folgt

$$\Phi \circ f \geq \Phi(t) + \alpha(f - t) \quad \text{auf } X.$$

Da f integrierbar bezüglich μ ist, folgt mit (1.18) $\int (\Phi \circ f)_- \, \mathrm{d}\mu < \infty$, und $\int \Phi \circ f \, \mathrm{d}\mu \in]-\infty, \infty]$ ist definiert. Weiter folgt mit Proposition 1.8

$$\int \Phi \circ f \, \mathrm{d}\mu \geq \Phi(t) + \alpha\Big(\int f \, \mathrm{d}\mu - t\Big) = \Phi\Big(\int f \, \mathrm{d}\mu\Big),$$

da $t = \int f \, \mathrm{d}\mu$.

///

Satz 2.2 (Hölder-Ungleichung) *Für* $f, g : X \to [0, \infty]$ *meßbar bezüglich eines Maßes* μ *auf* X *und* $1 \leq p, q \leq \infty$ *mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$1/\infty := 0$ *, gilt*

$$\| fg \|_{L^1(\mu)} \leq \| f \|_{L^p(\mu)} \| g \|_{L^q(\mu)}, \tag{2.2}$$

wobei wir im Fall $p = 1$ *bzw.* $q = 1$ *annehmen, daß* $\| f \|_{L^1(\mu)} < \infty$ *bzw.* $\| g \|_{L^1(\mu)} < \infty$.

Beweis:
Für $p = 1, q = \infty$ betrachten wir ein f mit $\| f \|_{L^1(\mu)} < \infty$ und ein $0 \leq \lambda \leq \infty$ mit $[g > \lambda]$ eine lokale $\mu-$Nullmenge. Dann gilt $\mu(|f| > 1/k) \leq k \int |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$, also $\mu([|f| > 1/k] \cap [g > \lambda]) = 0$ und $\mu([f \neq 0] \cap [g > \lambda]) = 0$. Dies ergibt

$$0 \leq fg \leq \lambda f \quad \text{fast überall bezüglich } \mu$$

und mit Proposition 1.6 folgt

$$\| fg \|_{L^1(\mu)} = \int |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq \int |\lambda f| \, \mathrm{d}\mu = \lambda \| f \|_{L^1(\mu)} .$$

Bilden wir das Infimum über solche λ , so folgt (2.2). Der Fall $p = \infty, q = 1$ folgt aus Symmetrie.

Daher nehmen wir $1 < p, q < \infty$ an. Ist $\| f \|_{L^p(\mu)} = 0$, so gilt $f = 0$, also auch $fg = 0$ fast überall bezüglich μ . Daraus folgt

$$\| fg \|_{L^1(\mu)} = 0$$

und somit (2.2). Ist $\| f \|_{L^p(\mu)} > 0, \| g \|_{L^q(\mu)} = \infty$, so gilt

$$\| f \|_{L^p(\mu)} \| g \|_{L^q(\mu)} = \infty,$$

und (2.2) ist erfüllt. Daher können wir $0 < \| f \|_{L^p(\mu)}, \| g \|_{L^q(\mu)} < \infty$ und weiter, da die Aussage homogen in f, g ist,

$$\| f \|_{L^p(\mu)} = \| g \|_{L^q(\mu)} = 1$$

annehmen.

Für $\mu-$fast alle $x \in X$ gilt $0 \leq f(x), g(x) < \infty$. Ist darüberhinaus $f(x), g(x) > 0$, so wählen wir $t := p \log(f(x)), s := q \log(g(x))$ und sehen, da $\exp$ konvex ist,

$$f(x)g(x) = \exp(p^{-1}t + q^{-1}s) \leq p^{-1}e^t + q^{-1}e^s = p^{-1}f(x)^p + q^{-1}g(x)^q.$$

Für $f(x)g(x) = 0$ gilt dies trivial, und es folgt

$$\| fg \|_{L^1(\mu)} = \int fg \, \mathrm{d}\mu \leq p^{-1} \int f^p \, \mathrm{d}\mu + q^{-1} \int g^q \, \mathrm{d}\mu =$$

$$= p^{-1} \| f \|^p_{L^p(\mu)} + q^{-1} \| g \|^q_{L^q(\mu)} = 1 = \| f \|_{L^p(\mu)} \| g \|_{L^q(\mu)},$$

also (2.2).

///

Satz 2.3 (Minkowski-Ungleichung) *Für* $f, g : X \to [0, \infty]$ *meßbar bezüglich eines Maßes* μ *auf* X *und* $1 \leq p \leq \infty$ *gilt*

$$\| f + g \|_{L^p(\mu)} \leq \| f \|_{L^p(\mu)} + \| g \|_{L^p(\mu)} . \tag{2.3}$$

Beweis:
Für $1 < p < \infty$ gilt

$$(f + g)^p = f(f + g)^{p-1} + g(f + g)^{p-1}.$$

Mit der Hölder-Ungleichung, Satz 2.2 gilt für $q = p/(p - 1)$

$$\int f(f + g)^{p-1} \, \mathrm{d}\mu \leq \Big(\int f^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} \Big(\int (f + g)^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^{(p-1)/p} = \| f \|_{L^p(\mu)} \| f + g \|^{p-1}_{L^p(\mu)} .$$

Mit der entsprechenden Abschätzung für den zweiten Term folgt

$$\| f + g \|^p_{L^p(\mu)} \leq \Big(\| f \|_{L^p(\mu)} + \| g \|_{L^p(\mu)} \Big) \| f + g \|^{p-1}_{L^p(\mu)} . \tag{2.4}$$

Klarweise genügt es, (2.3) für $\| f + g \|_{L^p(\mu)} > 0$ und $\| f \|_{L^p(\mu)} + \| g \|_{L^p(\mu)} < \infty$ zu zeigen. Aus der Konvexität der Funktion $t \mapsto t^p, t \geq 0,$ sehen wir

$$\Big(\frac{f + g}{2}\Big)^p \leq \frac{1}{2}(f^p + g^p)$$

und

$$\| f + g \|^p_{L^p(\mu)} \leq 2^{p-1} \Big(\| f \|^p_{L^p(\mu)} + \| g \|^p_{L^p(\mu)} \Big) < \infty.$$

Daher können wir in (2.4) durch $\| f + g \|^{p-1}_{L^p(\mu)}$ dividieren und erhalten (2.3).

Für $p = \infty$ und $0 \leq \lambda', \lambda'' \leq \infty$, für die $[f > \lambda'], [g > \lambda'']$ lokale $\mu-$Nullmengen sind, ist

$$[f + g > \lambda' + \lambda''] \subseteq [f > \lambda'] \cup [g > \lambda'']$$

wieder eine lokale $\mu-$Nullmenge, also

$$\| f + g \|_{L^\infty(\mu)} \leq \lambda' + \lambda''.$$

Bilden wir das Infimum über solche λ', λ'' , so folgt (2.3).

Für $p = 1$ gilt (2.3) trivial, da das Integral additiv ist.

$///$

Definition 2.2 *Für ein Maß* μ *auf* $X, 1 \leq p \leq \infty$ *definieren wir den Quotientenraum*

$$L^p(\mu) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \ \textit{ist}\ \mu - \textit{meßbar und} \ \| f \|_{L^p(\mu)} < \infty \}/ \sim$$

bezüglich der Relation

$$f \sim g :\Longleftrightarrow [f \neq g] \ \textit{lokale}\ \mu - \textit{Nullmenge},$$

insbesondere

$$f \sim g :\Longleftrightarrow f = g \ \textit{fast überall bezüglich}\ \mu \ \textit{für}\ 1 \leq p < \infty,$$

und versehen diesen mit der Norm

$$\| [f] \|_{L^p(\mu)} := \| f \|_{L^p(\mu)} .$$

$f : X \to \mathbb{C}$ *meßbar bezüglich* μ *und* $\| f \|_{L^p(\mu)} < \infty$ *identifizieren wir mit seiner Restklasse und schreiben kurz* $f \in L^p(\mu)$ *.*

Falls für ein $f : A \to \mathbb{C}$ *mit* $\mu(X - A) = 0$ *eine Fortsetzung* $\hat{f} \in L^p(\mu)$ *auf ganz* X *existiert, so betrachten wir* f *als das durch die Restklasse der Fortsetzung* $\hat{f}$ *definierte Element von* $L^p(\mu)$ *. Da Nullmengen* $\mu-$*meßbar sind und mit (1.21), sind in diesem Fall alle Fortsetzungen von* f *auf* X *in* $L^p(\mu)$ *, und die Restklasse ist unabhängig von der Fortsetzung.*

Für eine $\sigma-$*Algebra* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$ *schreiben wir*

$$L^p_{\mathcal{A}}(\mu) := \{f \in L^p(\mu) \mid f \ \textit{ist meßbar bezüglich}\ \mathcal{A} \}.$$

$\square$

Satz 2.4 (Satz von Riesz-Fischer) $L^p(\mu)$ *ist ein Banachraum.*

Beweis:
Mit (1.21) gilt für $f \sim g$ meßbar bezüglich μ und $1 \leq p < \infty$, daß

$$\| f \|_{L^p(\mu)} = \| g \|_{L^p(\mu)} .$$

Für $p = \infty, f \sim g$ und $0 \leq \lambda \leq \infty$ für das $[|f| > \lambda]$ eine lokale $\mu-$Nullmenge ist, ist

$$[|g| > \lambda] \subseteq [|f| > \lambda] \cup [f \neq g]$$

wieder eine lokale $\mu-$Nullmenge, also

$$\| f \|_{L^\infty(\mu)} = \| g \|_{L^\infty(\mu)} .$$

Zusammen ist $\| [f] \|_{L^p(\mu)}$ wohldefiniert.

Klarerweise gilt $\| f \|_{L^p(\mu)} \in [0, \infty]$ und

$$\| f \|_{L^p(\mu)} = 0 \Leftrightarrow [f \neq 0] \text{ ist eine lokale } \mu - \text{Nullmenge} \ , \| f \|_{L^p(\mu)} < \infty \Leftrightarrow f \sim 0.$$

Für $f \in L^p(\mu), \alpha \in \mathbb{C}$ gilt für $1 \leq p < \infty$

$$\| \alpha f \|_{L^p(\mu)} = \left(\int |\alpha f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} = |\alpha| \, \| f \|_{L^p(\mu)} .$$

Für $p = \infty, \alpha \neq 0$ und $0 \leq \lambda \leq \infty$, für das $[|f| > \lambda]$ eine lokale $\mu-$Nullmenge ist, ist

$$[|\alpha f| > |\alpha| \lambda] = [|f| > \lambda]$$

wieder eine lokale $\mu-$Nullmenge, also

$$\| \alpha f \|_{L^\infty(\mu)} = |\alpha| \, \| f \|_{L^\infty(\mu)} < \infty.$$

Für $\alpha = 0$ gilt dies trivial. Insbesondere gilt $\alpha f \in L^p(\mu)$.

Für $f, g \in L^p(\mu)$ gilt mit der Minkowski-Ungleichung, Satz 2.3,

$$\| f + g \|_{L^p(\mu)} \leq \| \, |f| + |g| \, \|_{L^p(\mu)} \leq \| f \|_{L^p(\mu)} + \| g \|_{L^p(\mu)} < \infty,$$

insbesondere gilt $f + g \in L^p(\mu)$.

Zusammen ist $L^p(\mu)$ ein Vektorraum, und $\| \, . \, \|_{L^p(\mu)}$ eine Norm.

Wir zeigen die Vollständigkeit von $L^p(\mu)$. Dazu sei $f_k \in L^p(\mu)$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\mu)$, d.h.

$$\lim_{k,l \to \infty} \| f_k - f_l \|_{L^p(\mu)} = 0.$$

Es genügt zu zeigen, daß eine Teilfolge konvergiert. Daher können wir o.B.d.A.

$$\| f_k - f_{k+1} \|_{L^p(\mu)} \leq 2^{-k}$$

annehmen. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, Satz 1.2, und der Minkowski-Ungleichung, Satz 2.3, folgt für $1 \leq p < \infty$

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k - f_{k+1}| \right\|_{L^p(\mu)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \| f_k - f_{k+1} \|_{L^p(\mu)} < \infty. \tag{2.5}$$

Für $p = \infty, \varepsilon > 0$ setzen wir

$$\lambda_k := \| f_k - f_{k+1} \|_{L^p(\mu)} + \varepsilon 2^{-k}$$

und sehen, daß

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} |f_k - f_{k+1}| > \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \right] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[|f_k - f_{k+1}| > \lambda_k \right]$$

als $\mu-$meßbare Teilmenge einer abzählbaren Vereinigung von lokalen $\mu-$Nullmengen wieder eine lokale $\mu-$Nullmenge ist. Daraus folgt

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k - f_{k+1}| \right\|_{L^\infty(\mu)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \| f_k - f_{k+1} \|_{L^\infty(\mu)},$$

also wieder (2.5).

Wir setzen

$$A := \Big[\sum_{k=1}^{\infty} |f_k - f_{k+1}| < \infty \Big]$$

und sehen mit (1.20) für $1 \leq p < \infty$, daß $\mu(X - A) = 0$, bzw. für $p = \infty$ per Definition, daß $X - A$ eine lokale $\mu-$Nullmenge ist. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(f_{k+1} - f_k)$ konvergiert absolut auf A . Somit existiert

$$f := \lim_{k\to\infty} \chi_A f_k = \chi_A f_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_A (f_{k+1} - f_k) \quad \text{überall auf } X. \tag{2.6}$$

f ist $\mu-$meßbar und

$$|f| \leq |f_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{k+1} - f_k|,$$

also $f \in L^p(\mu)$ mit (2.5). Weiter folgt wie in (2.5)

$$\| f_k - f \|_{L^p(\mu)} = \left\| \sum_{l=k}^{\infty} (f_l - f_{l+1}) \right\|_{L^p(\mu)} \leq \sum_{l=k}^{\infty} \| f_l - f_{l+1} \|_{L^p(\mu)} \leq 2^{-k+1}.$$

Daraus folgt $f_k \to f$ in $L^p(\mu)$, und $L^p(\mu)$ ist ein Banachraum.

///

Bemerkung:
Für $f_k \to f$ in $L^p(\mu)$ ist f_k eine Cauchy-Folge und mit (2.6) existiert eine Teilfolge $k_l \to \infty$ mit

$$f_{k_l} \to f \text{ punktweise } \mu - \text{fast überall, wenn } 1 \leq p < \infty, \tag{2.7}$$

und

$$f_{k_l} \to f \text{ punktweise außerhalb einer lokalen } \mu - \text{Nullmenge, wenn } p = \infty.$$

□

Für $p = 2$ erhalten wir die folgende Proposition.

Proposition 2.1 $L^2(\mu)$ *ist mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g \rangle := \int f \bar{g} \, \mathrm{d}\mu \quad \textit{für } f, g \in L^2(\mu)$$

ein Hilbertraum.

Beweis:
Für $f, g \in L^2(\mu)$ gilt mit der Hölder-Ungleichung, Satz 2.2,

$$\int |f\bar{g}| \, \mathrm{d}\mu \leq \| f \|_{L^2(\mu)} \| g \|_{L^2(\mu)} < \infty,$$

also ist $f\bar{g}$ integrierbar bezüglich μ , und $\langle ., . \rangle$ ist wohldefiniert. Klarerweise ist $\langle ., . \rangle$ linear bzw. konjugiert-linear im ersten bzw. zweiten Argument. Weiter gilt

$$\langle f, f \rangle = \int f \bar{f} \, \mathrm{d}\mu = \| f \|_{L^2(\mu)}^2 \geq 0,$$

und Gleichheit impliziert $f = 0$ fast überall bezüglich μ , also $f \sim 0$.

Damit ist $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt auf $L^2(\mu)$, und $\| \, . \, \|_{L^2(\mu)}$ die induzierte Norm. Mit Satz 2.4 ist $L^2(\mu)$ vollständig, also ein Hilbertraum.

///

Nun kommen wir zu einem der wichtigsten Konvergenzsätze, dem Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue.

Satz 2.5 (Satz von der majorisierten Konvergenz, Konvergenzsatz von Lebesgue)
$f_k : X \to \mathbb{C}$ seien meßbar bezüglich eines Maßes μ auf $X, 1 \leq p < \infty$,

$$f := \lim_{k \to \infty} f_k \quad \textit{existiert fast überall bezüglich } \mu$$

und für ein $g \in L^p(\mu)$ gelte

$$|f_k| \leq g \quad \forall k \in \mathbb{N}, \mu - \textit{fast überall.}$$

Dann gilt $f_k, f \in L^p(\mu)$ und

$$f_k \to f \quad \textit{in } L^p(\mu).$$

Beweis:
Klarerweise gilt $|f| \leq g$ fast überall bezüglich μ und

$$\int |f_k|^p \, \mathrm{d}\mu, \int |f|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \int g^p \, \mathrm{d}\mu < \infty,$$
$$2^p g^p - |f_k - f|^p \geq 0 \quad \text{fast überall bezüglich } \mu,$$

insbesondere $f_k, f \in L^p(\mu)$. Mit dem Lemma von Fatou, Satz 1.3, folgt

$$\int 2^p g^p \, \mathrm{d}\mu = \int \liminf_{k \to \infty} (2^p g^p - |f_k - f|^p) \, \mathrm{d}\mu \leq$$

$$\leq \liminf_{k \to \infty} \int (2^p g^p - |f_k - f|^p) \, \mathrm{d}\mu = \int 2^p g^p \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{k \to \infty} \int |f_k - f|^p \, \mathrm{d}\mu,$$

da alle Integrale endlich sind. Dies ergibt

$$\limsup_{k \to \infty} \| \, f_k - f \, \|_{L^p(\mu)} = \limsup_{k \to \infty} \left(\int |f_k - f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} = 0,$$

und der Satz ist bewiesen.

///

Proposition 2.2 *μ sei ein Maß auf $X, 1 \leq p < \infty$, und S der Vektorraum aller einfachen, $\mu-$meßbaren Funktionen $g : X \to \mathbb{C}$ mit*

$$\mu(g \neq 0) < \infty.$$

Dann liegt S dicht in $L^p(\mu)$.

Beweis:
Klarerweise gilt $S \subseteq L^p(\mu)$. Für $f \in L^p(\mu), f \geq 0,$ existieren mit Proposition 1.3 einfache, nicht-negative, $\mu-$meßbare Funktionen $0 \leq f_k \nearrow f$. Da $f \in L^p(\mu)$ folgt mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue, Satz 2.5, $f_k \to f$ in $L^p(\mu)$. Da der Abschluß des Unterraumes S wieder ein Unterraum von $L^p(\mu)$ ist und $\{f \in L^p(\mu) \mid f \geq 0\}$ den ganzen Raum $L^p(\mu)$ erzeugt, liegt S dicht in $L^p(\mu)$.

///

Proposition 2.3 *Es sei* μ *ein Maß auf* X *, und* $1 \leq p, q \leq \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1$ *. Dann ist die Abbildung* $g \mapsto \Lambda_g, g \in L^q(\mu),$ *mit*

$$\Lambda_g f := \int fg \ \mathrm{d}\mu \quad \forall f \in L^p(\mu)$$

eine normerhaltende Einbettung

$$L^q(\mu) \hookrightarrow L^p(\mu)^*,$$

d.h.

$$\| \Lambda_g \| := \sup \left\{ \ \left| \int fg \ \mathrm{d}\mu \right| \ \mid f \in L^p(\mu), \| f \|_{L^p(\mu)} \leq 1 \ \right\} = \| g \|_{L^q(\mu)} \ .$$

Beweis:
Mit der Hölder-Ungleichung, Satz 2.2, ist Λ_g ein stetiges, lineares Funktional auf $L^p(\mu)$ und

$$\| \Lambda_g \| \leq \| g \|_{L^q(\mu)} \ .$$

Klarerweise ist $g \to \Lambda_g$ linear. Es verbleibt zu zeigen

$$\| \Lambda_g \| \geq \| g \|_{L^q(\mu)} \ . \tag{2.8}$$

Für $1 < p < \infty$ setzen wir $f := \bar{g}|g|^{q-2}\chi_{[g \neq 0]}$ und sehen, da $p = q/(q-1)$,

$$\int |f|^p \ \mathrm{d}\mu = \int |g|^q \ \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Dies ergibt $f \in L^p(\mu), \| f \|_{L^p(\mu)} = \| g \|^{q-1}_{L^q(\mu)}$ und

$$\| g \|^q_{L^q(\mu)} = \int |g|^q \ \mathrm{d}\mu = \int fg \ \mathrm{d}\mu \leq \| \Lambda_g \| \ \| f \|_{L^p(\mu)} = \| \Lambda_g \| \ \| g \|^{q-1}_{L^q(\mu)},$$

also (2.8).

Für $p = \infty, q = 1$ setzen wir $f := \bar{g}|g|^{-1}\chi_{[g \neq 0]}$ und sehen $\| f \|_{L^\infty(\mu)} \leq 1$

$$\| g \|_{L^1(\mu)} = \int |g| \ \mathrm{d}\mu = \int fg \ \mathrm{d}\mu \leq \| \Lambda_g \| \ \| f \|_{L^\infty(\mu)} \leq \| \Lambda_g \|$$

also (2.8).

Für $p = 1, q = \infty$ sehen wir für $0 \leq \lambda < \| g \|_{L^\infty(\mu)}$, daß $[|g| > \lambda]$ keine lokale $\mu-$Nullmenge ist. Daher existiert eine $\mu-$meßbare Teilmenge $A \subseteq [|g| > \lambda]$ mit $0 < \mu(A) < \infty$. Dann gilt $f := \bar{g}|g|^{-1}\chi_A \in L^1(\mu), \| f \|_{L^1(\mu)} = \mu(A)$ und

$$\lambda\mu(A) \leq \int_A |g| \ \mathrm{d}\mu = \int fg \ \mathrm{d}\mu \leq \| \Lambda_g \| \ \| f \|_{L^1(\mu)} \leq \| \Lambda_g \| \ \mu(A),$$

also, da $0 < \mu(A) < \infty$,

$$\lambda \leq \| \Lambda_g \|,$$

und (2.8) folgt.

///

3 Produkträume

Definition 3.1 *Es seien μ bzw. ν Maße auf X bzw. Y . Wir definieren das Produktmaß $\mu \otimes \nu$ auf $X \times Y$ für $S \subseteq X \times Y$ durch*

$$(\mu \otimes \nu)(S) := \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\nu(B_k) \mid \quad S \subseteq \cup_{k=1}^{\infty}(A_k \times B_k), \\ A_k \textit{ bzw. } B_k \textit{ sind } \mu \textit{ bzw. } \nu - \textit{meßbar} \Big\}.$$

□

Bemerkung:

$\mu \otimes \nu$ ist das größte Maß auf $X \times Y$, welches

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) \leq \mu(A)\nu(B)$$

für alle $\mu-$meßbaren Mengen A und $\nu-$meßbaren Mengen B .

□

Der zentrale Satz für Produktmaße ist der Satz von Fubini.

Satz 3.1 (Satz von Fubini) *Es seien μ bzw. ν Maße auf X bzw. Y . Dann ist das Produktmaß $\mu \otimes \nu$ ein Maß auf $X \times Y$ mit*

$$\begin{gathered} \forall S \subseteq X \times Y : \exists R \supseteq S \textit{ meßbar bezüglich } \mu \otimes \nu : \\ (\mu \otimes \nu)(S) = (\mu \otimes \nu)(R). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Für μ bzw. $\nu-$meßbares A bzw. B ist $A \times B$ meßbar bezüglich $\mu \otimes \nu$ und

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B). \tag{3.2}$$

Für $S \subseteq X \times Y$ meßbar und $\sigma-$endlich bezüglich $\mu \otimes \nu$ gilt:

$$\left.\begin{gathered} S_y := \{x \mid (x,y) \in S \} \textit{ ist für } \nu - \textit{fast alle } y \in Y \textit{ meßbar bezüglich } \mu, \\ \Big(y \mapsto \mu(S_y)\Big) \textit{ ist meßbar bezüglich } \nu, \\ \\ S^x := \{y \mid (x,y) \in S \} \textit{ ist für } \mu - \textit{fast alle } x \in X \textit{ meßbar bezüglich } \nu, \\ \Big(x \mapsto \nu(S^x)\Big) \textit{ ist meßbar bezüglich } \mu, \\ \\ (\mu \otimes \nu)(S) = \int \mu(S_y)\ \mathrm{d}\nu(y) = \int \nu(S^x)\ \mathrm{d}\mu(x). \end{gathered}\right\} \tag{3.3}$$

Für $f : X \times Y \to [0, \infty]$ *meßbar, und* $[f > 0]$ *sei* $\sigma-$*endlich bezüglich* $\mu \otimes \nu$ *gilt:*

$$\left.\begin{array}{c} \Big(x \mapsto f(x,y)\Big) \text{ ist für } \nu - \text{fast alle } y \in Y \text{ meßbar bezüglich } \mu, \\ \Big(y \mapsto \int f(x,y)\mu(x)\Big) \text{ ist meßbar bezüglich } \nu, \\ \\ \Big(y \mapsto f(x,y)\Big) \text{ ist für } \mu - \text{fast alle } x \in X \text{ meßbar bezüglich } \nu, \\ \Big(x \mapsto \int f(x,y)\nu(y)\Big) \text{ ist meßbar bezüglich } \mu, \\ \\ \int f \ \mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int \int f(x,y) \ \mathrm{d}\mu(x) \ \mathrm{d}\nu(y) = \int \int f(x,y) \ \mathrm{d}\nu(y) \ \mathrm{d}\mu(x). \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

Für $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$ *gilt:*

$$\left.\begin{array}{c} \Big(x \mapsto f(x,y)\Big) \in L^1(\mu) \text{ für } \nu - \text{fast alle } y \in Y, \\ \Big(y \mapsto \int f(x,y)\mu(x)\Big) \in L^1(\nu), \\ \\ \Big(y \mapsto f(x,y)\Big) \in L^1(\nu) \text{ für } \mu - \text{fast alle } x \in X, \\ \Big(x \mapsto \int f(x,y)\nu(y)\Big) \in L^1(\mu), \\ \\ \int f \ \mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int \int f(x,y) \ \mathrm{d}\mu(x) \ \mathrm{d}\nu(y) = \int \int f(x,y) \ \mathrm{d}\nu(y) \ \mathrm{d}\mu(x). \end{array}\right\} \tag{3.5}$$

Beweis:
Für $S \subseteq \cup_{l=1}^{\infty} S_l \subseteq X$ und $S_l \subseteq \cup_{k=1}^{\infty}(A_{kl} \times B_{kl}), A_{kl} \in \mathcal{A}_\mu, B_{kl} \in \mathcal{A}_\nu$ gilt $S \subseteq \cup_{k,l=1}^{\infty}(A_{kl} \times B_{kl})$ und

$$(\mu \otimes \nu)(S) \le \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{kl})\nu(B_{kl}),$$

also nach Übergang zu den Infima auf der rechten Seite

$$(\mu \otimes \nu)(S) \le \sum_{l=1}^{\infty} (\mu \otimes \nu)(S_l).$$

Da klarerweise gilt $(\mu \otimes \nu)(\emptyset) = 0$, ist das Produktmaß tatsächlich ein Maß auf $X \times Y$.
Es sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$ die Familie der Mengen $S \subseteq X \times Y$, für die

$$\begin{array}{c} \Big(x \mapsto \chi_S(x,y)\Big) \text{ für } \nu - \text{fast alle } y \in Y \text{ meßbar bezüglich } \mu \text{ ist}, \\ \Big(y \mapsto \int \chi_S(x,y) \ \mathrm{d}\mu(x)\Big) \text{ meßbar bezüglich } \nu \text{ ist}. \end{array}$$

Für $S \in \mathcal{F}$ setzen wir

$$\lambda(S) := \int \int \chi_S(x,y) \ \mathrm{d}\mu(x) \ \mathrm{d}\nu(y).$$

Weiter setzen wir

$$\mathcal{F}_0 := \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}_\mu, B \in \mathcal{A}_\nu \},$$
$$\mathcal{F}_1 := \{\cup_{k=1}^\infty S_k \mid S_k \in \mathcal{F}_0 \},$$
$$\mathcal{F}_2 := \{\cap_{k=1}^\infty R_k \mid R_k \in \mathcal{F}_1 \}.$$

Für $S = A \times B \subseteq X \times Y$ gilt

$$\Big(x \mapsto \chi_S(x,y) = \chi_A(x)\chi_B(y)\Big) = \begin{cases} \chi_A & \text{für } y \in B, \\ 0 & \text{für } y \in Y - B, \end{cases}$$

und, wenn $A \in \mathcal{A}_\mu$,

$$\int \chi_S(x,y) \, \mathrm{d}\mu(x) = \mu(A)\chi_B(y).$$

Dies ergibt $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ und

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \times B \in \mathcal{F}_0. \tag{3.6}$$

Für $A_1 \times B_1, A_2 \times B_2 \in \mathcal{F}_0$ sind

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$

und

$$(A_1 \times B_1) - (A_2 \times B_2) = \Big((A_1 - A_2) \times B_1\Big) \cup \Big((A_1 \cap A_2) \times (B_1 - B_2)\Big)$$

disjunkte Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{F}_0$. Damit sind alle Elemente von $\mathcal{F}_1$ disjunkte Vereinigungen von Elementen von $\mathcal{F}_0$, und somit folgt

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}. \tag{3.7}$$

Wir behaupten

$$(\mu \otimes \nu)(S) = \inf\{\lambda(R) \mid S \subseteq R \in \mathcal{F}_1 \}. \tag{3.8}$$

Für $S \subseteq \cup_{k=1}(A_k \times B_k) =: R, A_k \times B_k \in \mathcal{F}_0$ gilt $R \in \mathcal{F}_1$ und mit (3.6)

$$\lambda(R) \le \sum_{k=1}^\infty \lambda(A_k \times B_k) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)\nu(B_k),$$

also

$$\inf\{\lambda(R) \mid S \subseteq R \in \mathcal{F}_1 \} \le (\mu \otimes \nu)(S).$$

Andererseits existiert zu $R \in \mathcal{F}_1$, wie oben bemerkt, eine disjunkte Zerlegung $R = \sum_{k=1}^\infty (A_k \times B_k), A_k \times B_k \in \mathcal{F}_0$. Damit sehen wir wieder mit (3.6)

$$(\mu \otimes \nu)(S) \le \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)\nu(B_k) = \sum_{k=1}^\infty \lambda(A_k \times B_k) = \lambda(R),$$

und (3.8) folgt.

Für $R \in \mathcal{F}_1$ ergibt dies

$$(\mu \otimes \nu)(R) = \lambda(R)$$

und für $A \times B \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1$ mit (3.6), dass

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}_\mu, B \in \mathcal{A}_\nu. \tag{3.9}$$

Wir zeigen, daß $A \times B$ meßbar bezüglich $\mu \otimes \nu$ ist. Für $S \subseteq X \times Y, S \subseteq R \in \mathcal{F}_1$ sind $R \cap (A \times B)$ und $R - (A \times B) \in \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$ disjunkt. Dies ergibt

$$\begin{aligned}(\mu \otimes \nu)(S \cap (A \times B)) + (\mu \otimes \nu)(S - (A \times B)) \leq \\ \leq \lambda(R \cap (A \times B)) + \lambda(R - (A \times B)) = \lambda(R),\end{aligned}$$

also mit (3.8)

$$(\mu \otimes \nu)(S \cap (A \times B)) + (\mu \otimes \nu)(S - (A \times B)) \leq (\mu \otimes \nu)(S),$$

und $A \times B$ ist meßbar bezüglich $\mu \otimes \nu$. Zusammen mit (3.9) beweist dies (3.2).

Mit (3.8) wählen wir für $(\mu \otimes \nu)(S) < \infty$ eine Folge $R_k \in \mathcal{F}_1$ mit $R_k \supseteq S, \lambda(R_k) < (\mu \otimes \nu)(S) + 1/k$. Nach den obigen Bemerkungen gilt $\cap_{k=1}^l R_k \in \mathcal{F}_1$. Für $R := \cap_{k=1}^\infty R_k \in \mathcal{F}_2$ folgt mit (3.8)

$$(\mu \otimes \nu)(S) \leq (\mu \otimes \nu)(R) \leq \lambda(\cap_{k=1}^l R_k)$$

und mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue, Satz 2.5, $R \in \mathcal{F}$ und $\lambda(R) = \lim\limits_{l \to \infty} \lambda(\cap_{k=1}^l R_k) = (\mu \otimes \nu)(S)$. Dies ergibt

$$(\mu \otimes \nu)(S) \leq (\mu \otimes \nu)(R) \leq \lim_{l \to \infty} \lambda(\cap_{k=1}^l R_k) = \lambda(R) = (\mu \otimes \nu)(S).$$

Für $(\mu \otimes \nu)(S) = \infty$ wählen wir $R = X \times Y$ und erhalten

$$\begin{aligned}\forall S \subseteq X \times Y : \exists R \in \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}, R \supseteq S : \\ (\mu \otimes \nu)(S) = \lambda(R) = (\mu \otimes \nu)(R).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Da mit (3.2) alle Elemente aus $\mathcal{F}_0$ meßbar bezüglich $\mu \otimes \nu$ sind, sind auch alle Elemente aus $\mathcal{F}_2$ meßbar bezüglich $\mu \otimes \nu$, und (3.1) folgt.

Für $S \subseteq X \times Y$ mit $(\mu \otimes \nu)(S) = 0$ existiert mit (3.10) ein $R \in \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}$ mit $R \supseteq S, \lambda(R) = 0$, d.h.

$$0 = \lambda(R) = \int \int \chi_R(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x) \, \mathrm{d}\nu(y) = \int \mu(R_y) \, \mathrm{d}\nu(y).$$

Daraus folgt für $\nu-$fast alle $y \in Y$

$$\mu(S_y) \leq \mu(R_y) = 0$$

und S_y bzw. $\Big(x \to \chi_S(x, y)\Big) = \chi_{S_y}$ ist meßbar bezüglich μ . Weiter ist $\int \chi_S(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x) = \mu(S_y) = 0$ für $\nu -$ fast alle $y \in Y$, und $\Big(y \to \int \chi_S(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x)\Big)$ ist $\nu-$meßbar. Dies ergibt $S \in \mathcal{F}$ und $\lambda(S) = 0$.

Für $(\mu \otimes \nu) -$ meßbares $S \subseteq X \times Y$ mit $(\mu \otimes \nu)(S) < \infty$ existiert mit (3.10) ein $R \in \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}$ mit $R \supseteq S, \lambda(R) = (\mu \otimes \nu)(R) = (\mu \otimes \nu)(S) < \infty$. Da $R \in \mathcal{F}_2$ meßbar bezüglich $\mu\otimes\nu$ ist, folgt $(\mu\otimes\nu)(R-S) = 0$. Mit dem eben Bewiesenen gilt $\lambda(R-S) = 0$ und

$$\mu((R-S)_y) = 0 \quad \text{für } \nu - \text{fast alle } y \in Y.$$

Daraus folgt für $\nu -$ fast alle $y \in Y$, daß

$$S_y = R_y - (R-S)_y \text{ ist } \mu - \text{meßbar},$$

$$\mu(S_y) = \mu(R_y).$$

Damit ist $\Big(y \to \int \chi_S(x,y)\ \mathrm{d}\mu(x) = \mu(R_y)\Big)$ meßbar bezüglich ν , und

$$(\mu\otimes\nu)(S) = \lambda(R) = \int \mu(R_y)\ \mathrm{d}\nu(y) = \int \mu(S_y)\ \mathrm{d}\nu(y).$$

Ist $S \subseteq X \times Y$ meßbar und $\sigma-$endlich bezüglich $\mu\otimes\nu$, so existieren S_k meßbar bezüglich $\mu\otimes\nu, (\mu\otimes\nu)(S_k) < \infty$ und $S = \sum_{k=1}^\infty S_k$. Dann ist $S_y = \sum_{k=1}^\infty S_{k,y}$ für $\nu-$fast alle $y \in Y$ meßbar bezüglich μ , $\Big(y \mapsto \mu(S_y) = \sum_{k=1}^\infty \mu(S_{k,y})\Big)$ meßbar bezüglich ν und mit Proposition 1.7

$$(\mu\otimes\nu)(S) = \sum_{k=1}^\infty (\mu\otimes\nu)(S_k) = \sum_{k=1}^\infty \int \mu(S_{k,y})\ \mathrm{d}\nu(y) = \int \mu(S_y)\ \mathrm{d}\nu(y).$$

Dies beweist (3.3).

(3.3) impliziert (3.4) für $f = \chi_S$. Für $f : X\times Y \to [0,\infty]$ meßbar, und $[f>0]$ sei $\sigma-$endlich bezüglich $\mu\otimes\nu$ schreiben wir $f = \sum_{k=1}^\infty k^{-1}\chi_{S_k}, S_k$ meßbar bezüglich $\mu\otimes\nu$, mit Proposition 1.3. Da $S_k \subseteq [f>0]$, folgt die $\sigma-$Endlichkeit von S_k bezüglich $\mu\otimes\nu$. Mit (3.3) und Proposition 1.7 ist

$$\Big(x \mapsto f(x,y) = \sum_{k=1}^\infty k^{-1}\chi_{S_k}(x,y)\Big) \text{ für } \nu - \text{fast alle } y \in Y \text{ meßbar bezüglich } \mu,$$

$$\Big(y \mapsto \int f(x,y)\mu(x) = \sum_{k=1}^\infty \int k^{-1}\chi_{S_k}(x,y)\ \mathrm{d}\mu(x)\Big) \text{ ist meßbar bezüglich } \nu,$$

$$\int f\ \mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \sum_{k=1}^\infty \int k^{-1}\chi_{S_k}\ \mathrm{d}(\mu\otimes\nu) =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \int\int k^{-1}\chi_{S_k}(x,y)\ \mathrm{d}\mu(x)\ \mathrm{d}\nu(y) = \int\int f(x,y)\ \mathrm{d}\mu(x)\ \mathrm{d}\nu(y),$$

und (3.4) folgt.

$f \in L^1(\mu\otimes\nu)$ schreiben wir in der Form $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$ mit $0 \le f_j \le |f|$. $[f_j > 0] \subseteq [|f| \ne 0] = \cup_{k=1}^\infty [|f| > 1/k]$ ist $\sigma-$endlich bezüglich $(\mu\otimes\nu)$, und (3.5) folgt aus (3.4) für f_j durch Addition.

///

Für das Lebesgue-Maß erhalten wir folgende Produktzerlegung.

Proposition 3.1 *Für* $1 \le j < n,$ *gilt*

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^j \otimes \mathcal{L}^{n-j}$$

und alle Intervalle $\prod_{i=1}^n]a_i, b_i[$ *sind* $\mathcal{L}^n-$*messbar mit*

$$\mathcal{L}^n(\prod_{i=1}^n]a_i, b_i[) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i). \tag{3.11}$$

Beweis:
Gemäß der Definition des $n-$dimensionalen Lebesgue-Maß betrachten wir $S \subseteq \cup_{k=1}^\infty \prod_{i=1}^n]a_{ki}, b_{ki}[, a_{ki} < b_{ki} \in \mathbb{R}$ und setzen $A_k := \prod_{i=1}^j]a_{ki}, b_{ki}[\subseteq \mathbb{R}^j, B_k := \prod_{i=j+1}^n]a_{ki}, b_{ki}[\subseteq \mathbb{R}^{n-j}$. Wir haben bereits gesehen, daß Intervalle $\mathcal{L}^1-$meßbar sind, und somit sind per Induktion die Intervalle A_k bzw. B_k meßbar bezüglich $\mathcal{L}^j$ bzw. $\mathcal{L}^{n-j}$. Da $S \subseteq \cup_{k=1}^\infty (A_k \times B_k)$ und $\mathcal{L}^j(A_k) \le \prod_{i=1}^j (b_{ki} - a_{ki}), \mathcal{L}^{n-j}(B_k) \le \prod_{i=j+1}^n (b_{ki} - a_{ki})$, erhalten wir mit Definition 3.1

$$(\mathcal{L}^j \otimes \mathcal{L}^{n-j})(S) \le \sum_{k=1}^\infty \mathcal{L}^j(A_k)\mathcal{L}^{n-j}(B_k) \le \sum_{k=1}^\infty \prod_{i=1}^n (b_{ki} - a_{ki}),$$

also

$$(\mathcal{L}^j \otimes \mathcal{L}^{n-j})(S) \le \mathcal{L}^n(S). \tag{3.12}$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung betrachten wir zuerst $S = A \times B$. Für Überdeckungen $A \subseteq \cup_{k=1}^\infty \prod_{i=1}^j]a_{ki}, b_{ki}[, B \subseteq \cup_{l=1}^\infty \prod_{i=j+1}^n]a_{li}, b_{li}[$ sehen wir $A \times B \subseteq \cup_{k,l=1}^\infty \Big(\prod_{i=1}^j]a_{ki}, b_{ki}[\times \prod_{i=j+1}^n]a_{li}, b_{li}[\Big)$ und erhalten mit der Definition von $\mathcal{L}^n$

$$\mathcal{L}^n(A \times B) \le \sum_{k,l=1}^\infty \Big(\prod_{i=1}^j (b_{ki} - a_{ki}) \prod_{i=j+1}^n (b_{li} - a_{li}) \Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \prod_{i=1}^j (b_{ki} - a_{ki}) \cdot \sum_{l=1}^\infty \prod_{i=j+1}^n (b_{li} - a_{li}).$$

Für $\mathcal{L}^j(A), \mathcal{L}^{n-j}(B) < \infty$ oder $\mathcal{L}^j(A), \mathcal{L}^{n-j}(B) > 0$ erhalten wir durch Übergang zum Infimum

$$\mathcal{L}^n(A \times B) \le \mathcal{L}^j(A)\mathcal{L}^{n-j}(B). \tag{3.13}$$

Für $\mathcal{L}^j(A) = 0$ ergibt dies

$$\mathcal{L}^n(A \times B) \le \sum_{m=1}^\infty \mathcal{L}^n(A \times B_m(0)) = 0 = \mathcal{L}^j(A)\mathcal{L}^{n-j}(B),$$

und (3.13) folgt für alle A, B .

Für allgemeines $S \subseteq \mathbb{R}^n$ und $S \subseteq \cup_{k=1}^\infty (A_k \times B_k)$ mit $A_k \subseteq \mathbb{R}^j, B_k \subseteq \mathbb{R}^{n-j}$ erhalten wir mit (3.13)

$$\mathcal{L}^n(S) \le \sum_{k=1}^\infty \mathcal{L}^n(A_k \times B_k) \le \sum_{k=1}^\infty \mathcal{L}^j(A_k)\mathcal{L}^{n-j}(B_k)$$

und durch Übergang zum Infimum über messbare A_k, B_k mit Definition (3.1)

$$\mathcal{L}^n(S) \leq (\mathcal{L}^j \otimes \mathcal{L}^{n-j})(S).$$

Dies ist die umgekehrte Ungleichung zu (3.12).

Schließlich sind mit der $\mathcal{L}^1-$Meßbarkeit eindimensionaler Intervalle und mit dem Satz von Fubini 3.1 die Intervalle

$$\prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[= \Big(\prod_{i=1}^{j}]a_i, b_i[\Big) \times \Big(\prod_{i=j+1}^{n}]a_i, b_i[\Big)$$

messbar bezüglich $\mathcal{L}^j \otimes \mathcal{L}^{n-j} = \mathcal{L}^n$ und mit Induktion in (3.11) mit (1.3) erhalten wir

$$\mathcal{L}^n(\prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[) = \mathcal{L}^j(\prod_{i=1}^{j}]a_i, b_i[) \cdot \mathcal{L}^{n-j}(\prod_{i=j+1}^{n}]a_i, b_i[) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i),$$

also (3.11), und die Proposition ist bewiesen.

///

4 Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$

Wir beginnen mit Regularitätseigenschaften für Maße auf $\mathbb{R}^n$.

Definition 4.1 *Ein Maß μ auf einem topologischen Raum X heißt Borel-Maß, falls alle offenen Mengen bzw. äquivalent alle Borelmengen $\mu-$meßbar sind. Ein Borel-Maß μ heißt borelregulär, falls zu jeder Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge $B \supseteq S$ mit $\mu(S) = \mu(B)$ existiert.*

Ein Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$ ist ein Borel-Maß mit

$$\begin{aligned} \mu(K) &< \infty \quad \forall K \subseteq \mathbb{R}^n \textit{ kompakt}, \\ \mu(S) &= \inf_{U \supseteq S \textit{ offen}} \mu(U) \quad \forall S \subseteq \mathbb{R}^n, \\ \mu(U) &= \sup_{K \subseteq U \textit{ kompakt}} \mu(K) \quad \forall U \subseteq \mathbb{R}^n \textit{ offen}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

□

Bemerkung:

Mit der zweiten Eigenschaft wählen wir für beliebiges $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Folge offener Mengen $U_j \supseteq S$ mit $\mu(U_j) \to \mu(S)$. Dann ist $B := \cap_{j=1}^{\infty} U_j \supseteq S$ eine Borelmenge und $\mu(B) = \mu(S)$. Also ist jedes Radon-Maß borelregulär.

Umgekehrt kann gezeigt werden, jedes borelreguläre Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$\mu(K) < \infty \quad \forall K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ kompakt},$$

ist ein Radon-Maß, siehe [EGa] Theorem 1.1.4 bzw. Proposition 7.3.

□

Wir begnügen uns in der folgenden Proposition mit einer schwächeren Äquivalenz und geben weitere Eigenschaften von Radon-Maßen an.

Proposition 4.1 *Es sei μ ein Borel-Maß auf $\mathbb{R}^n$ mit*

$$\begin{aligned} \mu(K) &< \infty \quad \forall K \subseteq \mathbb{R}^n \textit{ kompakt}, \\ \mu(S) &= \inf_{U \supseteq S \textit{ offen}} \mu(U) \quad \forall S \subseteq \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Dann ist μ ein Radon-Maß.

Genauer existiert zu jeder $\mu-$meßbaren Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U \supseteq A$ und eine abgeschlossene Menge $C \subseteq A$ mit

$$\mu(U - C) < \varepsilon,$$

insbesondere

$$\mu(A) = \sup_{K \subseteq A \textit{ kompakt}} \mu(K).$$

Weiter liegt die Menge $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit kompakten Träger in $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$\textit{supp } \varphi := \overline{[\varphi \neq 0]} \textit{ ist kompakt } \subseteq \mathbb{R}^n,$$

dicht in $L^p(\mu)$ für $1 \leq p < \infty$.

Beweis:
Zuerst betrachten wir beschränktes, $\mu-$meßbares $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Mit der zweiten Eigenschaft von μ können wir eine Folge offener Mengen $U_j \supseteq A$ mit $\mu(U_j) \to \mu(A)$ wählen, also, da U_j und A meßbar bezüglich μ sind und $\mu(A) < \infty$,

$$\mu(U_j - A) = \mu(U_j) - \mu(A) \to 0,$$

also für $U = U_j$ und j groß genug

$$\mu(U - A) < \varepsilon/2.$$

Für $A \subseteq B_R(0)$ ist auch $\overline{B_R(0)} - A$ beschränkt und $\mu-$meßbar. Also existiert nach dem eben Bewiesenen eine offene Menge $V \supseteq \overline{B_R(0)} - A$ mit $\mu(V - (\overline{B_R(0)} - A)) < \varepsilon/2$. Damit ist $K := \overline{B_R(0)} - V \subseteq A$ kompakt, also auch abgeschlossen, und

$$\mu(A - K) \leq \mu(V - (\overline{B_R(0)} - A)) < \varepsilon/2,$$

zusammen $\mu(U - K) < \varepsilon$. Allgemeines $\mu-$meßbares $A \subseteq \mathbb{R}^n$ zerlegen wir in beschränkte, $\mu-$meßbare Mengen $A_i := A \cap B_i(0) - B_{i-1}(0), A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$. Mit dem oben Bewiesenen existieren offene Mengen $U_i \supseteq A_i$ und kompakte Mengen $K_i \subseteq A_i$ mit $\mu(U_i - K_i) < \varepsilon 2^{-i}$. Damit ist $U := \cup_{i=1}^{\infty} U_i \supseteq A$ offen, und mit $C = \cup_{i=1}^{\infty} K_i$ gilt

$$\mu(U - C) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i - K_i) < \varepsilon.$$

Weiter ist C abgeschlossen, denn für $x_k \in C$ mit $x_k \to x \in \mathbb{R}^n$, sehen wir $x \in B_i(0)$ für ein $i \in \mathbb{N}$, also $x_k \in B_i(0)$ für große k . Daher liegen diese x_k in der kompakten Menge $C_i := \cup_{j=1}^{i} K_j$, also auch $x \in C_i \subseteq C$, und C ist abgeschlossen. Weiter sehen wir für die kompakten Mengen $C_i := \cup_{j=1}^{i} K_j \subseteq A$ und mit Proposition 1.1

$$\lim_{i \to \infty} \mu(C_i) = \mu(\cup_{i=1}^{\infty} C_i) \geq \mu(A) - \mu(A - C) > \mu(A) - \varepsilon,$$

also

$$\mu(A) = \sup_{K \subseteq A \text{ kompakt}} \mu(K),$$

und μ ist ein Radon-Maß.

Schließlich wissen wir mit Proposition 2.2, daß die einfachen, $\mu-$meßbaren Funktionen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit $\mu(g \neq 0) < \infty$ dicht in $L^p(\mu)$ für $1 \leq p < \infty$ liegen. Daher genügt es χ_A für $\mu -$ meßbares A mit $\mu(A) < \infty$ durch Funktionen aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mu)$ zu approximieren. Mit Proposition 1.1 sehen wir, da $\mu(A) < \infty$, daß

$$\mu(A - B_R(0)) \to 0 \quad \text{für } R \to \infty,$$

also

$$\chi_A - \chi_{A \cap B_R(0)} = \chi_{A - B_R(0)} \to 0 \quad \text{in } L^p(\mu),$$

und es genügt beschränktes A zu betrachten.

Nach dem oben Bewiesenen existieren zu $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U \supseteq A$ und eine kompakte Menge $K \subseteq A$ mit

$$\mu(U - K) < \varepsilon.$$

Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Überdeckung $K \subseteq \cup_{i=1}^N B_{\varrho_i}(x_i)$ mit $B_{3\varrho_i}(x_i) \subseteq U$. Wir setzen $\psi_0(t) = 0$ für $t \leq 0, \psi_0(t) = e^{-1/t}$ für $t > 0$ und sehen $\psi_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Weiter sei

$$\psi(t) := \frac{\psi_0(\psi_0(1) - \psi_0(t))}{\psi_0(\psi_0(1))},$$

und wir erhalten $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\psi(t) = 1$ für $t \leq 0, \psi(t) = 0$ auf $t \geq 1, \psi' \leq 0$ und $0 \leq \psi \leq 1$. Nun sei $\varphi_i(x) := \psi(\varrho_i^{-1}(|x - x_i| - \varrho_i))$, also $\varphi_i = 1$ auf $B_{\varrho_i}(x_i), \varphi_i = 0$ auf $\mathbb{R}^n - B_{2\varrho_i}(x_i)$ und $\varphi_i \in C_0^\infty(B_{3\varrho_i}(x_i)) \subseteq C_0^\infty(U)$. Damit ist $\tilde{\varphi} := \sum_{i=1}^N \varphi_i \in C_0^\infty(U)$ mit $\tilde{\varphi} \geq 1$ auf K , und $\varphi := \psi \circ (1 - \tilde{\varphi}) \in C_0^\infty(U) \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi = 1$ auf $K, 0 \leq \varphi \leq 1$. Insbesondere gilt $|\varphi - \chi_A| \leq \chi_{U-K}$, also

$$\parallel \varphi - \chi_A \parallel_{L^p(\mu)} \leq \mu(U - K)^{1/p} \leq \varepsilon^{1/p},$$

und $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $L^p(\mu)$.

///

Bemerkungen:

1. Insbesondere existieren für jede $\mu-$meßbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Borelmengen $B_- \subseteq A \subseteq B_+$ mit $\mu(B_+ - B_-) = 0$. Schreiben wir eine $\mu -$ meßbare Funtkion $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ mit Proposiiton 1.3 als $f = \sum_{k=1}^\infty \chi_{A_k}/k$ mit $\mu -$ meßbaren $A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ und wählen Borelmenge $B_k \subseteq A_k$ mit $\mu(A_k - B_k) = 0$, so ist $g := \sum_{k=1}^\infty \chi_{B_k}/k$ borelmeßbar und
$$f = g \quad \text{außerhalb von } \cup_{k=1}^\infty (A_k - B_k),$$
also $f = g$ fast überall bezüglich μ .

2. Für ein Borel-Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ und eine Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\mu \lfloor A$ mit der Bemerkung 3. nach Definition 1.1 wieder ein Borel-Maß. Ist μ ein Radon-Maß, so gilt klarerweise für kompakte $K \subseteq \mathbb{R}^n$, daß $(\mu \lfloor A)(K) = \mu(K \cap A) < \infty$. Weiter wählen wir für beliebiges $S \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Proposition 4.1 offene Mengen $U_j \supseteq S \cap A$ mit $\mu(U_j) \to \mu(S \cap A)$ und abgeschlossene Mengen $C_j \subseteq A$ mit $\mu(A - C_j) \to 0$. Dann ist $U_j \cup (\mathbb{R}^n - C_j) \supseteq S$ offen und
$$\begin{aligned}(\mu \lfloor A)(U_j \cup (\mathbb{R}^n - C_j)) = \mu\Big((U_j \cup (\mathbb{R}^n - C_j)) \cap A\Big) &\leq \mu(U_j) + \mu(A - C_j) \\ &\to \mu(S \cap A) = (\mu \lfloor A)(S),\end{aligned}$$
und mit Proposition 4.1 ist $\mu \lfloor A$ auch ein Radon-Maß.

□

Das $n-$dimensionale Lebesgue-Maß ist ein Radon-Maß und erfüllt folgende zentrale Invariants- und Eindeutigkeitseigenschaften.

Proposition 4.2 *Das $n-$dimensionale Lebesgue-Maß ist ein Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Es ist translations- und spiegelungsinvariant, und skaliert unter Homothetien in der Potenz der Dimension, d.h. für $S \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(x + S) &= \mathcal{L}^n(S) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ \mathcal{L}^n(-S) &= \mathcal{L}^n(S), \\ \mathcal{L}^n(\lambda S) &= \lambda^n \mathcal{L}^n(S) \quad \forall \lambda > 0,\end{aligned} \tag{4.2}$$

und weiter gilt

$$\mathcal{L}^n(MS) = |\det(M)|\mathcal{L}^n(S) \quad \forall M \in \mathbb{R}^{n\times n}, S \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Ist umgekehrt μ *ein translationsinvariantes Radon-Maß auf* $\mathbb{R}^n$ *, so gilt*

$$\mu = \alpha\mathcal{L}^n$$

für ein $\alpha \geq 0$ *.*

Beweis:
Mit Proposition 3.1 sind Intervalle $]a_1, b_1[\times \ldots \times]a_n, b_n[$ und somit alle offenen Mengen meßbar bezüglich $\mathcal{L}^1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^n$, und $\mathcal{L}^n$ ist ein Borel-Maß. Für eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert $R > 0$ mit $K \subseteq]-R, R[^n$, also $\mathcal{L}^n(K) \leq \mathcal{L}^n(]-R, R[^n) = (2R)^n < \infty$. Weiter sehen wir per Definition

$$\mathcal{L}^n(S) = \inf_{U \supseteq S \text{ offen}} \mathcal{L}^n(U) \quad \forall S \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Mit der vorigen Proposition 4.1 ist $\mathcal{L}^n$ ein Radon-Maß.

Klarerweise gilt (4.2) für alle Intervalle $\prod_{i=1}^n]a_i, b_i[\subseteq \mathbb{R}^n$, also gilt (4.2) für allgemeines $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Bevor wir zur Transformation bezüglich linearer Abbildungen kommen, zeigen wir die Eindeutigkeitsaussage. Dazu sei μ ein translationsinvariantes Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$ und $\alpha := \mu([0,1[^n) \in [0, \infty[$. Für $k \in \mathbb{N}$ sehen wir $[0,1[^n = \sum_{j=1}^k [0,1[^{n-1} \times [(j-1)/k, j/k[$, also, da diese als Borelmengen $\mu-$meßbar sind und μ translationsinvariant ist,

$$\alpha = \mu([0,1[^n) = \sum_{j=1}^k \mu([0,1[^{n-1} \times [(j-1)/k, j/k[) =$$

$$= \sum_{j=1}^k \mu((0, \ldots, 0, (j-1)/k) + ([0,1[^{n-1} \times [0, 1/k[)) = k\mu([0,1[^{n-1} \times [0, 1/k[),$$

und für $l \in \mathbb{N}$

$$\mu([0,1[^{n-1} \times [0, l/k[) = l\mu([0,1[^{n-1} \times [0, 1/k[) = \alpha l/k.$$

Da $[0,1[^n \times [0, b[= \cup_{q \in \mathbb{Q}, 0 < q \leq b} [0,1[^n \times [0, q[$, folgt mit (1.6)

$$\mu([0,1[^{n-1} \times [0, b[) = \lim_{q \nearrow b, q \in \mathbb{Q}} \mu([0,1[^{n-1} \times [0, q[) = \alpha b \quad \forall b \in \mathbb{R}, b \geq 0,$$

und wieder mit Translationsinvarianz

$$= \mu([0,1[^{n-1} \times [a, b[) = \mu((0, \ldots, a) + ([0,1[^{n-1} \times [0, b-a[) = \alpha(b-a) \quad \forall -\infty < a \leq b < \infty.$$

Mit Induktion und (3.12) folgt

$$\mu([a_1, b_1[\times \ldots \times [a_n, b_n[) = \alpha(b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n) =$$

$$= \alpha\mathcal{L}^n([a_1, b_1[\times \ldots \times [a_n, b_n[) \quad \forall -\infty < a_i \leq b_i < \infty, i = 1, \ldots, n.$$

Da sich jede offene Menge als abzählbar disjunkte Vereinigung aus Intervallen der Form $[a_1, b_1[\times \ldots \times [a_n, b_n[$ schreiben läßt, sehen wir

$$\mu(V) = \alpha\mathcal{L}^n(V) \quad \forall V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen},$$

also $\mu = \alpha\mathcal{L}^n$, da μ und $\mathcal{L}^n$ Radon-Maße sind.

//

Für eine lineare Abbildung $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ setzen wir

$$\mu(S) := \mathcal{L}^n(MS) \quad \forall S \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Zuerst sei M nicht-singulär. Dann ist $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv und bistetig, und μ ist ein Radon-Maß. Für $x \in \mathbb{R}^n$ rechnen wir

$$\mu(x+S) = \mathcal{L}^n(M(x+S)) = \mathcal{L}^n(Mx+MS) = \mathcal{L}^n(MS) = \mu(S) \quad \forall S \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Mit obiger Eindeutigkeitsaussage erhalten wir $\mu = \alpha\mathcal{L}^n$ für ein $\alpha \in [0,\infty[$.

Ist M orthogonal, so ist $|\det(M)| = 1$ und $MB_1(0) = B_1(0)$, also

$$\alpha = \mu(B_1(0))/\mathcal{L}^n(B_1(0)) = \mathcal{L}^n(MB_1(0))/\mathcal{L}^n(B_1(0)) = 1,$$

und $\mu = \mathcal{L}^n = |\det(M)|\mathcal{L}^n$.

Ist $M = diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ diagonal mit $\lambda_i > 0$ so gilt $\det(M) = \lambda_1 \dots \lambda_n$ und $M]0,1[^n = \prod_{i=1}^n]0,\lambda_i[$, also

$$\alpha = \mu(]0,1[^n)/\mathcal{L}^n(]0,1[^n) = \mathcal{L}^n(\prod_{i=1}^n]0,\lambda_i[)/\mathcal{L}^n(]0,1[^n) = \lambda_1 \dots \lambda_n = |\det(M)|$$

und $\mu = \alpha\mathcal{L}^n = |\det(M)|\mathcal{L}^n$.

Ist M symmetrisch und positiv definit, so existiert eine orthogonale Transformation O , so daß $O^T M O = diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n) =: D$ diagonal mit $\lambda_i > 0$ ist. Nach dem bereits Bewiesenen gilt

$$\mathcal{L}^n(MS) = \mathcal{L}^n(ODO^T S) = |\det(O)|\mathcal{L}^n(DO^T S) =$$

$$= |\det OD|\mathcal{L}^n(O^T S) = |\det(M)|\mathcal{L}^n(S) \quad \forall S \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Allgemeines nicht-singuläres M kann als Produkt $M = PO$ aus einer symmetrischen, positiv-definiten und einer orthogonalen Transformation P und O geschrieben werden, und die Behauptung folgt wie eben.

Ist M singulär, so gilt $\det(M) = 0$ und $dim\ im(M) \leq n-1$. Daher gibt es eine orthogonale Transformation $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $O\ im(M) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, also

$$\mathcal{L}^n(MS) = \mathcal{L}^n(OMS) \leq \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) = 0 = |\det(M)|\mathcal{L}^n(S) \quad \forall S \subseteq \mathbb{R}^n.$$

///

Bemerkung:

Mit obiger Proposition sehen wir für $Tx := x_0 + Mx$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nicht-singulär, daß $T_*\mathcal{L}^n(S) = \mathcal{L}^n(T^{-1}S) = \mathcal{L}^n(M^{-1}(S - x_0)) = |\det M|^{-1}\mathcal{L}^n(S)$ für $S \subseteq \mathbb{R}^n$ und mit Proposition 1.10

$$\int (f \circ T)\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int f\ \mathrm{d}(T_*\mathcal{L}^n) = \int f|\det(M)|^{-1}\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

für alle $\mathcal{L}^n$−meßbaren $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ bzw. $f \in L^1(\mathcal{L}^n)$, und im zweiten Fall gilt $f \circ T \in L^1(\mathcal{L}^n)$.

Schreiben wir für die Integration über das Lebesgue-Maß

$$\int f \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int f(x) \, \mathrm{d}x,$$

so gilt

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = \int f(x_0 + Mx) |\det(M)| \, \mathrm{d}x.$$

□

In der nächsten Proposition sehen wir die Existenz einer Menge, die nicht $\mathcal{L}^n-$meßbar ist.

Proposition 4.3 *Jedes* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *mit* $\mathcal{L}^n(A) > 0$ *enthält eine Menge* $S \subseteq A$ *, die nicht* $\mathcal{L}^n-$*meßbar ist.*

Beweis:
Dazu definieren wir $x \sim y :\iff x - y \in \mathbb{Q}^n$ und wählen aus jeder Äquivalenzklasse $x + \mathbb{Q}^n$ genau einen Repräsentanten, d.h. wir erhalten eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$\mathbb{R}^n = \sum_{x \in E} (x + \mathbb{Q}^n)$$

bzw.

$$\mathbb{R}^n = \sum_{q \in \mathbb{Q}^n} (E + q).$$

Für eine kompakte Teilmenge $K \subseteq E$ sehen wir

$$\sum_{q \in \mathbb{Q}^n \cap [0,1[^n} \mathcal{L}^n(K + q) = \mathcal{L}^n(\cup_{q \in \mathbb{Q}^n \cap [0,1[^n} K + q) \leq \mathcal{L}^n(K + [0,1[^n) < \infty.$$

Da $\mathcal{L}^n(K) = \mathcal{L}^n(K + q)$, folgt

$$\mathcal{L}^n(K) = 0 \quad \forall K \subseteq E + q \text{ kompakt}, q \in \mathbb{Q}^n. \tag{4.3}$$

Wir zeigen die Kontraposition der Proposition, d.h. wir zeigen, sind alle Teilmengen von A meßbar bezüglich $\mathcal{L}^n$, so gilt $\mathcal{L}^n(A) = 0$. Für $q \in \mathbb{Q}^n$ setzen wir $A_q := A \cap (E + q)$. Für $K \subseteq A_q \subseteq E + q$ kompakt gilt mit (4.3), daß $\mathcal{L}^n(K) = 0$. Da wir $A_q \subseteq A$ als $\mathcal{L}^n-$meßbar annehmen, folgt mit den Propositionen 4.1 und 4.2, daß $\mathcal{L}^n(A_q) = 0$. Dies ergibt

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q}^n} \mathcal{L}^n(A_q) = 0,$$

und die Proposition ist bewiesen.

///

Im Rest dieses Paragraphen beweisen wir die Substitutionsformel per Differentiation. Wir beginnen mit dem Überdeckungssatz von Vitali und der folgenden Definition.

Definition 4.2 *Eine Familie* $\mathcal{V}$ *von abgeschlossenen Bällen in* $\mathbb{R}^n$ *heißt eine feine Überdeckung einer Menge* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *, wenn*

$$\forall x \in S : \forall \varrho > 0 : \exists B \in \mathcal{V} : x \in B \subseteq B_\varrho(x).$$

Wir schreiben $\bar{B}_\varrho(x) := \overline{B_\varrho(x)}$ *und für* $B = \bar{B}_\varrho(x)$ *setzen wir* $\hat{B} = \bar{B}_{5\varrho}(x)$ *.*

□

Lemma 4.4 (Überdeckungssatz von Vitali) *Zu jeder feinen Überdeckung* $\mathcal{V}$ *einer Menge* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *mit* $\mathcal{L}^n(S) < \infty$ *existiert eine abzählbare, paarweise disjunkte Teilfamilie* $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ *mit*

$$S \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{V}'} \hat{B}$$

und

$$\mathcal{L}^n(S - \bigcup \mathcal{V}') = 0.$$

Beweis:
Da $\mathcal{L}^n$ mit Proposition 4.2 ein Radon-Maß ist, können wir eine offene Menge $U \supseteq S$ mit $\mathcal{L}^n(U) < \infty$ wählen. Da $\mathcal{V}$ die Menge S fein überdeckt, so überdeckt auch

$$\mathcal{V}_0 := \{B \in \mathcal{V} \mid B \subseteq U, diam\ B \leq 1\ \}$$

die Menge S fein. Nun wählen wir rekursiv eine Folge von Bällen aus $\mathcal{V}$. Seien $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{V}_0$ für $k \in \mathbb{N}_0$ paarweise disjunkt bereits gewählt. Gilt bereits $S \subseteq \cup_{l=1}^k B_l$, so folgt das Lemma sofort für $\mathcal{V}' = \{B_1, \ldots, B_k\}$. Andernfalls existiert $y_k \in S - \cup_{l=1}^k B_l$ und, da B_l abgeschlossen sind und $\mathcal{V}_0$ die Menge S fein überdeckt, existiert ein $B \in \mathcal{V}_0$ mit

$$y_k \in B \subseteq U - \cup_{l=1}^k B_l.$$

Wir setzen

$$d_k := \sup\{\ diam\ B \mid B \in \mathcal{V}_0, B \subseteq U - \cup_{l=1}^k B_l\ \} \leq 1 \tag{4.4}$$

mit der Definition von $\mathcal{V}_0$ und wählen $B_{k+1} \in \mathcal{V}_0$ mit

$$B_{k+1} \subseteq U - \cup_{l=1}^k B_l, \quad diam\ B_{k+1} \geq d_k/2. \tag{4.5}$$

Bricht die Rekursion nicht ab, so erhalten wir eine abzählbare, paarweise disjunkte Teilfamilie $\mathcal{V}' := \{B_1, B_2, \ldots\}$. Wir zeigen

$$S - \cup_{l=1}^m B_l \subseteq \cup_{l=m+1}^\infty \hat{B}_l \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}_0 \tag{4.6}$$

und

$$\mathcal{L}^n(S - \cup_{l=1}^\infty B_l) = 0, \tag{4.7}$$

womit das Lemma dann folgt. Für $B_l = \bar{B}_{\varrho_l}(x_l)$ haben wir $\hat{B}_l := \bar{B}_{5\varrho_l}(x_l)$ und sehen

$$\mathcal{L}^n(B_1(0)) \sum_{l=1}^\infty \varrho_l^n = \sum_{l=1}^\infty \mathcal{L}^n(B_l) = \mathcal{L}^n(\cup_{l=1}^\infty B_l) \leq \mathcal{L}^n(U) < \infty. \tag{4.8}$$

Dies ergibt mit (4.5)

$$d_k \leq 2diam\ B_{k+1} = 4\varrho_{k+1} \to 0. \tag{4.9}$$

Zum Beweis von (4.6) sei $y \in S - \cup_{l=1}^m B_l$, und wie oben, da $\mathcal{V}_0$ die Menge S fein überdeckt, existiert ein $B \in \mathcal{V}_0$ mit

$$y \in B \subseteq U - \cup_{l=1}^m B_l. \tag{4.10}$$

Für großes k sehen wir mit (4.9), daß $d_k < diam\ B$ und, da $B \in \mathcal{V}_0$, erhalten wir mit der Definition von d_k in (4.4), daß

$$B \not\subseteq U - \cup_{l=1}^k B_l.$$

Wir wählen das kleinste solche k und sehen $k > m$ mit (4.10) und

$$B \subseteq U - \cup_{l=1}^{k-1} B_l \quad \text{und} \quad B \cap B_k \neq \emptyset.$$

Dann folgt mit der Definition von d_{k-1} in (4.4) und mit (4.5)

$$diam\ B \leq d_{k-1} \leq 2diam\ B_k.$$

Da $B \cap B_k \neq \emptyset$, sehen wir für $B = \bar{B}_\varrho(x)$ und $B_k = \bar{B}_{\varrho_k}(x_k)$ zuerst

$$|x - x_k| \leq \varrho + \varrho_k, \quad \varrho \leq 2\varrho_k,$$

und weiter

$$B = \bar{B}_\varrho(x) \subseteq \bar{B}_{\varrho+|x-x_k|}(x_k) \subseteq \bar{B}_{5\varrho_k}(x_k) = \hat{B}_k.$$

Dies ergibt

$$y \in B \subseteq \cup_{l=m+1}^\infty \hat{B}_l,$$

und (4.6) folgt.

Aus (4.6) und (4.8) erhalten wir

$$\mathcal{L}^n(S - \cup_{l=1}^\infty B_l) \leq \mathcal{L}^n(\cup_{l=m+1}^\infty \hat{B}_l) \leq$$

$$\leq \sum_{l=m+1}^\infty \mathcal{L}^n(\hat{B}_l) = 5^n \mathcal{L}^n(B_1(0)) \sum_{l=m+1}^\infty \varrho_l^n \to 0 \quad \text{für } m \to \infty,$$

also (4.7), und das Lemma ist bewiesen.

///

Definition 4.3 *Für ein Radon-Maß auf* $\mathbb{R}^n$ *definieren wir die (untere/obere) Dichte von* μ *bezüglich* $\mathcal{L}^n$ *durch*

$$(\overline{D}\mu)(x) := \limsup_{\varrho \to 0} \mu(B_\varrho(x))/\mathcal{L}^n(B_\varrho(x)) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$(\underline{D}\mu)(x) := \liminf_{\varrho \to 0} \mu(B_\varrho(x))/\mathcal{L}^n(B_\varrho(x)) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n,$$

und

$$(D\mu)(x) := \lim_{\varrho \to 0} \mu(B_\varrho(x))/\mathcal{L}^n(B_\varrho(x)) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n,$$

falls der Limes existiert.

$\square$

Bemerkungen:

1. Da die abgeschlossenen Bälle $\bar{B}_\varrho(x) = \cap_{r>\varrho} B_r(x)$ der Schnitt über die umgebenden offenen Bälle sind und die offenen Bälle $B_\varrho(x) = \cup_{r<\varrho} \bar{B}_r(x)$ die Vereinigung der enthaltenen abgeschlossenen Bälle und μ ein Borel-Maß ist, folgt mit Proposition 1.1
$$\mu(\bar{B}_\varrho(x)) = \lim_{r\downarrow\varrho} \mu(B_r(x)), \quad \mu(B_\varrho(x)) = \lim_{r\uparrow\varrho} \mu(\bar{B}_r(x)), \tag{4.11}$$
Dies ergibt
$$\overline{D}\mu(x) = \limsup_{\varrho\downarrow 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{\mathcal{L}^n(B_\varrho(x))} = \limsup_{\varrho\downarrow 0} \frac{\mu(\bar{B}_\varrho(x))}{\mathcal{L}^n(\bar{B}_\varrho(x))},$$
$$\underline{D}\mu(x) = \liminf_{\varrho\downarrow 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{\mathcal{L}^n(B_\varrho(x))} = \liminf_{\varrho\downarrow 0} \frac{\mu(\bar{B}_\varrho(x))}{\mathcal{L}^n(\bar{B}_\varrho(x))},$$
und in Definition 4.3 können äquivalent abgeschlossene Bälle verwendet werden.

2. Da
$$\liminf_{y\to x} \mu(B_\varrho(y)) \geq \liminf_{y\to x} \mu(B_{\varrho-|x-y|}(x)) = \mu(B_\varrho(x)),$$
sind die Funktionen
$$x \mapsto \lambda_\varrho(x) := \mu(B_\varrho(x))/\mathcal{L}^n(B_\varrho(x))$$
unterhalbstetig, also borelmeßbar. Genauso ist für $\delta > 0$ die Abbildung $x \mapsto \sup_{0<\varrho<\delta}(\mu(B_\varrho(x))/\mathcal{L}^n(B_\varrho(x)))$ unterhalbstetig, und somit
$$\overline{D}\mu = \lim_{k\to\infty} \sup_{0<\varrho<1/k} \Big(\mu(B_\varrho(.))/\mathcal{L}^n(B_\varrho(.))\Big)$$
borelmeßbar. Analog ist
$$x \mapsto \inf_{0<\varrho<\delta} (\mu(\bar{B}_\varrho(x))/\mathcal{L}^n(B_\varrho(x)))$$
oberhalbstetig, also borelmeßbar, und somit ist mit (4.11) auch
$$\underline{D}\mu = \lim_{k\to\infty} \inf_{0<\varrho<1/k} \Big(\mu(\bar{B}_\varrho(.))/\mathcal{L}^n(B_\varrho(.))\Big)$$
borelmeßbar. Schließlich ist $D\mu$ auf der Borelmenge $[\overline{D}\mu = \underline{D}\mu]$ wohldefiniert und somit auch borelmeßbar.

$\square$

Damit können wir folgenden Differentiationssatz beweisen.

Satz 4.1 (Differentiationssatz) *Für ein Radon-Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ existiert $D\mu$ fast überall bezüglich $\mathcal{L}^n$ und μ und ist borelmeßbar mit $D\mu \in L^1_{loc}(\mathcal{L}^n)$, d.h. $\chi_{B_R(0)} D\mu \in L^1(\mathcal{L}^n)$, und es gilt*
$$\mu(A) = \int_A D\mu \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n + \mu(A \cap [\overline{D}\mu = \infty]) \tag{4.12}$$
für alle Borelmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und
$$\mathcal{L}^n(\overline{D}\mu = \infty) = 0. \tag{4.13}$$

Beweis:
Wie bereits bemerkt existieren $\underline{D}\mu$ und $\overline{D}\mu$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ und sind borelmeßbar.

Wir zeigen für alle $0 < \alpha < \infty$ und alle Borelmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$A \subseteq [\underline{D}\mu \leq \alpha] \Longrightarrow \mu(A) \leq \alpha \mathcal{L}^n(A), \tag{4.14}$$

$$A \subseteq [\overline{D}\mu \geq \alpha] \Longrightarrow \mu(A) \geq \alpha \mathcal{L}^n(A). \tag{4.15}$$

Zum Beweis von (4.14) können wir $\mathcal{L}^n(A) < \infty$ annehmen und zeigen zuerst

$$A \subseteq [\underline{D}\mu \leq \alpha] \Longrightarrow \mu(A) \leq 5^n \alpha \mathcal{L}^n(A). \tag{4.16}$$

Mit der Definition der unteren Dichte ist für jede offene Menge $U \supseteq A$ und $\gamma > \alpha$ die Familie

$$\mathcal{V} := \{\bar{B}_\varrho(x) \mid x \in A, \bar{B}_{5\varrho}(x) \subseteq U, \mu(\bar{B}_{5\varrho}(x)) < \gamma \mathcal{L}^n(\bar{B}_{5\varrho}(x)) \}$$

eine feine Überdeckung von $A \subseteq [\underline{D}\mu \leq \alpha]$. Mit dem Überdeckungssatz von Vitali, Lemma 4.4, existiert eine abzählbare, paarweise disjunkte Teilfamilie $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{V}'} \hat{B},$$

wobei $\hat{B}$ in Definition 4.2 definiert ist. Dies ergibt

$$\mu(A) \leq \sum_{B \in \mathcal{V}'} \mu(\hat{B}) \leq \gamma \sum_{B \in \mathcal{V}'} \mathcal{L}^n(\hat{B}) \leq 5^n \gamma \sum_{B \in \mathcal{V}'} \mathcal{L}^n(B) =$$

$$= 5^n \gamma \mathcal{L}^n(\bigcup_{B \in \mathcal{V}'} B) \leq 5^n \gamma \mathcal{L}^n(U),$$

und (4.16) folgt, da $\mathcal{L}^n$ mit Proposition 4.2 ein Radon-Maß ist.

Zum Beweis von (4.14) bemerken wir, daß auch die Familie

$$\mathcal{V}_1 := \{\bar{B}_\varrho(x) \mid x \in A, \bar{B}_\varrho(x) \subseteq U, \mu(\bar{B}_\varrho(x)) < \gamma \mathcal{L}^n(\bar{B}_\varrho(x)) \}$$

eine feine Überdeckung von $A \subseteq [\underline{D}\mu \leq \alpha]$. Mit dem Überdeckungssatz von Vitali, Lemma 4.4, existiert eine abzählbare, paarweise disjunkte Teilfamilie $\mathcal{V}_1' \subseteq \mathcal{V}_1$ mit

$$\mathcal{L}^n(A - \bigcup_{B \in \mathcal{V}_1'} B) = 0.$$

Da $A - \bigcup_{B \in \mathcal{V}_1'} B \subseteq [\underline{D}\mu \leq \alpha]$ eine Borelmenge ist, sehen wir zuerst mit (4.16)

$$\mu(A - \bigcup_{B \in \mathcal{V}_1'} B) \leq 5^n \gamma \mathcal{L}^n(A - \bigcup_{B \in \mathcal{V}_1'} B) = 0$$

und weiter

$$\mu(A) \leq \mu(\bigcup_{B \in \mathcal{V}_1'} B) = \sum_{B \in \mathcal{V}_1'} \mu(B) \leq \gamma \sum_{B \in \mathcal{V}_1'} \mathcal{L}^n(B) = \gamma \mathcal{L}^n(\bigcup_{B \in \mathcal{V}_1'} B) \leq \gamma \mathcal{L}^n(U),$$

und wieder folgt (4.14), da $\mathcal{L}^n$ mit Proposition 4.2 ein Radon-Maß ist.

//

Zum Beweis von (4.15) genügt es mit Proposition 1.1, da μ und $\mathcal{L}^n$ Borel-Maße sind,

$$\mu(A \cap B_R(0)) \geq \alpha \mathcal{L}^n(A \cap B_R(0)) \quad \text{für } R > 0$$

zu zeigen, also können wir $\mathcal{L}^n(A) < \infty$ annehmen. Wie oben ist mit der Definition der oberen Dichte für jede offene Menge $U \supseteq A$ und $\gamma < \alpha$ die Familie

$$\mathcal{V}_2 := \{\bar{B}_\varrho(x) \mid x \in A, \bar{B}_\varrho(x) \subseteq U, \mu(\bar{B}_\varrho(x)) > \gamma \mathcal{L}^n(\bar{B}_\varrho(x)) \}$$

eine feine Überdeckung von $A \subseteq [\overline{D}\mu \geq \alpha]$. Mit dem Überdeckungssatz von Vitali, Lemma 4.4, existiert eine abzählbare, paarweise disjunkte Teilfamilie $\mathcal{V}_2' \subseteq \mathcal{V}_2$ mit

$$\mathcal{L}^n(A - \bigcup_{B \in \mathcal{V}_2'} B) = 0.$$

Dies ergibt

$$\gamma \mathcal{L}^n(A) \leq \gamma \mathcal{L}^n(\bigcup_{B \in \mathcal{V}_2'} B) = \sum_{B \in \mathcal{V}_2'} \gamma \mathcal{L}^n(B) \leq \sum_{B \in \mathcal{V}_2'} \mu(B) = \mu(\bigcup_{B \in \mathcal{V}_2'} B) \leq \mu(U),$$

und (4.15) folgt, da μ ein Radon-Maß ist.

//

Zuerst betrachten wir für $R < \infty$ die Borelmenge $[\underline{D}\mu = 0] \cap B_R(0)$ und sehen mit (4.14) für alle $\alpha > 0$, daß

$$\mu([\underline{D}\mu = 0] \cap B_R(0)) \leq \alpha \mathcal{L}^n(B_R(0)) < \infty,$$

und für $\alpha \to 0,$ dann $R \to \infty$ mit Proposition 1.1

$$\mu([\underline{D}\mu = 0]) = 0. \tag{4.17}$$

Nun betrachten wir für $R < \infty$ die Borelmenge $[\overline{D}\mu = \infty] \cap B_R(0)$ und sehen mit (4.15) für alle $\alpha < \infty$, daß

$$\alpha \mathcal{L}^n([\overline{D}\mu = \infty] \cap B_R(0)) \leq \mu(B_R(0)) < \infty,$$

und für $\alpha \to \infty,$ dann $R \to \infty$ mit Proposition 1.1

$$\mathcal{L}^n([\overline{D}\mu = \infty]) = 0,$$

also (4.13). Nun betrachten wir für $0 < a < b < \infty, R < \infty$ die Borelmengen $A_{a,b,R} := [\underline{D}\mu < a < b < \overline{D}\mu] \cap B_R(0)$ und sehen mit (4.14) und (4.15), daß

$$b \mathcal{L}^n(A_{a,b,R}) \leq \mu(A_{a,b,R}) \leq a \mathcal{L}^n(A_{a,b,R}),$$

und, da $\mathcal{L}^n(A_{a,b,R}) \leq \mathcal{L}^n(B_R(0)) < \infty$, folgt $\mathcal{L}^n(A_{a,b,R}), \mu(A_{a,b,R}) = 0$ und mit abzählbarer Vereinigung über $a < b \in \mathbb{Q}, R \in \mathbb{Q}$, daß

$$\mathcal{L}^n([\underline{D}\mu < \overline{D}\mu]), \mu([\underline{D}\mu < \overline{D}\mu]) = 0. \tag{4.18}$$

Zusammen folgt $D\mu$ ist fast überall bezüglich $\mathcal{L}^n$ und μ auf $\mathbb{R}^n$ definiert, und wir sahen bereits, daß $D\mu$ borelmeßbar ist.

Eine beliebige Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ zerlegen für $\tau > 1$ in

$$A = A_\infty + A_{\neq} + A_- + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_j$$

mit

$$A_\infty := A \cap [\overline{D}\mu = \infty], \quad A_{\neq} := A \cap [\underline{D}\mu \neq \overline{D}\mu < \infty],$$
$$A_- := A \cap [D\mu = 0], \quad A_j := A \cap [\tau^{j-1} < D\mu \leq \tau^j].$$

Es gilt mit (4.14)

$$\mu(A_j) \leq \tau^j \mathcal{L}^n(A_j) \leq \tau \int\limits_{A_j} D\mu \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

und mit (4.15)

$$\tau^{-1} \int\limits_{A_j} D\mu \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq \tau^{j-1} \mathcal{L}^n(A_j) \leq \mu(A_j).$$

Weiter sehen wir mit (4.13)

$$\mathcal{L}^n(A_\infty) = 0 = \int\limits_{A_\infty} D\mu \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n,$$

mit (4.17)

$$\mu(A_-) = 0 = \int\limits_{A_-} D\mu \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n,$$

und mit (4.18)

$$\mu(A_{\neq}) = 0 = \mathcal{L}^n(A_{\neq}) = \int\limits_{A_{\neq}} D\mu \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

Zusammen ergibt dies

$$\mu(A) = \mu(A_\infty) + \mu(A_{\neq}) + \mu(A_-) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mu(A_j) \leq$$

$$\leq \mu(A \cap [\overline{D}\mu = \infty]) + \int\limits_{A_\infty + A_{\neq} + A_-} D\mu \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n + \tau \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{A_j} D\mu \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq$$

$$\leq \tau \int\limits_A D\mu \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n + \mu(A \cap [\overline{D}\mu = \infty]),$$

und genauso

$$\mu(A) \geq \tau^{-1} \int\limits_A D\mu \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n + \mu(A \cap [\overline{D}\mu = \infty]).$$

Lassen wir $\tau \searrow 1$, so erhalten wir (4.12). Insbesondere ergibt dies

$$\int\limits_{B_R(0)} D\mu \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq \mu(B_R(0)) < \infty,$$

also $D\mu \in L^1_{loc}(\mathcal{L}^n)$.

///

Bemerkungen:

1. Für ein Radon-Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ und $f \in L^1_{loc}(\mu)$, d.h. $\chi_{B_R(0)} f \in L^1(\mu)$, und $f \geq 0$ setzen wir

$$(f\mu)(S) := \inf_{B \supseteq S \text{ Borelmenge}} \int\limits_B f \,\mathrm{d}\mu \quad \text{für } S \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Mit Proposition 4.1 sieht man leicht, daß $f\mu$ ein Radon-Maß ist und

$$(f\mu)(A) = \int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu \quad \text{für } A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ meßbar bezüglich } \mu.$$

Weiter gilt

$$\int g \,\mathrm{d}(f\mu) = \int gf \,\mathrm{d}\mu \tag{4.19}$$

für alle $\mu-$meßbaren $g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ bzw. $\mu-$meßbaren $g \in L^1(f\mu)$, und im zweiten Fall ist $gf \in L^1(\mu)$.

2. Für ein Radon-Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ ist

$$\mu_{sing} := \mu\lfloor[\overline{D}\mu = \infty] \tag{4.20}$$

mit der Bemerkung nach Proposition 4.1 ein Radon-Maß, und mit (4.12) gilt

$$\mu = D\mu \,\mathcal{L}^n + \mu_{sing},$$

zuerst auf allen Borelmengen, und dann auf allen Mengen, da alle drei Maße Radon-Maße, insbesondere borelregulär sind.

3. Ist das Radon-Maß μ absolut-stetig bezüglich $\mathcal{L}^n$, d.h.

$$\mathcal{L}^n(A) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0$$

für alle Borelmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$, so folgt in obigem Satz mit (4.13)

$$\mu(\overline{D}\mu = \infty) = 0,$$

also

$$\mu(A) = \int\limits_A D\mu \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n \tag{4.21}$$

für alle Borelmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\square$

Definition 4.4 *Für* $f \in L^1_{loc}(\mathcal{L}^n)$ *, d.h.* $\chi_{B_R(0)} f \in L^1(\mathcal{L}^n)$ *, heißt* $x \in \mathbb{R}^n$ *ein Lebesguepunkt von* $f \in L^1_{loc}(\mathcal{L}^n)$ *, wenn*

$$\lim_{\varrho \to 0} \mathcal{L}^n(B_\varrho(x))^{-1} \int\limits_{B_\varrho(x)} |f - f(x)| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = 0.$$

$\square$

Proposition 4.5 *Für* $f \in L^1_{loc}(\mathcal{L}^n)$ *sind* $\mathcal{L}^n$*–fast alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *Lebesguepunkte.*

Beweis:
Fuer beliebiges $r \in \mathbb{R}$ ist auch $|f - r| \in L^1_{loc}(\mathcal{L}^n)$ und wir betrachten die Radon-Maße $\mu_r := |f - r|\mathcal{L}^n$. Klarerweise ist μ_r absolut-stetig bezüglich $\mathcal{L}^n$, und mit dem Differentiationssatz, Satz 4.1, existieren die Dichten $D\mu_r \in L^1_{loc}(\mathcal{L}^n)$, und mit (4.21) gilt

$$\int\limits_A |f - r| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \mu_r(A) = \int\limits_A D\mu_r \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

für alle Borelmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq [|f - r| > D\mu_r]$ erhalten wir

$$\int\limits_K D\mu_r \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_K |f - r| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n < \infty,$$

also

$$\int\limits_K (|f - r| - D\mu_r) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = 0.$$

Da $|f - r| - D\mu_r > 0$ auf $K \subseteq [|f - r| > D\mu_r]$, folgt mit Proposition 1.6 (1.21)

$$\mathcal{L}^n(K) = 0,$$

und, da $[|f - r| > D\mu_r]$ meßbar bezüglich $\mathcal{L}^n$ ist, erhalten wir $\mathcal{L}^n(|f - r| > D\mu_r) = 0$ mit den Propositionen 4.1 und 4.2. Genauso erhalten wir $\mathcal{L}^n(|f - r| < D\mu_r) = 0$ und zusammen

$$|f - r| = D\mu_r \quad \text{fast überall bezüglich } \mathcal{L}^n,$$

d.h. außerhalb einer $\mathcal{L}^n$ – Nullmenge $N_r \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist auch $N := \cup_{q \in \mathbb{Q}} N_q$ eine Nullmenge bezüglich $\mathcal{L}^n$, und wir sehen für $x \in \mathbb{R}^n - N$ und beliebiges $q \in \mathbb{Q}$

$$|f(x) - q| = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mu_q(B_\varrho(x))}{\mathcal{L}^n(B_\varrho(x))} = \lim_{\varrho \to 0} \mathcal{L}^n(B_\varrho(x))^{-1} \int\limits_{B_\varrho(x)} |f - q| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

Dies ergibt

$$\limsup_{\varrho \to 0} \mathcal{L}^n(B_\varrho(x))^{-1} \int\limits_{B_\varrho(x)} |f - f(x)| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq$$

$$\leq \limsup_{\varrho \to 0} \mathcal{L}^n(B_\varrho(x))^{-1} \int\limits_{B_\varrho(x)} (|f - q| + |q - f(x)|) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = 2|f(x) - q| \quad \text{für alle } q \in \mathbb{Q}$$

und für $q \to f(x)$

$$\limsup_{\varrho\to 0} \mathcal{L}^n(B_\varrho(x))^{-1} \int\limits_{B_\varrho(x)} |f - f(x)| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = 0,$$

also ist $x \in \mathbb{R}^n - N$ ein Lebesguepunkt von f.

///

Proposition 4.6 *In Satz 4.1 gilt für $\mathcal{L}^n$−fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ für alle Borelmengen $B \subseteq B_1(0)$ mit $\mathcal{L}^n(B) > 0$*

$$D\mu(x) = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\mu(x+\varrho B)}{\mathcal{L}^n(x+\varrho B)}. \tag{4.22}$$

Beweis:
Mit dem Differentiationssatz, Satz 4.1, angewandt auf das Radon-Maß μ_{sing} in (4.20) ergibt sich

$$\mu_{sing}(A) \geq \int\limits_A D\mu_{sing} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \quad \text{für alle Borelmengen } A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Für die Borelmenge $Z := [\overline{D}\mu = \infty]$ sehen wir $\mu_{sing}(\mathbb{R}^n - Z) = (\mu\lfloor Z)(\mathbb{R}^n - Z) = 0 = \mathcal{L}^n(Z)$ mit (4.13) und erhalten

$$\int\limits_A D\mu_{sing} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_{A-Z} D\mu_{sing} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq \mu_{sing}(A - Z) = 0.$$

Wählen wir insbesondere $A := [D\mu_{sing} > 0]$, so erhalten wir $D\mu_{sing} = 0$ fast überall bezüglich $\mathcal{L}^n$.

Mit Proposition 4.5 sind $\mathcal{L}^n$ − fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ Lebesguepunkte von $D\mu \in L^1_{loc}(\mathcal{L}^n)$ und erfüllen weiter $\overline{D}\mu_{sing}(x) = 0$. Für solche $x \in \mathbb{R}^n$ sehen wir mit dem Differentiationssatz, Satz 4.1,

$$\limsup_{\varrho\to 0} \Big| \frac{\mu(x+\varrho B)}{\mathcal{L}^n(x+\varrho B)} - D\mu(x) \Big| =$$

$$= \limsup_{\varrho\to 0} \Big| \mathcal{L}^n(x+\varrho B)^{-1} \Big(\int\limits_{x+\varrho B} D\mu \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n + \mu_{sing}(x+\varrho B) \Big) - D\mu(x) \Big| \leq$$

$$\leq \limsup_{\varrho\to 0} \mathcal{L}^n(x+\varrho B)^{-1} \int\limits_{x+\varrho B} |D\mu - D\mu(x)| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n + \limsup_{\varrho\to 0} \frac{\mu_{sing}(x+\varrho B)}{\mathcal{L}^n(x+\varrho B)} \leq$$

$$\leq \frac{\mathcal{L}^n(B_1(0))}{\mathcal{L}^n(B)} \Big(\limsup_{\varrho\to 0} \mathcal{L}^n(B_\varrho(x))^{-1} \int\limits_{B_\varrho(x)} |D\mu - D\mu(x)| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n + \limsup_{\varrho\to 0} \frac{\mu_{sing}(B_\varrho(x))}{\mathcal{L}^n(B_\varrho(x))} \Big) =$$

$$= \frac{\mathcal{L}^n(B_1(0))}{\mathcal{L}^n(B)} \Big(0 + \overline{D}\mu_{sing}(x) \Big) = 0,$$

und wir erhalten (4.22).

///

Als Korollar ergibt sich folgender berühmte Satz von Lebesgue.

Korollar 4.2 (Lebesgue) *Es sei* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *monoton nichtfallend. Dann ist* φ *in* $\mathcal{L}^1$*−fast allen* $t \in \mathbb{R}$ *differenzierbar, und es gilt*

$$\int_a^b \varphi' \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 \leq \varphi(b) - \varphi(a) \quad \forall -\infty < a < b < \infty.$$

Gleichheit gilt, falls φ *stetig und außerhalb einer abzählbaren Menge differenzierbar ist.*

Beweis:
Wir bezeichnen mit $\varphi(b-) := \lim_{t\uparrow b} \varphi(t)$ bzw. $\varphi(a+) := \lim_{t\downarrow a} \varphi(t)$ links- bzw. rechtsseitige Grenzwerte, die existieren, da φ monoton ist. Wir definieren das Lebesgue-Stieltjes-Maß durch

$$\mu(S) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi(b_k-) - \varphi(a_k+)) \mid S \subseteq \cup_{k=1}^{\infty}]a_k, b_k[, a_k < b_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

für $S \subseteq \mathbb{R}$.

Ähnlich wie beim Lebesgue-Maß sieht man, daß Intervalle $]a, b[$ meßbar bezüglich μ sind und

$$\mu(]a, b[) = \varphi(b-) - \varphi(a+), \quad \mu(\{a\}) = \varphi(a+) - \varphi(a-). \tag{4.23}$$

Damit ist μ ein Borel-Maß, und wie in Proposition 4.2 sehen wir mit Proposition 4.1, daß μ ein Radon-Maß ist.

Mit dem Differentiationssatz, Satz 4.1, erhalten wir die Zerlegung $\mu = f\mathcal{L}^1 + \mu_{sing}$ mit $f \in L^1_{loc}(\mathcal{L}^1)$ und weiter mit Proposition 4.6 ein $N \subseteq \mathbb{R}$ mit $\mathcal{L}^1(N) = 0$, so daß für alle $t \in \mathbb{R} - N$ und alle Borelmengen $B \subseteq] -1, 1[$ mit $\mathcal{L}^1(B) > 0$

$$f(t) = \lim_{\varrho\downarrow 0} \frac{\mu(t + \varrho B)}{\mathcal{L}^1(t + \varrho B)} < \infty. \tag{4.24}$$

Wählen wir $B = [0, 1[$ so erhalten wir mit (4.23)

$$f(t) = \lim_{\varrho\downarrow 0} \frac{\varphi(t + \varrho-) - \varphi(t-)}{\varrho} \quad \forall t \in \mathbb{R} - N. \tag{4.25}$$

Daraus folgt zuerst

$$\varphi(t+) = \lim_{s\downarrow t} \varphi(s) = \lim_{s\downarrow t} \varphi(s-) = \varphi(t-),$$

also $\varphi(t) = \varphi(t+) = \varphi(t-)$, und φ ist stetig in t .

Betrachten wir $\varrho + \delta \searrow \varrho$, so folgt

$$f(t) = \lim_{\varrho\downarrow 0} \frac{\varphi(t + \varrho+) - \varphi(t)}{\varrho}$$

und, da $\varphi(t + \varrho-) \leq \varphi(t + \varrho) \leq \varphi(t + \varrho+)$,

$$f(t) = \lim_{\varrho\downarrow 0} \frac{\varphi(t + \varrho) - \varphi(t)}{\varrho}.$$

Damit existiert die rechtseitige Ableitung von φ in t und ist $f(t)$. Wählen wir $B =]-1,0]$, so erhalten wir die gleiche Aussage für die linksseitige Ableitung. Zusammen ist φ differenzierbar in t und $\varphi'(t) = f(t)$. Wir erhalten

$$\varphi(b-) - \varphi(a+) = \mu(]a,b[) = \int_a^b \varphi' \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 + \mu_{sing}(]a,b[),$$

insbesondere

$$\varphi(b) - \varphi(a) \geq \varphi(b-) - \varphi(a+) \geq \int_a^b \varphi' \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1.$$

Ist φ differenzierbar in $t \in \mathbb{R}$, so gilt $D\mu(t) = \varphi'(t) < \infty$, und mit dem Differentiationssatz, Satz 4.1, folgt

$$\mu_{sing} = \mu\lfloor[\overline{D}\mu = \infty] \leq \mu\lfloor\{t \in \mathbb{R} \mid \varphi \text{ nicht differenzierbar in } t\}.$$

Ist φ stetig, so folgt mit (4.23), daß $\mu(\{t\}) = 0$, also $\mu(C) = 0$ für alle abzählbaren $C \subseteq \mathbb{R}$. Zusammen ergibt sich, ist φ stetig und außerhalb einer abzählbaren Menge differenzierbar, so gilt $\mu_{sing} = 0$ und

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi' \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1.$$

///

Nun kommen wir zum Beweis der Substitutionsformel.

Satz 4.3 (Substitutionsformel) *Es sei $\varphi : U \xrightarrow{\approx} V$ eine lokale Bilipschitzabbildung zwischen zwei offenen Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Dann gilt für das Bildmaß , siehe Defintion 1.11, des Lebesguemaßes

$$\varphi_*^{-1}(\mathcal{L}^n\lfloor V)(A) = \int_A |\det D\varphi| \, \mathrm{d}(\mathcal{L}^n\lfloor U) \tag{4.26}$$

für alle Borelmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und weiter

$$\int_V f \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int_U (f \circ \varphi)|\det D\varphi| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

für alle $\mathcal{L}^n-$meßbaren $f : V \to [0,\infty]$ bzw. $\mathcal{L}^n-$meßbaren $f \in L^1(\mathcal{L}^n\lfloor V)$, und im zweiten Fall ist $(f \circ \varphi)|\det D\varphi| \in L^1(\mathcal{L}^n\lfloor U)$.

Beweis:
Es genügt, (4.26) zu beweisen. Dazu betrachten wir zuerst borelmeßbares $f = \chi_B$ auf V , d.h. $B \subseteq V$ ist eine Borlemenge, und sehen $A := \varphi^{-1}(B) \subseteq U$ ist mit der Stetigkeit von φ eine Borelmenge und $\chi_B \circ \varphi = \chi_A$. Dann folgt mit (4.26), dass

$$\int_V \chi_B \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = (\mathcal{L}^n\lfloor V)(B) = (\mathcal{L}^n\lfloor V)(\varphi(A)) = \varphi_*^{-1}(\mathcal{L}^n\lfloor V)(A) =$$

$$= \int\limits_A |\det D\varphi| \, \mathrm{d}(\mathcal{L}^n \lfloor U) = \int\limits_U \chi_A |\det D\varphi| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_U (\chi_B \circ \varphi) |\det D\varphi| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

Durch Approximation mit Proposition 1.3 folgt nun die zweite Identität für alle borelmeßbaren $f : V \to [0, \infty]$ bzw. borelmeßbaren $f \in L^1(\mathcal{L}^n \lfloor V)$, und im zweiten Fall ist $(f \circ \varphi)|\det D\varphi| \in L^1(\mathcal{L}^n \lfloor U)$.

Für $\mathcal{L}^n-$meßbares f auf V erhalten wir mit Proposition 4.1 ein borelmeßbares g auf V mit $\mathcal{L}^n(f \neq g) = 0$. Mit Proposition A.2 sehen wir

$$\mathcal{L}^n(f \circ \varphi \neq g \circ \varphi) = \mathcal{L}^n(\varphi^{-1}(f \neq g)) = 0,$$

also

$$\int\limits_V f \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_V g \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_U (g \circ \varphi)|\det D\varphi| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_U (f \circ \varphi)|\det D\varphi| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

Zum Beweis von (4.26) betrachten wir die stetige Abbildung $\psi := \varphi^{-1} : V \to \mathbb{R}^n$ und das Maß $\mu := \psi_*(\mathcal{L}^n) = \psi_*(\mathcal{L}^n \lfloor V)$ auf $\mathbb{R}^n$, also

$$\mu(S) := \mathcal{L}^n(\psi^{-1}(S)) = \mathcal{L}^n(\varphi(S \cap U)) \quad \forall S \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Für alle offenen Mengen $W \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\psi^{-1}(W) \subseteq V$ offen, da $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ stetig ist, und mit Proposition 1.10 sind alle offenen $W \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar bezüglich μ , folglich ist μ ein Borel-Maß.

Zuerst nehmen wir U, V als beschränkt an. Dann gilt $\mu(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^n(V) < \infty$. Für $S \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ wählen wir eine offene Menge $\varphi(S \cap U) \subseteq W' \subseteq V$ mit $\mathcal{L}^n(W') \leq \mathcal{L}^n(\varphi(S \cap U)) + \varepsilon = \mu(S) + \varepsilon$ und eine kompakte Menge $K \subseteq V$ mit $\mathcal{L}^n(V - K) < \varepsilon$. Dann ist $W := (\mathbb{R}^n - \psi(K)) \cup \varphi^{-1}(W') \supseteq S$ offen und

$$\mu(W) = \mathcal{L}^n(\varphi(W \cap U)) = \mathcal{L}^n((V - K) \cup W') \leq \mu(S) + 2\varepsilon.$$

Mit Proposition 4.1 ist μ ein Radon-Maß.

Da φ lokal lipschitz ist, folgt mit Proposition A.2 für alle $S \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{L}^n(S) = 0$, daß

$$\mu(S) = \mathcal{L}^n(\varphi(S \cap U)) = 0,$$

insbesondere ist μ absolut-stetig bezüglich $\mathcal{L}^n$. Mit dem Differentiationssatz, Satz 4.1, und (4.21) folgt

$$\mu(A) = \mu(A \cap U) = \int\limits_{A \cap U} D\mu \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_A D\mu \, \mathrm{d}(\mathcal{L}^n \lfloor U)$$

für alle Borelmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$. (4.26) folgt, wenn wir zeigen

$$D\mu(x) := \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\varphi(B_\varrho(x)))}{\mathcal{L}^n(B_\varrho(x))} = |\det D\varphi(x)| \quad \text{für } \mathcal{L}^n - \text{fast alle } x \in U. \tag{4.27}$$

Mit Proposition A.4 gilt für $\mathcal{L}^n-$fast alle $x \in U$, daß φ in x, φ^{-1} in $y = \varphi(x) \in V$ differenzierbar ist und $D\varphi(x)^{-1} = D\varphi^{-1}(y)$. Ist $D\varphi(x) = I_n$, so auch $D\varphi^{-1}(y) = I_n$. Für $\varepsilon > 0$ beliebig und ϱ genügend klein gilt

$$\varphi(B_\varrho(x)) \subseteq B_{(1+\varepsilon)\varrho}(y),$$
$$\varphi^{-1}(B_\varrho(y)) \subseteq B_{(1-\varepsilon)^{-1}\varrho}(x),$$

also für ϱ noch kleiner

$$B_{(1-\varepsilon)\varrho}(y) \subseteq \varphi(B_\varrho(x)) \subseteq B_{(1+\varepsilon)\varrho}(y).$$

Dies ergibt

$$(1-\varepsilon)^n \le \frac{\mathcal{L}^n(\varphi(B_\varrho(x)))}{\mathcal{L}^n(B_\varrho(x))} \le (1+\varepsilon)^n$$

und

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\varphi(B_\varrho(x)))}{\mathcal{L}^n(B_\varrho(x))} = 1 = \det I_n = |\det D\varphi(x)|,$$

also (4.27).

Allgemein setzen wir $M := D\varphi(x)^{-1} = D\varphi^{-1}(y), \tilde{\varphi} := M \circ \varphi$ und sehen $D\tilde{\varphi}(x) = I_n$. Mit dem eben Bewiesenen und Proposition 4.2 folgt

$$1 = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(M\varphi(B_\varrho(x)))}{\mathcal{L}^n(B_\varrho(x))} = |\det M| \lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\varphi(B_\varrho(x)))}{\mathcal{L}^n(B_\varrho(x))},$$

also

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(\varphi(B_\varrho(x)))}{\mathcal{L}^n(B_\varrho(x))} = |\det M|^{-1} = |\det D\varphi(x)|,$$

und (4.27) ist bewiesen.

Schließlich betrachten wir allgemeines U, V . Für $\overline{B_\varrho(x)} \subseteq U$ ist $\varphi(B_\varrho(x)) \subseteq \varphi(\overline{B_\varrho(x)}) \subseteq V$ beschränkt, da $\varphi(\overline{B_\varrho(x)})$ kompakt ist. Nach dem oben Bewiesenen gilt für alle Borelmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dass

$$\mu(B_\varrho(x) \cap A) = \varphi_*^{-1}(\mathcal{L}^n \lfloor V)(B_\varrho(x) \cap A) = \varphi_*^{-1}(\mathcal{L}^n \lfloor \varphi(B_\varrho(x)))(A) =$$
$$= \int_A |\det D\varphi| \,\mathrm{d}(\mathcal{L}^n \lfloor B_\varrho(x)) = \int_{B_\varrho(x)\cap A} |\det D\varphi| \,\mathrm{d}(\mathcal{L}^n \lfloor U)$$

und mit geeigneter Zerlegung

$$\mu(A) = \int_A |\det D\varphi| \,\mathrm{d}(\mathcal{L}^n \lfloor U) \quad \text{für alle Borelmengen } A \subseteq U.$$

Da

$$\mu(\mathbb{R}^n - U) = 0 = \int_{\mathbb{R}^n - U} |\det D\varphi| \,\mathrm{d}(\mathcal{L}^n \lfloor U),$$

folgt (4.26), und die Proposition ist bewiesen.

///

Bemerkung:

Für $S \subseteq \mathbb{R}^n$ wählen wir eine Borelmenge $\varphi(S \cap U) \subseteq B' \subseteq V$ mit $\mathcal{L}^n(B') = \mathcal{L}^n(\varphi(S \cap U)) = \mu(S)$. Dann ist $B := (\mathbb{R}^n - U) \cup \varphi^{-1}(B') \supseteq S$ eine Borelmenge und

$$\mu(B) = \mathcal{L}^n(\varphi(B \cap U)) = \mathcal{L}^n(B') = \mu(S).$$

Daher ist μ borelregulär, und es folgt

$$\varphi_*^{-1}(\mathcal{L}^n \lfloor V) = |\det D\varphi| \,(\mathcal{L}^n \lfloor U).$$

□

Teil II
Integralsätze

5 Divergenzsatz - Der Integralsatz von Gauß

In diesem Paragraphen beweisen wir den Divergenzsatz bzw. Integralsatz von Gauß unter sehr schwachen Lipschitzannahmen für den Rand.

Definition 5.1 *Eine nicht-leere Menge* $M \subseteq \mathbb{R}^m$ *heißt eine* $C^k - n-$ *bzw. Lipschitz*$-n-$*Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^m, n \in \mathbb{N}$ *, wenn für jedes* $x \in M$ *eine offene Umgebung* $V \subseteq \mathbb{R}^m$ *von* x *und eine* C^k- *bzw. Bilipschitzabbildung* $\Phi : U \xrightarrow{\approx} M \cap V$ *existiert, die ein Homöomorphismus einer offenen Menge* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *auf die in* M *offene Menge* $M \cap V$ *ist und*

$$rang\ D\Phi(y) = n \quad \text{für alle bzw. für } \mathcal{L}^n - \text{fast alle } y \in U.$$

Wir nennen Φ *eine lokale Parametrisierung von* M *.*

Für eine lokale Parametrisierung Φ *definieren wir die Riemannsche Metrik*

$$g_{ij} := \langle \partial_i \Phi, \partial_j \Phi \rangle,$$

$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}, g = \det(g_{ij})$ *und das induzierte Maß auf* U *durch*

$$\mu_g := \sqrt{g}\ \mathcal{L}^n \lfloor U.$$

Das Flächen- bzw. Volumenmaß auf M *ist definiert durch*

$$area_M \lfloor (M \cap V) = vol_M \lfloor (M \cap V) := \Phi_* \mu_g. \tag{5.1}$$

Der Tangentialraum an M *ist definiert durch*

$$T_{\Phi(y)} M := im\ D\Phi(y)$$

und der Normalenraum durch $N_{\Phi(y)} M = T_{\Phi(y)} M^{\perp}$ *für alle bzw.* $\mathcal{L}^n$*–fast alle* $y \in U$ *.*

□

Bemerkungen:

1. Für obige lokale Parametrierung Φ wählen wir $y \in U$ mit $\Phi(y) = x$ und eine offene Umgebung $W(y)$ von y mit kompaktem Abschluss $\overline{W(y)} \subseteq U$. Dann existieren abzählbar viele lokale Parametrierungen $\Phi_l : U_l \xrightarrow{\approx} M \cap V_l$ und offene Mengen mit kompaktem Abschluss $\overline{W(y_l)} \subseteq U_l$, so dass

$$M = \cup_{l=1}^{\infty} \Phi_l(\overline{W(y_l)})$$

die abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist, insbesondere ist M eine Borelmenge in $\mathbb{R}^m$.

2. Oben ist $\mu_g := \sqrt{g}\ \mathcal{L}^n \lfloor U$ definiert durch

$$\mu_g(S) := \inf_{B \supseteq S \text{ Borelmenge}} \int_B \sqrt{g}\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n \lfloor U \quad \text{für } S \subseteq U,$$

insbesondere ist μ_g borelregulär auf U . Da Φ ein Homöomorphismus ist, ist $\Phi_* \mu_g$ borelregulär auf $M \cap V$. Für eine Partition $M = \sum_{l=1}^{\infty} B_l$ mit Borelmengen $B_l \subseteq M \cap V_l$ erfüllt jedes Volumenmaß vol_M auf M , das darüberhinaus ein Borel-Maß ist,

$$vol_M(S) = \sum_{l=1}^{\infty} (\Phi_{l,*} \mu_{g_l})(S \cap B_l) \quad \text{für } S \subseteq M. \tag{5.2}$$

Damit gibt es höchstens ein Volumenmaß auf M , das ein Borel-Maß ist.

Wählen wir umgekehrt (5.2) als Definition von vol_M , so ist dieses vol_M ein borelreguläres Maß auf M und erfüllt mit der folgenden Proposition für jede lokale Parametrisierung (5.1). Dies zeigt die Existenz eines Volumenmaß auf M , das borelregulär ist.

3. Tatsächlich ist das Volumenmaß auf M unter allen Maßen eindeutig. Denn sei $\widetilde{vol}_M$ ein Volumenmaß auf M , und $K_l \subseteq B_l \subseteq M \cap V_l$ seien kompakte Mengen. Wir zeigen

$$\widetilde{vol}_M(S) \geq \sum_{l=1}^{\infty} (\Phi_{l,*} \mu_{g_l})(S \cap K_l) \quad \text{für } S \subseteq M. \tag{5.3}$$

Für $L \in \mathbb{N}$ wählen wir paarweise disjunkte, offene Mengen $W_1, \ldots, W_L$ mit $K_l \subseteq W_l \subseteq V_l$ und betrachten die offenen Mengen $U'_l := \Phi_l^{-1}(W_l \cap M) \subseteq U_l$. Mit der Diffeomorphie $\mathbb{R}^n \cong B_1(0)$ können wir $U_l \subseteq B_1(0)$ und nach Translation die paarweise Disjunktheit der U_l annehmen. Damit definieren wir die lokale Parametrisierung $\Phi : \sum_l U'_l \xrightarrow{\approx} \sum_l (W_l \cap M)$ mit $\Phi | U'_l := \Phi_l | U'_l$ und erhalten mit (5.1), da $\widetilde{vol}_M \lfloor \sum_l (W_l \cap M) = \Phi_* \mu_g$ borelregulär ist und K_l kompakt, also Borelmengen sind, dass

$$\widetilde{vol}_M(S) \geq (\Phi_* \mu_g)(S \cap \sum_{l=1}^{L} K_l) = \sum_{l=1}^{L} (\Phi_* \mu_g)(S \cap K_l) = \sum_{l=1}^{L} (\Phi_{l,*} \mu_{g_l})(S \cap K_l),$$

also (5.3) mit $L \to \infty$.

Nun betrachten wir die Borelmengen $A_l := \Phi_l^{-1}(B_l) \subseteq U_l \subseteq B_1(._l)$ und wählen mit den Proposition 4.1 und 4.2 kompakte Mengen $C_l^m \subseteq A_l$ mit $\mathcal{L}^n(A_l - C_l^m) \to 0$ für $m \to \infty$. Wählen wir o.B.d.A. $B_l \subseteq \Phi_l(\overline{W(y_l)}) \subseteq M \cap V_l$, also $A_l \subseteq \overline{W(y_l)} \subseteq U_l$ kompakt enthalten, so ergibt dies

$$\mu_{g_l}(A_l - C_l^m) = \int_{A_l - C_l^m} \sqrt{g_l}\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n \to 0 \quad \text{für } m \to \infty.$$

Dann sind $K_l^m := \Phi_l(C_l^m) \subseteq B_l$ kompakt mit

$$\widetilde{vol}_M(B_l - K_l^m) = (\Phi_{l,*} \mu_{g_l})(B_l - K_l^m) = \mu_{g_l}(A_l - C_l^m) \to 0 \quad \text{für } m \to \infty,$$

und mit (5.3) folgt

$$\widetilde{vol}_M(S) \geq \sum_{l=1}^{L} (\Phi_{l,*}\mu_{g_l})(S \cap K_l^m) \to \sum_{l=1}^{L} (\Phi_{l,*}\mu_{g_l})(S \cap B_l),$$

also

$$\widetilde{vol}_M(S) \geq \sum_{l=1}^{\infty} (\Phi_{l,*}\mu_{g_l})(S \cap B_l)$$

für $L \to \infty$. Da die umgekehrte Ungleichung aus der $\sigma-$Subadditivität von $\widetilde{vol}_M$ folgt, erhalten wir $vol_M = \widetilde{vol}_M$ mit (5.2), und somit die Eindeutigkeit des Volumenmaß auf M .

$\square$

Die Wohldefiniertheit des Volumenmaßes ergibt sich aus obigen Bemerkungen und der Substitutionsformel.

Proposition 5.1 *$M \subseteq \mathbb{R}^m$ sei eine $C^k - n-$ bzw. Lipschitz$-n-$Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m, n, k \in \mathbb{N}$, und $\Phi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\approx} M \cap V_\alpha, \alpha = 1, 2,$ seien zwei lokale Parametrisierungen mit Metriken g_α und Übergangsabbildung*

$$\varphi_{12} := \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : U_{12} := \Phi_1^{-1}(M \cap V_1 \cap V_2) \xrightarrow{\approx} U_{21} := \Phi_2^{-1}(M \cap V_1 \cap V_2).$$

Dann transformieren sich die Metriken durch

$$g_{1,ij} = \partial_i \varphi_{12}^k \partial_j \varphi_{12}^l (g_{2,kl} \circ \varphi_{12}),$$
$$g_1 = |\det D\varphi_{12}|^2 (g_2 \circ \varphi_{12}).$$

Insbesondere gilt

$$\Phi_{1,*}(\mu_{g_1} \lfloor U_{12}) = \Phi_{2,*}(\mu_{g_2} \lfloor U_{21}),$$

und das Volumenmaß auf M ist mit abzählbarer Überdeckung wohldefiniert.

Weiter gilt

$$im\ D\Phi_1(y) = im\ D\Phi_2(\varphi_{12}(y))$$

für alle bzw. $\mathcal{L}^n-$fast alle $y \in U$, und der Tangentialraum an M ist überall bzw. vol_M-fast überall wohldefiniert.

Beweis:
Klarerweise ist φ_{12} bilipschitz und mit dem inversen oder impliziten Funktionensatz ergibt sich $\varphi_{12} \in C^k$. Mit $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \varphi_{12}$ auf U_{12} sehen wir

$$g_{1,ij} = \langle \partial_i \Phi_1, \partial_j \Phi_1 \rangle = \langle \partial_i \varphi_{12}^k ((\partial_k \Phi_2) \circ \varphi_{12}), \partial_j \varphi_{12}^l ((\partial_l \Phi_2) \circ \varphi_{12}) \rangle =$$
$$= \partial_i \varphi_{12}^k \partial_j \varphi_{12}^l (g_{2,kl} \circ \varphi_{12}).$$

Als Matrizen schreibt sich dies als $(g_{1,ij}) = (D\varphi_{12})^T (g_{2,kl} \circ \varphi_{12}) D\varphi_{12}$, und wir erhalten

$$g_1 = |\det D\varphi_{12}|^2 (g_2 \circ \varphi_{12}).$$

Schließlich rechnen wir mit Proposition 1.10 und der Substitutionsformel, Satz 4.3,

$$(\varphi_{12}^{-1})_*\mu_{g_2}\lfloor U_{21} = (\varphi_{12}^{-1})_*(\sqrt{g_2}\mathcal{L}^n\lfloor U_{21}) = |\det D\varphi_{12}|(\sqrt{g_2}\circ\varphi_{12})\mathcal{L}^n\lfloor U_{12} =$$
$$= \sqrt{g_1}\mathcal{L}^n\lfloor U_{12} = \mu_{g_1}\lfloor U_{12},$$

also

$$\Phi_{2,*}(\mu_{g_2}\lfloor U_{21}) = \Phi_{1,*}(\varphi_{12}^{-1})_*(\mu_{g_2}\lfloor U_{21}) = \Phi_{1,*}(\mu_{g_1}\lfloor U_{12}).$$

Für $y \in U_{12}$ bzw. mit dem Satz von Rademacher, Satz A.1, und Proposition A.4 für $\mathcal{L}^n-$ fast alle $y \in U_{12}$ sind Φ_1, φ_{12} differenzierbar in y, Φ_2 differenzierbar in $\varphi_{12}(y), D\varphi_{12}(y) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist nicht-singulär und $D\Phi_1(y) = D\Phi_2(\varphi_{12}(y))D\varphi_{12}(y)$. Daraus folgt

$$im\ D\Phi_1(y) = im\ D\Phi_2(\varphi_{12}(y)).$$

///

Definition 5.2 *Eine offene Menge* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *hat* C^k- *bzw.* $C^{0,1}$ *-Rand oder Lipschitzrand, wenn zu jedem* $x \in \partial\Omega$ *ein* $\varrho > 0$ *und eine* C^k- *bzw. Lipschitzabbildung* $\varphi : B_\varrho^{n-1}(0) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}, \varphi(0) = 0$ *existieren, so daß nach einer Rotation*

$$(\Omega - x) \cap B_\varrho(0) = \{(y,t) \in B_\varrho^{n-1}(0) \times \mathbb{R} \mid t > \varphi(y)\ \} \cap B_\varrho(0). \tag{5.4}$$

Insbesondere ist $\partial\Omega$ *eine* $C^k - (n-1)-$ *bzw. Lipschitz*$-(n-1)-$*Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^n$ *. Die äußere Einheitsnormale an* $\partial\Omega$ *ist gegeben für alle bzw. fast alle* $y \in B_\varrho^{n-1}(0)$ *mit* $(y,\varphi(y)) \in B_\varrho(x)$, *insbesondere* $(y,\varphi(y)) \in \partial\Omega$, *durch*

$$\nu_\Omega(y,\varphi(y)) = \frac{(\nabla\varphi(y), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi(y)|^2}} \tag{5.5}$$

und die Determinante der Metrik der lokalen Parametrisierung $y \mapsto (y,\varphi(y))$

$$g = 1 + |\nabla\varphi|^2, \tag{5.6}$$

wie man leicht sieht, wenn man o.B.d.A. nach einer Rotation im Parameterbereich $\nabla\varphi(y) = \partial_1\varphi(y)e_1, e_1 = (1, 0\ldots)$ *annimmt.*

□

Satz 5.1 (Divergenzsatz - Integralsatz von Gauß) *Es sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *beschränkt, offen und mit Lipschitzrand und* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *lipschitzstetig.*

Dann gilt

$$\int_\Omega div\ f\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int_{\partial\Omega} f\nu_\Omega\ \mathrm{d}area_{\partial\Omega}. \tag{5.7}$$

Beweis:
Mit Proposition A.1 setzen wir f zu einer Lipschitzabbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fort.

Gilt $supp\, f \subseteq \Omega \subseteq]-R,R[^n$ mit $R > 0$ geeignet, so ist $t \mapsto f(y,t)$ für festes $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ lipschitz und mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}$. Mit Proposition A.3 folgt

$$\int_\mathbb{R} \frac{d}{dt} f_n(y,t)\ \mathrm{d}t = f_n(y,R) - f_n(y,-R) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^{n-1}$$

und mit dem Satz von Fubini, Satz 3.1

$$\int\limits_{\Omega} \partial_n f_n \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_n f_n \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} \partial_n f_n(y,t) \ \mathrm{d}t \ \mathrm{d}y = 0,$$

also

$$\int\limits_{\Omega} div \ f \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = 0 = \int\limits_{\partial\Omega} f\nu_{\Omega} \ \mathrm{d}area_{\partial\Omega},$$

da $f = 0$ auf $\partial\Omega$.

Nun betrachten wir $x \in \partial\Omega, \varrho > 0$ mit (5.4) für eine Lipschitzabbildung φ , und o.B.d.A. sei $x = 0$. Für $\Lambda := 2(Lip\ \varphi + 1), r := \varrho/(2\Lambda)$,

$$Z := B_r^{n-1}(0) \times] - \Lambda r, \Lambda r[$$

sehen wir

$$\Omega \cap Z = \{(y,t) \mid |y| < r, \varphi(y) < t < \Lambda r \ \}.$$

Ist $supp\ f \subseteq Z$, so rechnen wir mit dem Satz von Fubini, Satz 3.1, und Proposition A.3 wie eben

$$\int\limits_{\Omega} \partial_n f_n \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_{B_r^{n-1}(0)} \int\limits_{\varphi(y)}^{\Lambda r} \partial_n f_n(y,t) \ \mathrm{d}t \ \mathrm{d}y = - \int\limits_{B_r^{n-1}(0)} f_n(y,\varphi(y)) \ \mathrm{d}y. \tag{5.8}$$

Für $i = 1, \ldots, n-1$ setzen wir

$$F_i(y,t) := \int\limits_{t}^{\Lambda r} f_i(y,s) \ \mathrm{d}s \quad \text{für } |y| < r, |t| < \Lambda r$$

und sehen

$$\partial_i F_i(y,t) := \int\limits_{t}^{\Lambda r} \partial_i f_i(y,s) \ \mathrm{d}s \quad \text{für } \mathcal{L}^{n-1} - \text{fast alle } y \in B_r^{n-1}(0) \text{ und alle } |t| < \Lambda r.$$

Wieder rechnen wir mit dem Satz von Fubini, Satz 3.1,

$$\int\limits_{\Omega} \partial_i f_i \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_{B_r^{n-1}(0)} \int\limits_{\varphi(y)}^{\Lambda r} \partial_i f_i(y,t) \ \mathrm{d}t \ \mathrm{d}y = \int\limits_{B_r^{n-1}(0)} \partial_i F_i(y,\varphi(y)) \ \mathrm{d}y.$$

Weiter setzen wir $\psi_i(y) := F_i(y,\varphi(y))$. Klarerweise sind ψ_i lipschitz mit kompaktem Träger in $B_r^{n-1}(0)$. Mit dem oben Bewiesenen folgt $\int\limits_{B_r^{n-1}(0)} \partial_i \psi_i(y) \ \mathrm{d}y = 0$ und, da

$$\partial_i \psi_i(y) = \partial_i F_i(y,\varphi(y)) + \partial_n F_i(y,\varphi(y)) \partial_i \varphi(y) =$$

$$= \partial_i F_i(y,\varphi(y)) - f_i(y,\varphi(y)) \partial_i \varphi(y) \quad \text{für } \mathcal{L}^n - \text{fast alle } y \in B_r^{n-1}(0),$$

wie eine kurze Rechnung zeigt, erhalten wir

$$\int\limits_{B_r^{n-1}(0)} \partial_i F_i(y,\varphi(y))\ \mathrm{d}y = \int\limits_{B_r^{n-1}(0)} f_i(y,\varphi(y))\partial_i\varphi(y)\ \mathrm{d}y.$$

Zusammen mit (5.8) folgt

$$\int\limits_{\Omega} div\ f\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_{B_r^{n-1}(0)} f(y,\varphi(y))(\nabla\varphi(y),-1)\ \mathrm{d}y. \tag{5.9}$$

Betrachten wir die lokale Parametrisierung $\Phi(y) := (y,\varphi(y))$ von $\partial\Omega$, so sehen wir mit (5.5), (5.6) und Proposition 1.10

$$\int\limits_{\partial\Omega} f\nu_\Omega\ \mathrm{d}area_{\partial\Omega} = \int\limits_{\partial\Omega\cap Z} f\nu_\Omega\ \mathrm{d}\Phi_*\mu_g = \int\limits_{B_r^{n-1}(0)} ((f\nu_\Omega)\circ\Phi)\sqrt{g}\ \mathrm{d}\mathcal{L}^{n-1} =$$

$$= \int\limits_{B_r^{n-1}(0)} f(y,\varphi(y))\frac{(\nabla\varphi(y),-1)}{\sqrt{1+|\nabla\varphi(y)|^2}}\sqrt{1+|\nabla\varphi(y)|^2}\ \mathrm{d}y,$$

und (5.7) folgt mit (5.9), wenn $supp\ f \subseteq Z$.

Also existiert zu jedem $x \in \overline{\Omega}$ eine offene Umgebung $U(x) \subseteq \mathbb{R}^n$, so daß (5.7) gilt, wenn $supp\ f \subseteq U(x)$. Wir überdecken den kompakten Abschluss $\overline{\Omega}$ durch endlich viele $U(x_l) =: \Omega_l, x_l \in \overline{\Omega}, l = 1,\ldots,k$ und

$$\overline{\Omega} \subseteq \cup_{l=1}^k \Omega_l.$$

Mit Proposition B.1 existiert eine Zerlegung der Eins auf $\overline{\Omega}$ bezüglich $\Omega_l, l = 1,\ldots,k,$ genauer existieren $\varphi_l \in C_0^0(\Omega_l)$ lipschitzstetig mit $0 \leq \varphi_l \leq 1, \sum_{l=1}^k \varphi_l = 1$ auf $\overline{\Omega}$. Da $supp(\varphi_l f) \subseteq \Omega_l$, gilt (5.7) für $\varphi_l f$ für $l = 1,\ldots,k$, und wir erhalten

$$\int\limits_{\Omega} div\ f\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_{\Omega} div\Big(\sum_{l=1}^k \varphi_l f\Big)\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \sum_{l=1}^k \int\limits_{\Omega} div(\varphi_l f)\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n =$$

$$= \sum_{l=1}^k \int\limits_{\partial\Omega} \varphi_l f\cdot\nu_\Omega\ \mathrm{d}area_{\partial\Omega} = \int\limits_{\partial\Omega} f\nu_\Omega\ \mathrm{d}area_{\partial\Omega},$$

also (5.7), und der Satz ist bewiesen.

///

6 Der Divergenzsatz auf Mannigfaltigkeiten

Definition 6.1 *Es sei* M *eine* C^k-n-*Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^m$ *. Eine Abbildung* $f : M \cap V \to \mathbb{R}$ *für eine offene Menge* $V \subseteq \mathbb{R}^m$ *heißt* C^l *für* $l = 0, \ldots, k$ *, geschrieben* $f \in C^l(M \cap V)$ *, wenn für jede lokale Parametrisierung* $\Phi : U \to M \cap V, U \subseteq \mathbb{R}$ *offen, von* M *die Abbildung* $f \circ \Phi : U \to \mathbb{R}$ *eine* C^l-*Abbildung ist.*

Für $f \in C^1(M \cap V), \tau \in T_xM$ *definieren wir den Gradienten auf* M *durch*

$$\nabla^M f(x) := \pi_{T_xM} \nabla \tilde{f}(x)$$

für die orthogonale Projektion $\pi_{T_xM} : \mathbb{R}^m \to T_xM$ *und eine Fortsetzung* $\tilde{f} \in C^1(B^m_\varrho(x))$ *von* f *, die nach der folgenden Proposition existiert, und* $\nabla^M f$ *ist unabhängig von der Fortsetzung. Die Richtungsableitung bezüglich* $\tau \in T_xM$ *definieren wir durch*

$$D_\tau f(x) := \langle \nabla^M f(x), \tau \rangle.$$

Eine Abbildung $f : M \cap V \to \mathbb{R}^{m_0}$ *heißt ein* C^l-*Vektorfeld in* $\mathbb{R}^{m_0}$ *, geschrieben* $f \in C^l(M \cap V, \mathbb{R}^{m_0})$ *, wenn* $\langle f, v \rangle \in C^l(M \cap V)$ *für jedes* $v \in \mathbb{R}^{m_0}$ *. Ein Vektorfeld in* $\mathbb{R}^m$ *heißt tangential bzw. normal, wenn* $f(x) \in T_xM$ *bzw.* $f(x) \in N_xM$ *für alle* $x \in M \cap V$ *.*

Für $f \in C^1(M \cap V, \mathbb{R}^m)$ *definieren wir die Divergenz auf* M *durch*

$$div_M f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle \tau_i, D_{\tau_i} f(x) \rangle \quad \text{für } x \in M \cap V, \tau_1, \ldots, \tau_n \text{ eine Orthonormalbasis von } T_xM.$$

Für $f \in C^2(M \cap V)$ *und* $M \in C^2$ *definieren den Laplace auf* M *durch*

$$\Delta_M f := div_M \nabla^M f.$$

□

Proposition 6.1 *Zu* $f \in C^l(M \cap V), M$ *eine* $C^k - n-$*Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^m, l = 0, \ldots, k, V \subseteq \mathbb{R}^m$ *offen, existiert für jedes* $x \in M \cap V$ *eine Fortsetzung* $\tilde{f} \in C^l(B^m_\varrho(x))$ *von* f *und die orthogonale Projektion auf* T_xM

$$\nabla^M f(x) := \pi_{T_xM} \nabla \tilde{f}(x)$$

ist unabhängig von der Fortsetzung. Weiter ist für $f \in C^1(M \cap V, \mathbb{R}^m)$ *die Definition der Divergenz auf* M *unabhängig von der Orthonormalbasis des Tangentialraumes.*

Beweis:
Wir betrachten eine lokale C^k-Parametrisierung $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{\approx} V(x) \subseteq M$ auf eine offene Umgebung $V(x)$ von x in M und $y \in U$ mit $x = \Phi(y)$. Da $rang\ D\Phi(y) = n$, können die Tangentialvektoren $\partial_1 \Phi(y), \ldots, \partial_n \Phi(y) \in T_xM$ durch $\nu_1, \ldots, \nu_{m-n} \in \mathbb{R}^m$, z.B. eine Orthonormalbasis von N_xM , zu einer Basis von $\mathbb{R}^m$ erweitert werden. Wir definieren

$$\Psi(w, z) := \Phi(w) + \sum_{i=1}^{m-n} z_i \nu_i \quad \text{für } w \in U, z \in \mathbb{R}^{m-n}$$

und sehen $rang\ D\Psi(y, 0) = m$, also ist $\Psi : U(y, 0) \xrightarrow{\approx} B^m_\varrho(x)$ ein C^k-Diffeomorphismus einer genügend kleinen offenen Umgebung $U(y, 0)$ von $(y, 0)$ in $\mathbb{R}^m$. Setzen wir

$\tilde{f}(\Psi(w,z)) := f(\Phi(w))$ für $(w,z) \in U(y,0)$, so ist $\tilde{f} \in C^l(B_\varrho(x))$ eine gewünschte Fortsetzung.

Für $\tau \in T_xM = im\ D\Phi(y)$ existiert $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\tau = D\Phi(y)v$, und wir sehen für eine beliebige C^1-Fortsetzung $\tilde{f}$ von f

$$D_\tau \tilde{f}(x) = \nabla \tilde{f}(x) D\Phi(y)v = D_v(\tilde{f} \circ \Phi)(y) = D_v(f \circ \Phi)(y),$$

insbesondere ist $D_\tau \tilde{f}(x)$ unabhängig von der Fortsetzung, und der Gradient von f auf M wohldefiniert.

Wählen wir wie oben $\nu_1, \ldots, \nu_{n-m}$ als Orthonormalbasis von N_xM , so sehen wir

$$D_{\nu_j} \tilde{f}(x) = \nabla \tilde{f}(x) \partial_{n+j} \Psi(y,0) = \partial_{n+j}(\tilde{f} \circ \Psi)(y,0) = 0, \tag{6.1}$$

da $\tilde{f}(\Psi(w,z)) = f(\Phi(w))$ unabhängig von z ist. Für eine beliebige Orthonormalbasis $\tau_1, \ldots, \tau_n$ von T_xM bildet $\tau_1, \ldots, \tau_n, \nu_1 \ldots, \nu_{m-n}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^m$, und es gilt

$$\sum_{i=1}^n \langle \tau_i, D_{\tau_i} f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \tau_i, D_{\tau_i} \tilde{f}(x) \rangle + \sum_{j=1}^{m-n} \langle \nu_j, D_{\nu_j} \tilde{f}(x) \rangle = div\ \tilde{f}(x),$$

und die Definition der Divergenz von f auf M ist unabhängig von der Orthonormalbasis von T_xM .

///

Lokale Formeln für Gradient, Divergenz und Laplace sind in der folgenden Proposition gegeben.

Proposition 6.2 *Es sei* M *eine* C^1-n-*Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^m$ *und eine lokale* C^1-*Parametrisierung* $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{\approx} V \cap M, V \subseteq \mathbb{R}^m$ *offen, mit Metrik* $g_{ij} = \langle \partial_i \Phi, \partial_j \Phi \rangle$.

Für $f \in C^1(U)$ *gilt*

$$\nabla^M (f \circ \Phi^{-1}) \circ \Phi = g^{ij} \partial_j f \partial_i \Phi =: (grad_g f)^i \partial_i \Phi. \tag{6.2}$$

Sind M *und* Φ *in* C^2 *, so gilt für* $X \in C^1(U, \mathbb{R}^n), f = (X^i \partial_i \Phi) \circ \Phi^{-1} \in C^1(M \cap V, \mathbb{R}^m)$

$$(div_M f) \circ \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} X^i) =: div_g X \tag{6.3}$$

und für $f \in C^2(U)$

$$\Delta_M (f \circ \Phi^{-1}) \circ \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j f) =: \Delta_g f. \tag{6.4}$$

Dabei summieren wir über Indices von $1, \ldots, n$ *, die als obere und untere Indices auftreten.*

Beweis:

Klarerweise folgt (6.4) aus (6.2) und (6.3). (6.2) ergibt sich aus

$$\langle g^{ij} \partial_j f \partial_i \Phi, \partial_l \Phi \rangle = g^{ij} g_{il} \partial_j f = \partial_l f = \langle \nabla^M (f \circ \Phi^{-1}) \circ \Phi, \partial_l \Phi \rangle \quad l = 1, \ldots, n.$$

Zum Beweis von (6.3) wählen wir eine Wurzel (a_l^k) von g^{kl} , d.h. $g^{kl} = a_r^k a_l^r$ und $a_l^k = a_k^l$, und setzen $\tau_i := a_i^k \partial_k \Phi \in TM, i = 1, \ldots, n$. Da

$$\langle \tau_i, \tau_j \rangle = \langle a_i^k \partial_k \Phi, a_j^l \partial_l \Phi \rangle = a_i^k g_{kl} a_j^l = \delta_{ij} \quad i,j = 1, \ldots, n,$$

bilden $\tau_1, \ldots, \tau_n$ eine Orthonormalbass von TM . Mit (6.1) rechnen wir

$$(D_{\tau_j} f) \circ \Phi = a_j^l \partial_l (f \circ \Phi) = a_j^l \partial_l (X^i \partial_i \Phi)$$

und

$$(div_M f) \circ \Phi = \sum_{j=1}^n \langle \tau_j, (D_{\tau_j} f) \circ \Phi \rangle = \sum_{j=1}^n \langle a_j^k \partial_k \Phi, a_j^l \partial_l (X^i \partial_i \Phi) \rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^n a_j^k a_j^l \langle \partial_k \Phi, \partial_l (X^i \partial_i \Phi) \rangle = g^{kl} g_{ki} \partial_l X^i + g^{kl} X^i \langle \partial_k \Phi, \partial_{li} \Phi \rangle = \partial_i X^i + X^i g^{kl} \partial_i g_{kl}/2. \quad (6.5)$$

Fixieren wir $g_{0,ij} := g_{ij}(y)$, so erhalten wir elementar für die Ableitung der Determinante

$$\partial_i g = g_0 \partial_i \det(g_0^{rk} g_{kl}) = g_0 \; spur(\partial_i (g_0^{rk} g_{kl})) = g g^{kl} \partial_i g_{kl} \quad \text{in } y,$$

also

$$g^{kl} \partial_i g_{kl}/2 = \partial_i g/(2g) = \partial_i(\sqrt{g})/\sqrt{g},$$

und (6.3) folgt mit (6.5).

///

Als nächstes definieren wir die zweite Fundamentalform.

Definition 6.2 *Für eine $C^2 - n-$Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^m$ definieren wir die zweite Fundamentalform in $x \in M$ bezüglich $\tau, \eta \in T_x M$ durch*

$$A_x^M(\tau, \eta) := D_\tau \eta(x)^\perp,$$

wobei wir η zu einem tangentialen C^1-Vektorfeld mit $\eta(x) = \eta$ in eine offene Umgebung von x in M fortsetzen und $.^\perp$ die orthogonale Projektion auf den normalen Raum $N_x M$ bezeichnet.

Der mittlere Krümmungsvektor von M ist definiert als die Spur der zweiten Fundamentalform

$$\vec{\mathbf{H}}_M(x) := \sum_{i=1}^n A_x^M(\tau_i, \tau_i) \quad \text{für } x \in M, \tau_1, \ldots, \tau_n \text{ eine Orthonormalbasis von } T_x M.$$

□

Zuerst zeigen wir, daß η zu einem tangentialen C^1-Vektorfeld fortgesetzt werden kann.

Proposition 6.3 *Es sei M eine $C^k - n-$Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m, x \in M, \tau_1, \ldots, \tau_n$ eine Orthonormalbasis von $T_x M$ und $\nu_1, \ldots, \nu_{m-n}$ eine Orthonormalbasis von $N_x M$. Dann können $\tau_i, \nu_j, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m-n$ in eine offene Umgebung $V(x)$ von x in M zu $C^{k-1}-$Vektorfelder fortgesetzt werden, so daß $\tau_1(\xi), \ldots, \tau_n(\xi)$ eine Orthonormalbasis von $T_\xi M$ und $\nu_1(\xi), \ldots, \nu_{m-n}(\xi)$ eine Orthonormalbasis von $N_\xi M$ für alle $\xi \in V(x)$ bilden.*

Beweis:
Wir betrachten eine lokale C^k–Parametrisierung $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{\approx} V(x) \subseteq M$ auf eine offene Umgebung $V(x)$ von x in M und $y \in U$ mit $x = \Phi(y)$.

Da $T_xM = im\ D\Phi(y)$ per Definition, existiert eine Basis $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ mit $\tau_i = D\Phi(y).v_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Wir setzen $\tilde{\tau}_i(\Phi(z)) := D\Phi(z).v_i, \tilde{\nu}_j(\Phi(z)) = \nu_j$ für $z \in U, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$. Klarerweise sind $\tilde{\tau}_i, \tilde{\nu}_j \in C^{k-1}(V(x), \mathbb{R}^m)$, $\tilde{\tau}_i$ sind tangential und für U genügend klein bilden $\tilde{\tau}_1(\xi), \ldots, \tilde{\tau}_n(\xi), \tilde{\nu}_1(\xi), \ldots, \tilde{\nu}_{m-n}(\xi)$ für $\xi \in V(x)$ eine Basis von $\mathbb{R}^m$.

Nun wenden wir das Gram-Schmidtsche-Orthonormalisierungsverfahren an und erhalten $C^{k-1}-$ Vektorfelder $\tau_1, \ldots, \tau_n, \nu_1, \ldots, \nu_{m-n}$, die in jedem $\xi \in V(x)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^m$ bilden und die gegebenen Vektoren in x auf $V(x)$ fortsetzen. Da $span\{\tau_1(\xi), \ldots, \tau_n(\xi)\} = span\{\tilde{\tau}_1(\xi), \ldots, \tilde{\tau}_n(\xi)\} = T_\xi M$ für alle $\xi \in V(x)$, bilden $\tau_1(\xi), \ldots, \tau_n(\xi)$ eine Orthonormalbasis von $T_\xi M$ und $\nu_1(\xi), \ldots, \nu_{m-n}(\xi)$ eine Orthonormalbasis von $N_\xi M$ für alle $\xi \in V(x)$.

///

Nun kommen wir zur Wohldefiniertheit und einfachen Eigenschaften der zweiten Fundamentalform.

Proposition 6.4 *Die zweite Fundamentalform einer* $C^2 - n-$ *Untermannigfaltigkeit* M *von* $\mathbb{R}^m$ *ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der* C^1-*Fortsetzung der Tangentialvektoren, genauer gilt für eine normale* C^1-*Orthonormalbasis* $\nu_1, \ldots, \nu_{m-n}$

$$A^M(\tau, \eta) = -\sum_{j=1}^{m-n} \langle D_\tau \nu_j, \eta \rangle \nu_j, \tag{6.6}$$

und

$$A_x^M : T_xM \times T_xM \to N_xM \quad x \in M$$

ist eine symmetrische, bilineare Abbildung auf dem Tangentialraum in den Normalenraum. Weiter gilt

$$\vec{\mathbf{H}}_M = \Delta_M i_M, \tag{6.7}$$

wobei der Laplace komponentenweise für die identische Inklusion $i_M : M \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ *betrachtet wird.*

Beweis:
Mit Proposition 6.3 wählen wir eine normale C^1-Orthonormalbasis $\nu_1, \ldots, \nu_{m-n}$ und eine tangentiale C^1-Fortsetzung von η in eine offenen Umgebung von x in M . Da $\langle \eta, \nu_j \rangle = 0$, folgt

$$A^M(\tau, \eta) = D_\tau \eta^\perp = \sum_{j=1}^{m-n} \langle D_\tau \eta, \nu_j \rangle \nu_j = -\sum_{j=1}^{m-n} \langle \eta, D_\tau \nu_j \rangle \nu_j,$$

also (6.6), und weiter A_x^M ist unabhängig von der Fortsetzung von η . Weiter entnehmen wir dieser Identität, daß A_x^M ein bilineare Abbildung in τ und η ist.

Weiter betrachten wir wie eben eine lokale C^2-Parametrisierung $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{\approx} V(x) \subseteq M$ auf eine offene Umgebung $V(x)$ von x in M und $y \in U$ mit $x = \Phi(y)$

und wählen $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $\tau = D\Phi(y).v, \eta = D\Phi(y).w$. Dann ist $\eta := (D_w\Phi) \circ \Phi^{-1}$: $V(x) \to \mathbb{R}^m$ ein tangentiales C^1-Vektorfeld, das η in $V(x)$ fortsetzt, und es gilt

$$D_\tau\eta(x) = \langle (\nabla^M\eta)(\Phi(y)), D\Phi(y).v\rangle = D_v(\eta \circ \Phi)(y) = D_vD_w\Phi(y),$$

also mit dem Satz von Schwarz

$$A_x^M(\tau, \eta) = D_vD_w\Phi(y)^\perp = D_wD_v\Phi(y)^\perp = A_x^M(\eta, \tau),$$

und A_x^M ist symmetrisch.

Wir betrachten eine tangentiale und eine normale C^1-Orthonormalbasis $\tau_1, \ldots, \tau_n$ und $\nu_1, \ldots, \nu_{m-n}$ in einer offenen Umgebung von x , die gemäß Proposition 6.3 existieren, und rechnen

$$\Delta_M i_{M,l} = \sum_{i=1}^n \langle \tau_i, D_{\tau_i}\nabla^M i_{M,l}\rangle. \quad l = 1, \ldots, m.$$

Nun kann die Inklusion i_M trivialerweise als $id_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ zu einer C^2-Abbildung fortgesetzt werden. Daher gilt

$$\nabla^M i_{M,l} = \pi_{TM}\nabla i_{\mathbb{R}^m,l} = \sum_{i=1}^n \tau_i\langle \tau_i, \nabla i_{\mathbb{R}^m,l}\rangle = \sum_{i=1}^n \tau_i\langle \tau_i, e_l\rangle = e_l - \sum_{j=1}^{m-n} \nu_j\langle \nu_j, e_l\rangle,$$

wobei $e_l \in \mathbb{R}^m$ den $l-$ten Einheitsvektor bezeichnet. Zusammen mit (6.6) erhalten wir

$$\Delta_M i_{M,l} = \sum_{i=1}^n \langle \tau_i, D_{\tau_i}\Big(e_l - \sum_{j=1}^{m-n} \nu_j\langle \nu_j, e_l\rangle\Big)\rangle = -\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{m-n} \langle \tau_i, D_{\tau_i}(\nu_j\langle \nu_j, e_l\rangle)\rangle =$$

$$= -\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{m-n} \langle \tau_i, D_{\tau_i}\nu_j\rangle\langle \nu_j, e_l\rangle = \sum_{i=1}^n \langle A^M(\tau_i, \tau_i), e_l\rangle = \langle \vec{\mathbf{H}}_M, e_l\rangle \quad l = 1, \ldots, m,$$

also (6.7).

///

Bemerkungen:
Für eine lokale C^2-Parametrisierung $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{\approx} V \cap M, V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, von M erhalten wir aus (6.7) mit (6.4) für $f = \Phi$ die mittlere Krümmung als

$$\vec{\mathbf{H}}_M \circ \Phi = (\Delta_M i_M) \circ \Phi = \Delta_g(i_M \circ \Phi) = \Delta_g\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}g^{ij}\partial_j\Phi).$$

□

Definition 6.3 *Eine Menge* $M \subseteq \mathbb{R}^m$ *heißt eine* $C^k - n-$*Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^m$ *mit Rand* $\partial M \subseteq M$ *, wenn* $M - \partial M$ *eine* $C^k - n-$*Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^m$

ist und für jedes $x \in \partial M$ *eine offene Umgebung* $V \subseteq \mathbb{R}^m$ *von* x *und eine* C^k-*Abbildung* $\Phi : B_1^n(0) \cap \{y_n \geq 0\} \xrightarrow{\approx} M \cap V$ *existiert, die ein Homöomorphismus ist und*

$$rang\ D\Phi(y) = n \quad \text{für alle } y \in B_1^n(0) \cap \{y_n \geq 0\},$$

$$\Phi(B_1^n(0) \cap \{y_n > 0\}) \subseteq M - \partial M,$$

$$\Phi(B_1^n(0) \cap \{y_n = 0\}) \subseteq \partial M,$$

$$\Phi(0) = x.$$

Wir nennen Φ *und alle lokalen Parametrisierungen von* $M - \partial M$ *eine lokale Parametrisierung von* M *. Insbesondere ist* ∂M *ist eine* $C^k - (n-1)-$*Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^m$ *.*

Der Tangentialraum von M *an* $x \in \partial M$ *ist definiert durch*

$$T_x M := im\ D\Phi(0)$$

und der Normalenraum durch $N_x M = T_x M^\perp$ *.*

Die innere Konormale $co_M(x)$ *an* M *in* x *ist der eindeutige Einheitsvektor* $co_M(x) \in T_x M \cap N_x \partial M$ *mit*

$$\langle co_M(x), \partial_n \Phi(0) \rangle > 0. \tag{6.8}$$

□

Satz 6.1 (Divergenzsatz auf Mannigfaltigkeiten) *Es sei* M *eine* C^2-n-*Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^m$ *mit Rand* ∂M *und* $f \in C_0^1(M, \mathbb{R}^m)$ *ein* C^1-*Vektorfeld mit kompaktem Träger in* M *, d.h.*

$$supp\ f = \overline{[f \neq 0]} \subseteq M$$

ist kompakt.

Dann gilt

$$\int\limits_M div_M f \ \mathrm{d}vol_M = -\int\limits_M f \cdot \vec{\mathbf{H}}_M \ \mathrm{d}vol_M - \int\limits_{\partial M} f \cdot co_M \ \mathrm{d}area_{\partial M}. \tag{6.9}$$

Beweis:
Wir zerlegen $f = f^{tang} + f^\perp$ eindeutig in ein tangentiales und normales Vektorfeld. Betrachten wir eine tangentiale und eine normale C^1-Orthonormalbasis $\tau_1, \ldots, \tau_n$ und $\nu_1, \ldots, \nu_{m-n}$ in einer offenen Menge, die gemäß Proposition 6.3 existieren, so gilt $f^{tang} = \sum_{i=1}^n \tau_i \langle \tau_i, f \rangle, f^\perp = \sum_{j=1}^{m-n} \nu_j \langle \nu_j, f \rangle$, und wir sehen $f^{tang}, f^\perp \in C_0^1(M, \mathbb{R}^m)$. Weiter rechnen wir mit (6.6)

$$div_M f^\perp = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-n} \langle \tau_i, D_{\tau_i}(\nu_j \langle \nu_j, f \rangle) \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-n} \langle \tau_i, D_{\tau_i} \nu_j \rangle \langle \nu_j, f \rangle =$$

$$= -\sum_{i=1}^n \langle A^M(\tau_i, \tau_i), f \rangle = -\vec{\mathbf{H}}_M f = -\vec{\mathbf{H}}_M f^\perp.$$

Da $f^\perp \perp co_M$ und $f^{tang} \perp \vec{\mathbf{H}}_M$, folgt (6.9) für $f^\perp$, es verbleibt für tangentiales f zu zeigen, daß

$$\int\limits_M div_M f \ \mathrm{d}vol_M = - \int\limits_{\partial M} f co_M \ \mathrm{d}area_{\partial M}. \tag{6.10}$$

Da f kompakten Träger in M hat, genügt es mit einer Zerlegung der Eins wie im Beweis vom Satz von Gauß, Satz 5.1, den Fall zu betrachten, wenn für eine lokale C^2-Parametrisierung $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{\approx} M \cap V$ von $M, V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen , $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen oder $U = B_1^n(0) \cap \{y_n \geq 0\}$, gilt, daß

$$supp\ f \subseteq M \cap V.$$

Tangentiales f können wir als $f = (X^i \partial_i \Phi) \circ \Phi^{-1}$ mit $X^i \in C_0^1(U)$ schreiben, und es folgt mit (6.3) und der Metrik g von Φ ,

$$\int\limits_M div_M f \ \mathrm{d}vol_M = \int\limits_U \Big((div_M f) \circ \Phi \Big) \sqrt{g} \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_U \partial_i (\sqrt{g} X^i) \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

Mit dem Satz von Gauß, Satz 5.1, folgt für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, d.h. Φ ist eine lokale Parametrisierung von $M - \partial M$, daß $\int_M div_M f \ \mathrm{d}vol_M = 0$ und somit (6.10), da in diesem Fall $f = 0$ auf ∂M .

Für $U = B_1^n(0) \cap \{y_n \geq 0\}$ folgt wieder mit dem Satz von Gauß, Satz 5.1,

$$\int\limits_M div_M f \ \mathrm{d}vol_M = - \int\limits_{B_1(0) \cap \{y_n = 0\}} X^n \sqrt{g} \ \mathrm{d}\mathcal{L}^{n-1}.$$

Beachten wir $\partial_i \Phi \in T\partial M$ für $i = 1, \dots, n-1$, also

$$\langle \partial_i \Phi, co_M \circ \Phi_\partial \rangle = 0 \quad \text{ für } i = 1, \dots, n-1, \tag{6.11}$$

so folgt (6.10), wenn wir für die lokale Parametrisierung $\Phi_\partial, \Phi_\partial(z) := \Phi(z, 0)$ des Randes mit Metrik $g_{\partial, ij} = g_{ij}$ für $i, j = 1, \dots, n-1$ zeigen, daß

$$\sqrt{g} = \langle \partial_n \Phi, co_M \circ \Phi_\partial \rangle \sqrt{g_\partial} \quad \text{ auf } B_1(0) \cap \{y_n = 0\}. \tag{6.12}$$

Wir schreiben $\nu := co_M \circ \Phi_\partial$ und sehen mit (6.11) und $|\nu| = 1$, daß

$$\partial_n \Phi = \langle \partial_n \Phi, \nu \rangle \nu + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \partial_i \Phi$$

für geeignete $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Definieren wir die Gramsche Determinante

$$Gr_n(v_1, \dots, v_n) := \det(\langle v_i, v_j \rangle)$$

und beachten aus der linearen Algebra

$$Gr_n(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + v_1) = Gr_n(v_1, \dots, v_n),$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} g &= Gr_n(\partial_1 \Phi, \dots, \partial_n \Phi) = Gr_n(\partial_1 \Phi, \dots, \partial_{n-1} \Phi, \langle \partial_n \Phi, \nu \rangle \nu) \\ &= Gr_{n-1}(\partial_1 \Phi, \dots, \partial_{n-1} \Phi) \ |\langle \partial_n \Phi, \nu \rangle|^2 = g_\partial \ |\langle \partial_n \Phi, \nu \rangle|^2, \end{aligned}$$

und (6.12) folgt, da $\langle \partial_n \Phi, co_M \circ \Phi \rangle > 0$ mit (6.8) in der Definition der inneren Konormalen.

///

Teil III
Maßtheorie II

7 Der Darstellungssatz von Riesz

Wir beginnen mit einem Kriterium für Borel-Maße auf $\mathbb{R}^n$.

Proposition 7.1 (Caratheodory Kriterium) *Es sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}^n$, für das*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

für alle $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $d(A, B) > 0$ gilt. Dann ist μ ein Borel-Maß , d.h. alle Borelmengen sind meßbar.

Beweis:
Da die μ-meßbaren Mengen eine σ-Algebra bilden und μ bereits subadditiv ist, genügt es zu zeigen, daß

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap C) + \mu(S - C)$$

für alle abgeschlossenen Mengen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ und alle Mengen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mu(S) < \infty$. Es sei

$$C_j := \{x \in X \mid d(x, C) \leq \frac{1}{j} \}.$$

Dann gilt

$$d(S \cap C, S - C_j) \geq \frac{1}{j}$$

und somit

$$\mu(S) \geq \mu((S \cap C) \cup (S - C_j)) = \mu(S \cap C) + \mu(S - C_j).$$

Der Satz ist somit bewiesen, wenn gezeigt wird, daß

$$\lim_{j \to \infty} \mu(S - C_j) \geq \mu(S - C). \tag{7.1}$$

Da C abgeschlossen ist, gilt

$$S - C = (S - C_j) \cup \bigcup_{k=j}^{\infty} R_k, \tag{7.2}$$

wobei

$$R_k := \{x \in S \mid \frac{1}{k+1} < d(x, C) \leq \frac{1}{k} \}$$

gesetzt wird. Aus (7.2) folgt

$$\mu(S - C_j) \leq \mu(S - C) \leq \mu(S - C_j) + \sum_{k=j}^{\infty} \mu(R_k).$$

(7.1) folgt, falls wir zeigen, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) < \infty \tag{7.3}$$

ist. Nun gilt für $|i-j| \geq 2$, daß

$$d(R_i, R_j) > 0.$$

Dies ergibt

$$\sum_{k=1}^{N} \mu(R_{2k}) = \mu(\bigcup_{k=1}^{N} R_{2k}) \leq \mu(S) < \infty$$

und

$$\sum_{k=1}^{N} \mu(R_{2k-1}) = \mu(\bigcup_{k=1}^{N} R_{2k-1}) \leq \mu(S) < \infty,$$

und (7.3) ist bewiesen.

///

Nun kommen wir zum Satz von Riesz.

Satz 7.1 (Darstellungssatz von Riesz) *Es sei* $\Lambda : C_0^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ *linear und nicht-negativ, d.h.*

$$\Lambda f \geq 0 \text{ für } f \in C_0^0(\mathbb{R}^n), f \geq 0.$$

Dann existiert ein eindeutiges Radon-Maß μ *auf* $\mathbb{R}^n$ *mit*

$$\Lambda f = \int f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{für alle } f \in C_0^0(\mathbb{R}^n). \tag{7.4}$$

Beweis:
Wir setzen für alle offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mu(U) := \sup\{\Lambda f \mid f \in C_0^0(\mathbb{R}^n), 0 \leq f \leq 1, supp\ f \subseteq U\ \} \tag{7.5}$$

und für beliebige Mengen $S \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mu(S) := \inf_{U \supseteq S \text{ offen}} \mu(U). \tag{7.6}$$

Zuerst zeigen wir, μ ist ein Maß. Offensichtlich folgt für $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ mit $supp\ f = \emptyset$, daß $f \equiv 0$, also $\mu(\emptyset) = 0$. Weiter seien U, U_l offen und $U \subseteq \cup_{l=1}^{\infty} U_l$. Für $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n), 0 \leq f \leq 1, supp\ f \subseteq U$, ist $supp\ f \subseteq \cup_{l=1}^{\infty} U_l$ kompakt, also $supp\ f \subseteq \cup_{l=1}^{k} U_l$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Mit Proposition B.1 existiert eine Zerlegung der Eins auf $supp\ f$ bezüglich $U_l, l = 1, \ldots, k,$ genauer existieren $\varphi_l \in C_0^0(U_l)$ mit $0 \leq \varphi_l \leq 1, \sum_{l=1}^{k} \varphi_l = 1$ auf $supp\ f$. Dies ergibt $f = \sum_{l=1}^{k} \varphi_l f, supp(\varphi_l f) \subseteq U_l, 0 \leq \varphi_l f \leq 1$ und

$$\Lambda f = \sum_{l=1}^{k} \Lambda(\varphi_l f) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \mu(U_l),$$

also nach Übergang zum Supremum über f , daß

$$\mu(U) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \mu(U_l).$$

Für $S \subseteq \cup_{l=1}^{\infty} S_l \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ wählen wir offenen Mengen $U_l \supseteq S_l$ mit $\mu(U_l) \leq \mu(S_l) + \varepsilon 2^{-l}$ und erhalten

$$\mu(S) \leq \mu(\cup_{l=1}^{\infty} U_l) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \mu(U_l) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \mu(S_l) + \varepsilon$$

also ist μ ein Maß.

Weiter sehen wir für offene $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f_1 \in C_0^0(U_1), f_2 \in C_0^0(U_2)$, daß

$$[f_1 + f_2 \neq 0] \subseteq \mathit{supp}\ f_1 \cup \mathit{supp}\ f_2 \subseteq U_1 \cup U_2,$$

also $f_1 + f_2 \in C_0^0(U_1 \cup U_2)$. Falls weiter $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, so gilt $f_1 + f_2 \leq \max(f_1, f_2)$. Wählen wir $\Lambda f_i \geq \mu(U_i) - \varepsilon, 0 \leq f_i \leq 1, i = 1, 2,$ so erhalten wir

$$\mu(U_1 \cup U_2) \geq \Lambda(f_1 + f_2) = \Lambda f_1 + \Lambda f_2 \geq \mu(U_1) + \mu(U_2) - 2\varepsilon,$$

also mit Subadditivität

$$\mu(U_1 \cup U_2) = \mu(U_1) + \mu(U_2).$$

Für $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\delta := d(S_1, S_2) > 0$ sind $V_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, S_i) < \delta/2\ \} \supseteq S_i, i = 1, 2,$ offen und disjunkt, und für $U \supseteq S_1 \cup S_2$ offen sind $U_i := U \cap V_i \supseteq S_i$ offen, disjunkt und

$$\mu(U) \geq \mu(U_1 + U_2) = \mu(U_1) + \mu(U_2) \geq \mu(S_1) + \mu(S_2),$$

also wieder mit Subadditivtät

$$\mu(S_1 \cup S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2) \quad \text{für } d(S_1, S_2) > 0.$$

Dann ist μ mit dem Caratheodory Kriterium, Proposition 7.1, ein Borel-Maß.

Für kompaktes $K \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert mit Proposition B.1 ein $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ mit $f \geq \chi_K$. Dann ist $U := [\tau f > 1] \supseteq K$ für $\tau > 1$ offen und für jedes $g \in C_0^0(U), 0 \leq g \leq 1$ gilt $g \leq \tau f$, also $\Lambda(\tau f - g) \geq 0$ und

$$\mu(K) \leq \mu(U) \leq \Lambda(\tau f) < \infty,$$

und mit Proposition 4.1 und (7.6) ist μ ein Radon-Maß. Genauer sehen wir für $\tau \searrow 1$

$$\mu(K) \leq \Lambda f \quad \text{für } f \in C_0^0(\mathbb{R}^n), f \geq \chi_K. \tag{7.7}$$

Schließlich zeigen wir (7.4) für μ . Mit der Linearität von Λ und des Integrals genügt es reelles $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ zu betrachten. Weiter genügt es zu zeigen, daß

$$\Lambda f \leq \int f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{für alle } f \in C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}). \tag{7.8}$$

Denn daraus folgt mit der Linearität von Λ , daß

$$-\Lambda f = \Lambda(-f) \leq \int (-f) \, \mathrm{d}\mu = -\int f \, \mathrm{d}\mu,$$

und zusammen (7.4).

Zum Beweis von (7.8) setzen wir $R := \sup_{\mathbb{R}^n} |f| < \infty$ und für $N \in \mathbb{N}$

$$y_l := -R + (lR/N) \quad \text{für } l = 0, \dots, 2N+1$$

und

$$E_l := [y_{l-1} \leq f < y_l] \cap \mathit{supp}\ f \quad \text{für } l = 1, \dots, 2N+1.$$

Da f stetig ist, sind E_l Borelmengen, und, da μ ein Radon-Maß ist, existieren offene Mengen $U_l \supseteq E_l$ mit

$$\mu(U_l) \leq \mu(E_l) + (1/N^2) \quad \text{und} \quad f < y_l \text{ auf } U_l. \tag{7.9}$$

Da

$$\mathit{supp}\ f = \sum_{l=1}^{2N+1} E_l \subseteq \cup_{l=1}^{2N+1} U_l,$$

existieren mit Proposition B.1 Funktionen $\varphi_l \in C_0^0(U_l)$ mit $0 \leq \varphi_l \leq 1, \sum_{l=1}^{2N+1} \varphi_l = 1$ auf $\mathit{supp}\ f$. Dies ergibt mit (7.7)

$$\sum_{l=1}^{2N+1} \mu(E_l) = \mu(\mathit{supp}\ f) \leq \Lambda\Big(\sum_{l=1}^{2N+1} \varphi_l \Big) = \sum_{l=1}^{2N+1} \Lambda \varphi_l. \tag{7.10}$$

Weiter sehen wir $f = \sum_{l=1}^{2n+1} f\varphi_l$ und $f\varphi_l \leq y_l \varphi_l$ für $l = 1, \dots, 2N+1$ mit (7.9). Dies ergibt mit (7.9) und (7.10)

$$\begin{aligned}
\Lambda f = \sum_{l=1}^{2N+1} \Lambda(f\varphi_l) \leq \sum_{l=1}^{2N+1} y_l \Lambda \varphi_l = \sum_{l=1}^{2N+1} (R + y_l) \Lambda \varphi_l - \sum_{l=1}^{2N+1} R \Lambda \varphi_l \leq \\
\leq \sum_{l=1}^{2N+1} (R + y_l) \mu(U_l) - \sum_{l=1}^{2N+1} R \mu(E_l) \leq \\
\leq \sum_{l=1}^{2N+1} (R + y_l)(\mu(E_l) + N^{-2}) - \sum_{l=1}^{2N+1} R \mu(E_l) \leq \\
\leq \sum_{l=1}^{2N+1} y_l \mu(E_l) + \sum_{l=1}^{2N+1} R(2 + 1/N) N^{-2} \leq \\
\leq \sum_{l=1}^{2N+1} y_{l-1} \mu(E_l) + R \frac{\mu(\mathit{supp}\ f)}{N} + \frac{3R(2N+1)}{N^2} \leq \\
\leq \sum_{l=1}^{2N+1} \int_{E_l} f \ \mathrm{d}\mu + \frac{\mu(\mathit{supp}\ f) + 9}{N} R = \\
= \int f \ \mathrm{d}\mu + \frac{\mu(\mathit{supp}\ f) + 9}{N} R.
\end{aligned}$$

Lassen wir $N \to \infty$, so erhalten wir (7.8). Die Eindeutigkeit ergibt sich aus der nächsten Proposition.

///

Proposition 7.2 *Es sei* μ *ein Radon-Maß auf* $\mathbb{R}^n$ *und* ν *ein borelreguläres Maß auf* $\mathbb{R}^n$ *mit*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\nu \quad \textit{für alle } f \in C_0^0(\mathbb{R}^n), f \geq 0.$$

Dann gilt $\mu = \nu$ *.*

Beweis:
Eine beliebige offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ können wir darstellen als

$$U = \bigcup_{l=1}^{\infty} B_{\varrho_l}(x_l)$$

mit $\overline{B_{\varrho_l}(x_l)} \subseteq U$. Diese Vereinigung ist abzählbar, wenn wir z.B. $x_l \in \mathbb{Q}^n, \varrho_l \in \mathbb{Q}$ wählen. Mit Proposition B.1 existieren $\varphi_l \in C_0^0(U)$ mit

$$\chi_{\overline{B_{\varrho_l}(x_l)}} \leq \varphi_l \leq \chi_U.$$

Setzen wir $\psi_k := \max(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \in C_0^0(U)$, so sehen wir $\psi_k \nearrow \chi_U$. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, Satz 1.2, und der Voraussetzung erhalten wir

$$\nu(U) = \int \chi_U \, \mathrm{d}\nu \leftarrow \int \psi_k \, \mathrm{d}\nu = \int \psi_k \, \mathrm{d}\mu \to \int \chi_U \, \mathrm{d}\mu = \mu(U).$$

Da μ ein Radon-Maß ist, folgt für beliebige $S \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mu(S) = \inf_{U \supseteq S \text{ offen}} \mu(U) = \inf_{U \supseteq S \text{ offen}} \nu(U) \geq \nu(S). \tag{7.11}$$

Mit Proposition 4.1 existieren zu jeder Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen $U_k \supseteq A$ mit $\mu(U_k - A) \to 0$. Dann folgt auch $\nu(U_k - A) \to 0$ und

$$\mu(A) \leftarrow \mu(A) + \mu(U_k - A) = \mu(U_k) = \nu(U_k) = \nu(A) + \nu(U_k - A) \to \nu(A).$$

Da ν borelregulär ist, existiert zu jeder Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge $A \supseteq S$ mit $\nu(S) = \nu(A)$. Dies ergibt

$$\nu(S) = \nu(A) = \mu(A) \geq \mu(S),$$

und zusammen mit (7.11) folgt $\mu = \nu$.

///

Proposition 7.3 *Jedes borelreguläre Maß* μ *auf* $\mathbb{R}^n$ *mit*

$$\mu(K) < \infty \quad \forall K \subseteq \mathbb{R}^n \textit{ kompakt} \tag{7.12}$$

ist ein Radon-Maß.

Beweis:
Mit (7.12) sehen wir $C_0^0(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mu)$, und wir erhalten ein lineares Funktional $\Lambda : C_0^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ durch $\Lambda f := \int f \, \mathrm{d}\mu$ für $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$. Klarerweise gilt $\Lambda f = \int f \, \mathrm{d}\mu \geq 0$ für $f \geq 0$, und Λ ist nicht-negativ. Dann existiert mit dem Darstellungssatz von Riesz, Satz 7.1, ein Radon-Maß ν auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$\int f \, \mathrm{d}\nu = \Lambda f = \int f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{für alle } f \in C_0^0(\mathbb{R}^n), \tag{7.13}$$

und mit der vorigen Proposition 7.2 folgt $\mu = \nu$, insbesondere ist μ ein Radon-Maß.

///

Schließlich beweisen wir die vektorwertige Version des Darstellungssatzes von Riesz.

Satz 7.2 (Darstellungssatz von Riesz, vektorwertige Version) *Es sei $\Lambda : C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}$ ein lineares Funktional auf dem Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}^n$. Weiter sei Λ auf allen kompakten Mengen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt im Sinne, daß*

$$\sup\{|\Lambda g| \mid g \in C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m), |g| \leq 1, \mathit{supp}\ g \subseteq K \ \} \leq C(K) < \infty. \tag{7.14}$$

Dann existiert ein Radon-Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ und eine borelmeßbare Funktion $\sigma : \mathbb{R}^n \to \partial B_1(0) \subseteq \mathbb{C}^m$ mit

$$\Lambda g = \int g \cdot \sigma \, \mathrm{d}\mu \quad \textit{für alle } g \in C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m).$$

Beweis:
Wir setzen $C_0^{0,+}(\mathbb{R}^n) := \{ f \in C_0^0(\mathbb{R}^n) \mid f \geq 0 \ \}$ und

$$\lambda(f) := \sup\{|\Lambda g| \mid g \in C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m), |g| \leq f \ \} \quad \text{für } f \in C_0^{0,+}(\mathbb{R}^n). \tag{7.15}$$

Wir sehen mit (7.14)

$$\lambda(f) \leq C(\mathit{supp}\ f)\ \mathit{sup}_{\mathbb{R}^n}|f| < \infty.$$

Offensichtlich ist λ monoton und positiv homogen, d.h.

$$0 \leq \lambda(f_1) \leq \lambda(f_2) \quad \text{für } f_1 \leq f_2, \quad \text{und} \quad \lambda(\alpha f) = \alpha\lambda(f) \quad \text{für } \alpha \geq 0.$$

Wir zeigen λ ist additiv, d.h.

$$\lambda(f_1 + f_2) = \lambda(f_1) + \lambda(f_2) \quad \text{für } f_1, f_2 \in C_0^{0,+}(\mathbb{R}^n). \tag{7.16}$$

Für $g_1, g_2 \in C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ mit $|g_i| \leq f_i, |\Lambda g_i| \geq \lambda(f_i) - \varepsilon$ wählen wir $\alpha_i \in \{\pm 1\}$ mit $|\Lambda g_i| = \alpha_i \Lambda g_i, i = 1, 2.$ Dann gilt $|\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2| \leq f_1 + f_2$ und

$$\lambda(f_1 + f_2) \geq |\Lambda(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)| = |\alpha_1 \Lambda g_1 + \alpha_2 \Lambda g_2| =$$

$$= |\Lambda g_1| + |\Lambda g_2| \geq \lambda(f_1) + \lambda(f_2) - 2\varepsilon,$$

also

$$\lambda(f_1 + f_2) \geq \lambda(f_1) + \lambda(f_2).$$

Umgekehrt definieren wir für $g \in C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ mit $|g| \leq f_1 + f_2$ die Funktionen

$$g_i := \begin{cases} \dfrac{f_i g}{f_1 + f_2} & \text{für } f_1 + f_2 \neq 0, \\ 0 & \text{für } f_1 + f_2 = 0, \end{cases}$$

für $i = 1, 2$. Klarerweise gilt $|g_i| \leq f_i$ und $g_1 + g_2 = g$. Weiter sind g_i stetig auf der offenen Menge $[f_1 + f_2 > 0]$. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $(f_1 + f_2)(x_0) = 0$ und $x_k \to x_0$ sehen wir

$$|g_i(x_k)| \leq f_i(x_k) \to f_i(x_0) = 0 = |g_i(x_0)|,$$

und g_i ist stetig. Da $supp\ g_i \subseteq supp\ f_i$, erhalten wir $g_i \in C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ und

$$\Lambda g = \Lambda g_1 + \Lambda g_2 \leq \lambda(f_1) + \lambda(f_2),$$

also

$$\lambda(f_1 + f_2) \leq \lambda(f_1) + \lambda(f_2),$$

und (7.16) ist bewiesen.

Wir erweitern λ zu einem linearen Funktional $C_0^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ und mit dem Darstellungssatz von Riesz, Satz 7.1, existiert ein Radon-Maß μ mit

$$\lambda(f) = \int f \ d\mu \quad \text{für alle } f \in C_0^0(\mathbb{R}^n).$$

Nun betrachten wir für $v \in \mathbb{C}^m$ das lineare Funktional

$$\lambda_v(f) := \Lambda(fv) \quad \text{für } f \in C_0^0(\mathbb{R}^n).$$

Für $|v| = 1$ sehen wir

$$|\lambda_v(f)| = |\Lambda(fv)| \leq \sup\{|\Lambda g| \mid |g| \leq |f| \} = \lambda(|f|) = \int |f| \ d\mu,$$

und λ_v ist stetig in der Norm von $L^1(\mu)$. Da $C_0^0(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1_{\mathcal{B}}(\mu)$ mit Proposition 4.1 dicht liegt, läßt sich λ_v eindeutig auf $L^1_{\mathcal{B}}(\mu)$ fortsetzen, und mit Satz 8.4 existieren Funktionen $\sigma_j \in L^\infty_{\mathcal{B}}(\mu)$ mit

$$\Lambda(fe_j) = \lambda_{e_j}(f) = \int f\sigma_j \ d\mu \quad \text{für alle } f \in C_0^0(\mathbb{R}^n), j = 1, \ldots, m.$$

Setzen wir $\sigma := \sum_{j=1}^m \sigma_j e_j$, so ist $\sigma \in L^\infty_{\mathcal{B}}(\mu, \mathbb{C}^m)$ borelmeßbar und

$$\Lambda g = \sum_{j=1}^m \Lambda(\langle g, e_j \rangle e_j) = \sum_{j=1}^m \int \langle g, e_j \rangle \sigma_j \ d\mu \int g \cdot \sigma \ d\mu \quad \text{für alle } g \in C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m). \tag{7.17}$$

Schließlich zeigen wir $|\sigma| = 1$ fast überall bezüglich μ . Wir sehen für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit (7.5), (7.15) und (7.17)

$$\mu(U) = \sup\{\lambda(f) \mid f \in C_0^0(\mathbb{R}^n), 0 \leq f \leq 1, supp\ f \subseteq U \} =$$

$$= \sup\{|\Lambda g| \mid g \in C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m), |g| \leq 1, supp\ g \subseteq U \} =$$

$$= \sup\{|\int g\cdot\sigma \,\mathrm{d}\mu| \mid g\in C_0^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m), |g|\le 1, supp\ g\subseteq U\ \}. \tag{7.18}$$

Klarerweise folgt

$$\mu(U)\le \int_U |\sigma|\,\mathrm{d}\mu.$$

Andererseits ist $\chi_{B_R(0)}\chi_{[\sigma\neq 0]}\bar\sigma/|\sigma| \in L^1(\mu)$, und mit Proposition 4.1 existieren $g_k \in C_0^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ mit $g_k\to \chi_{B_R(0)}\chi_{[\sigma\neq 0]}\bar\sigma/|\sigma|$ in $L^1(\mu)$. Durch Projektion $\pi:\mathbb{C}^m\to\overline{B_1(0)}\subseteq\mathbb{C}^m$ mit $\pi(z):=z/|z|$ für $|z|\ge 1, \pi(z):=z$ für $|z|\le 1$ können wir weiter $|g_k|\le 1$ annehmen. Da $\sigma\in L^\infty(\mu)$ folgt für beliebiges $\varphi\in C_0^0(U)$, daß $\varphi g_k\in C^0(U,\mathbb{C}^m)$ und $\varphi g_k\cdot\sigma\to\varphi\chi_{B_R(0)}|\sigma|$ in $L^1(\mu)$. Für $0\le\varphi\le 1$ ergibt dies (7.18), dass

$$\int_{B_R(0)}\varphi|\sigma|\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int \varphi g_k\cdot\sigma\,\mathrm{d}\mu\le\mu(U),$$

und für $R\to\infty$, dass

$$\int\varphi|\sigma|\,\mathrm{d}\mu\le\mu(U)\quad \text{für alle } \varphi\in C_0^0(U), 0\le\varphi\le 1.$$

Wählen wir wie im Beweis von Proposition 7.2 eine Folge $\psi_k\in C_0^0(U), 0\le\psi_k\le 1, \psi_k\nearrow\chi_U$, so folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, Satz 1.2,

$$\int|\sigma|\,\mathrm{d}\mu\leftarrow\int\psi_k|\sigma|\,\mathrm{d}\mu\le\mu(U).$$

Zusammen ergibt sich

$$\mu(U)=\int_U|\sigma|\,\mathrm{d}\mu\quad\text{für alle offenen } U\subseteq\mathbb{R}^n.$$

Mit Proposition 4.1 folgt

$$\mu(A)=\int_A|\sigma|\,\mathrm{d}\mu\quad\text{für alle Borelmengen } A\subseteq\mathbb{R}^n,$$

und mit Proposition 1.11 erhalten wir $|\sigma|=1$ fast überall bezüglich μ , und der Satz ist bewiesen.

///

8 Der Satz von Lebesgue-Radon-Nikodym

Satz 8.1 (Satz von Lebesgue-Radon-Nikodym) *μ und ν seien zwei Maße auf X, die $\sigma-$endlich bezüglich einer $\sigma-$Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu \cap \mathcal{A}_\nu$ sind.*

Dann existiert $B \in \mathcal{A}$ und ein $\mathcal{A}-$ meßbares $h : X \to [0, \infty]$ mit

$$\begin{aligned} \nu(A) = \int_A h \, \mathrm{d}\mu + \nu(A - B) \quad \textit{für alle } A \in \mathcal{A}, \\ \mu(X - B) = 0, \end{aligned} \tag{8.1}$$

und B bzw. h sind $\nu-$ bzw. $\mu-$fast überall eindeutig bestimmt.

Weiter gilt

$$\int f \, \mathrm{d}(\nu\lfloor B) = \int fh \, \mathrm{d}\mu \tag{8.2}$$

für alle $\mathcal{A}-$meßbaren $f : X \to [0, \infty]$ bzw. $f \in L^1_{\mathcal{A}}(\nu) := \{g \in L^1(\nu) \mid g$ ist meßbar bezüglich $\mathcal{A}\}$, und im zweiten Fall gilt $fh \in L^1_{\mathcal{A}}(\mu)$.

Beweis:
Zur Eindeutigkeit betrachten wir $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ und $\mathcal{A}-$ meßbare $h_1, h_2 : X \to [0, \infty]$ mit obigen Eigenschaften. Wir setzen $B := B_1 \cap B_2 \in \mathcal{A}$ und sehen $\mu(X - B) = 0$. Dies ergibt

$$\nu(B_1 - B_2) = \nu(B_1 - B) = \int\limits_{B_1 - B} h_1 \, \mathrm{d}\mu = 0$$

und genauso $\nu(B_2 - B_1) = 0$. Daraus folgt für $A \in \mathcal{A}$

$$\int\limits_A h_1 \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{A \cap B_1} h_1 \, \mathrm{d}\mu = \nu(A \cap B_1) = \nu(A \cap B) + \nu(A \cap (B_1 - B)) = \nu(A \cap B) = \int\limits_A h_2 \, \mathrm{d}\mu.$$

Nach Voraussetzung der $\sigma-$Endlichkeit von μ bezüglich $\mathcal{A}$ existiert eine Zerlegung $X = \sum_{k=1}^\infty X_k$ mit $X_k \in \mathcal{A}, \mu(X_k) < \infty$. Für $k, l \in \mathbb{N}$ betrachten wir $A_{kl} := [h_1 > h_2 + 1/l] \cap [h_2 \leq l] \cap X_k \in \mathcal{A}$ und sehen

$$\int\limits_{A_{kl}} h_2 \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{A_{kl}} h_1 \, \mathrm{d}\mu \geq \int\limits_{A_{kl}} (h_2 + 1/l) \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{A_{kl}} h_2 + \mu(A_{kl})/l.$$

Da $\int_{A_{kl}} h_2 \, \mathrm{d}\mu \leq l\mu(X_k) < \infty$, folgt $\mu(A_{kl}) = 0$. Beachten wir $[h_1 > h_2] = \cup_{k,l=1}^\infty A_{kl}$, so erhalten wir $\mu(h_1 > h_2) = 0$ und genauso $\mu(h_1 < h_2) = 0$.

Zur Existenz betrachten wir zuerst endliche μ, ν. Dann ist $\lambda := \nu + \mu$ ein endliches Maß auf X. Für $f \in L^2_{\mathcal{A}}(\lambda)$ rechnen wir mit der Hölder-Ungleichung, Satz 2.2,

$$\left| \int f \, \mathrm{d}\nu \right| \leq \int |f| \, \mathrm{d}\nu \leq \int |f| \, \mathrm{d}\lambda \leq \lambda(X)^{1/2} \parallel f \parallel_{L^2(\lambda)}.$$

Da $\lambda(X) < \infty$, ist die Abbildung $f \mapsto \int f \, \mathrm{d}\nu$ ein stetiges, lineares Funktional auf $L^2_{\mathcal{A}}(\lambda)$. Da $L^2_{\mathcal{A}}(\lambda)$ mit Satz 2.4 und Proposition 2.1 ein Hilbertraum ist, existiert mit §C ein $g \in L^2_{\mathcal{A}}(\lambda)$ mit

$$\int f \, \mathrm{d}\nu = \langle f, \bar{g} \rangle_{L^2(\lambda)} = \int fg \, \mathrm{d}\lambda \quad \forall f \in L^2_{\mathcal{A}}(\lambda). \tag{8.3}$$

Für $A \in \mathcal{A}$ mit $\lambda(A) > 0$ sehen wir

$$\lambda(A)^{-1} \int_A g \, \mathrm{d}\lambda = \frac{\nu(A)}{\lambda(A)} \in [0,1].$$

Da λ endlich ist, folgt mit Proposition 1.11, dass $g(x) \in [0,1]$ für $\lambda -$ fast alle $x \in X$, und wir können o.B.d.A. $g : X \to [0,1]$ annehmen.

Weiter schreiben wir (8.3) in der Form

$$\int f(1-g) \, \mathrm{d}\nu = \int fg \, \mathrm{d}\mu \quad \forall f \in L^2_{\mathcal{A}}(\lambda). \tag{8.4}$$

Wir setzen $B := [0 \le g < 1]$. Für $f = \chi_{X-B} \in L^2_{\mathcal{A}}(\lambda)$ in (8.4) sehen wir

$$\mu(X-B) = \int \chi_{X-B} g \, \mathrm{d}\mu = \int \chi_{[g=1]}(1-g) \, \mathrm{d}\nu = 0.$$

Für $A \in \mathcal{A}, f = (1 + g + \ldots + g^n)\chi_A \in L^2_{\mathcal{A}}(\lambda)$ in (8.4) sehen wir

$$\int_A (1 - g^{n+1}) \, \mathrm{d}\nu = \int_A g(1 + g + \ldots + g^n) \, \mathrm{d}\mu.$$

Klarerweise gilt $1 - g^{n+1} \nearrow \chi_B$ und

$$g(1 + g + \ldots + g^n) \nearrow h$$

für ein $h : X \to [0,\infty]$ meßbar bezüglich $\mathcal{A}$. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, Satz 1.2, folgt

$$\nu(A \cap B) = \int_A h \, \mathrm{d}\mu \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Damit ist die Existenz der Zerlegung für endliche μ, ν bewiesen.

Sind μ, ν nur $\sigma-$endlich bezüglich $\mathcal{A}$, so existieren $X_k \in \mathcal{A}$ mit $X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k, \mu(X_k), \nu(X_k) < \infty$. Nach dem oben Bewiesenen existieren $B_k \subseteq X_k, B_k \in \mathcal{A}$ und $\mathcal{A} -$ meßbares $h_k : X_k \to [0,\infty]$ mit

$$\mu(X_k - B_k) = 0,$$
$$\nu(A \cap B_k) = \int_A h_k \, \mathrm{d}\mu \quad \text{für alle } A \subseteq X_k, A \in \mathcal{A}.$$

Wir definieren $B := \sum_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}$ und $h : X \to [0,\infty]$ durch $h|X_k := h_k$. Dies ergibt $\mu(X-B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k - B_k) = 0$,

$$\nu(A \cap B) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A \cap X_k} h_k \, \mathrm{d}\mu = \int_A h \, \mathrm{d}\mu,$$

und die Zerlegung existiert allgemein.

Schließlich sehen wir mit (8.1), daß (8.2) für einfache, $\mathcal{A}-$meßbare $f : X \to [0,\infty]$ gilt. Mit Proposition 1.3 und dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt (8.2) für nicht-negative, $\mathcal{A}-$meßbare f .

$f \in L^1_{\mathcal{A}}(\nu)$ schreiben wir in der Form $f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4)$ mit nicht-negativen, $\mathcal{A}-$meßbaren $f_j \leq |f|, j = 1, \dots, 4$. Damit gilt $\int f_j h \, \mathrm{d}\mu = \int f_j \, \mathrm{d}(\nu\lfloor B) \in [0, \infty[$, also $fh = (f_1 h - f_2 h) + i(f_3 h - f_4 h) \in L^1_{\mathcal{A}}(\mu)$ und

$$\int f \, \mathrm{d}(\nu\lfloor B) = \int f_1 \, \mathrm{d}(\nu\lfloor B) - \int f_2 \, \mathrm{d}(\nu\lfloor B) + i\Big(\int f_3 \, \mathrm{d}(\nu\lfloor B) - \int f_4 \, \mathrm{d}(\nu\lfloor B)\Big) =$$

$$= \int f_1 h \, \mathrm{d}\mu - \int f_2 h \, \mathrm{d}\mu + i\Big(\int f_3 h \, \mathrm{d}\mu - \int f_4 h \, \mathrm{d}\mu\Big) = \int fh \, \mathrm{d}\mu.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

///

Mit den folgenden Definitionen können wir den Satz von Lebesgue-Radon-Nikodym in der üblichen Form darstellen.

Definition 8.1 *μ bzw. ν seien zwei Maße auf X und $\mathcal{A}$ eine $\sigma-$Algebra von $\mu-$ und $\nu-$meßbaren Mengen.*

ν heißt absolutstetig bezüglich μ und $\mathcal{A}$, geschrieben

$$\nu \ll_{\mathcal{A}} \mu,$$

wenn

$$\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0.$$

ν_1, ν_2 heißen gegenseitig singulär bezüglich $\mathcal{A}$, geschrieben

$$\nu_1 \perp_{\mathcal{A}} \nu_2,$$

wenn $A \in \mathcal{A}$ existiert mit

$$\nu_1(A) = \nu_2(X - A) = 0.$$

□

Korollar 8.2 (Satz von Radon-Nikodym) *μ und ν seien zwei Maße auf X , die $\sigma-$endlich bezüglich einer $\sigma-$Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu \cap \mathcal{A}_\nu$ sind.*

Ist ν absolutstetig bezüglich μ und $\mathcal{A}$, so existiert ein $\mathcal{A}-$ meßbares , $\mu-$ fast überall eindeutiges $h : X \to [0, \infty]$ mit

$$\nu(A) = \int_A h \, \mathrm{d}\mu \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}.$$

und

$$\int f \, \mathrm{d}\nu = \int fh \, \mathrm{d}\mu$$

für alle $\mathcal{A}-$meßbaren $f : X \to [0, \infty]$ bzw. $f \in L^1_{\mathcal{A}}(\nu)$, und im zweiten Fall gilt $fh \in L^1_{\mathcal{A}}(\mu)$. Allgemein heißt ein solches h eine Radon-Nikodym-Ableitung von ν bezüglich μ und $\mathcal{A}$, geschrieben

$$h = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}_{\mathcal{A}}.$$

$\square$

Korollar 8.3 (Zerlegungssatz von Lebesgue) *μ und ν seien zwei Maße auf X, die $\sigma-$endlich bezüglich einer $\sigma-$Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu \cap \mathcal{A}_\nu$ sind.*

Dann kann ν eindeutig auf $\mathcal{A}$ zerlegt werden in

$$\nu = \nu_{ac} + \nu_s,$$

$$\nu_{ac} \ll_{\mathcal{A}} \mu, \nu_s \perp_{\mathcal{A}} \mu.$$

$\square$

Bemerkungen:

1. Im Satz von Radon-Nikodym, Korollar 8.2, ist die Annahme der $\sigma-$Endlichkeit von ν tatsächlich überflüssig.
2. Ohne Annahmen an μ ist der Satz von Radon-Nikodym nicht gültig. Dazu betrachten wir $\nu = \mathcal{L}^1$, das Zählmaß μ auf $[0,1]$ und die $\sigma-$ Algebra $\mathcal{B}$ der Borelmengen auf $[0,1]$. Da $\mu(A) = 0 \Longleftrightarrow A = \emptyset$, gilt trivialerweise $\mathcal{L}^1 \ll \mu$. Für ein borelmeßbares $h : [0,1] \to [0,\infty]$ wie in Korollar 8.2 würde gelten

$$0 = \mathcal{L}^1(\{x\}) = \int\limits_{\{x\}} h \ \mathrm{d}\mu = h(x) \quad \forall x \in [0,1],$$

   also $h \equiv 0$, im Widerspruch zu $\mathcal{L}^1 \neq 0$.
3. Der Zerlegungssatz von Lebesgue gilt nicht ohne Annahmen an ν. Dazu betrachten wir das Zählmaß ν, das Lebesgue-Maß $\mu = \mathcal{L}^1$ auf $[0,1]$ und die $\sigma-$ Algebra $\mathcal{B}$ der Borelmengen auf $[0,1]$. Für eine Zerlegung wie in Korollar 8.3 existiert eine Borelmenge B mit $\mathcal{L}^1([0,1]-B), \nu_s(B) = 0$. Für $x \in B$ gilt $\mathcal{L}^1(\{x\}), \nu_s(\{x\}) = 0$, also $\nu_{ac}(\{x\}) = 0$ und $1 = \nu(\{x\}) = \nu_{ac}(\{x\}) + \nu_s(\{x\}) = 0$, und es muß $B = \emptyset$ gelten. Dies ist unmöglich, da $\mathcal{L}^1([0,1] - B) = 0$.

$\square$

Mit dem Satz von Radon-Nikodym bestimmen wir den Dualraum von $L^p(\mu)$ für $1 < p < \infty$ und für $\sigma-$endliches μ für $p = 1$.

Satz 8.4 (Riesz, $L^p - L^q-$Dualität) *Es sei μ ein Maß auf $X, \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$ eine $\sigma-$Algebra auf X, $1 \leq p < \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1$, und μ sei $\sigma-$endlich bezüglich $\mathcal{A}$ im Fall $p = 1$. Dann gilt*

$$L^p_{\mathcal{A}}(\mu)^* = L^q_{\mathcal{A}}(\mu)$$

in dem Sinne, daß die normerhaltende Einbettung aus Proposition 2.3 ein Isomorphismus ist, d.h. für jedes stetige, lineare Funktional $\Lambda : L^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to \mathbb{C}$ ein eindeutiges $g \in L^q_{\mathcal{A}}(\mu)$ existiert mit

$$\Lambda f = \int fg \ \mathrm{d}\mu \quad \forall f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu)$$

und weiter gilt $\| \Lambda \| = \| g \|_{L^q_{\mathcal{A}}(\mu)}$.

Beweis:
Mit Proposition 2.3 verbleibt nur die Existenz eines $g \in L^q_{\mathcal{A}}(\mu)$ für jedes $\Lambda \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu)^*$ zu zeigen. Definieren wir

$$\Lambda_r f := Re\ \Lambda(Re\ f) + iRe\ \Lambda(Im\ f),$$
$$\Lambda_i f := Im\ \Lambda(Re\ f) + iIm\ \Lambda(Im\ f),$$

so sehen wir $\Lambda = \Lambda_r + i\Lambda_i$, und wir können o.B.d.A. $\Lambda f \in \mathbb{R}$ für $f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu), f : X \to \mathbb{R}$ annehmen. Weiter nehmen wir μ zuerst endlich an.

Wir setzen

$$\begin{aligned} \nu(A) &:= \sup\{|\Lambda f| \mid f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu), |f| \leq \chi_A \} \quad \text{für } A \in \mathcal{A}, \\ \nu(S) &:= \inf_{S \subseteq A \in \mathcal{A}} \nu(A) \quad \text{für } S \subseteq X. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Da $\nu(A) \leq \nu(B)$ für $A \subseteq B, A, B \in \mathcal{A}$, ist ν wohldefiniert. Klarerweise gilt $\nu(\emptyset) = 0$.

Für $S \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} S_k, S_k \subseteq A_k \in \mathcal{A}$ setzen wir $B_k := A_k - \cup_{l=1}^{k-1} A_l \subseteq A_k, B_k \in \mathcal{A}$ und sehen $S \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} A_k = \cup_{k=1}^{\infty} B_k =: A \in \mathcal{A}$. Für $f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu), |f| \leq \chi_A$ sehen wir mit $f_k := f\chi_{B_k} \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu)$, daß $|f_k| \leq \chi_{B_k} \leq \chi_{A_k}$ und mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue, Satz 2.5, $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ in $L^p_{\mathcal{A}}(\mu)$. Da $\Lambda : L^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to \mathbb{C}$ stetig ist, folgt

$$|\Lambda f| = \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda f_k \Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\Lambda f_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k).$$

Nehmen wir das Supremum über obige f , so erhalten wir $\nu(S) \leq \nu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$, also nach Übergang zu den Infima über die A_k , daß $\nu(S) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(S_k)$, und ν ist ein Maß auf X . Für disjunkte $A, B \in \mathcal{A}$ betrachten wir für $f, g \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu), |f| \leq \chi_A, |g| \leq \chi_B$ und wählen $|\alpha|, |\beta| = 1$ mit $|\Lambda f| = \alpha \Lambda f, |\Lambda g| = \beta \Lambda g$. Wir sehen $\alpha f + \beta g \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu), |\alpha f + \beta g| \leq \chi_{A \cup B}$, also

$$\nu(A \cup B) \geq |\Lambda(\alpha f + \beta g)| = |\alpha \Lambda f + \beta \Lambda g| = |\Lambda f| + |\Lambda g|,$$

somit $\nu(A \cup B) \geq \nu(A) + \nu(B)$, und mit der bereits bewiesenen Subadditivität $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$. Für $A \in \mathcal{A}, S \subseteq X, S \subseteq B \in \mathcal{A}$ folgt

$$\nu(B) = \nu(B \cap A) + \nu(B - A) \geq \nu(S \cap A) + \nu(S - A),$$

also

$$\nu(S) \geq \nu(S \cap A) + \nu(S - A).$$

Mit (1.2) ist A meßbar bezüglich ν , also $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\nu$.

Für $A \in \mathcal{A}, f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu), |f| \leq \chi_A$ sehen wir

$$|\Lambda f| \leq \| \Lambda \| \| f \|_{L^p_{\mathcal{A}}(\mu)} \leq \| \Lambda \| \| \chi_A \|_{L^p_{\mathcal{A}}(\mu)} = \| \Lambda \| \ \mu(A)^{1/p},$$

also

$$\nu(A) \leq \| \Lambda \| \mu(A)^{1/p} \leq \| \Lambda \| \mu(A)^{1/p} \quad \forall A \in \mathcal{A}. \tag{8.6}$$

Mit μ ist also auch ν endlich, und mit dem Satz von Radon-Nikodym, Korollar 8.2, existiert ein $\mathcal{A}-$meßbares $h : X \to [0, \infty]$ mit

$$\int f \; \mathrm{d}\nu = \int fh \; \mathrm{d}\mu \quad \forall f \in L^1_{\mathcal{A}}(\nu), \tag{8.7}$$

insbesondere $h \in L^1_{\mathcal{A}}(\mu)$.

Für eine einfache, $\mathcal{A}-$meßbare Funktion $s = \sum_{l=1}^k \alpha_l \chi_{A_l}, \alpha_l \in \mathbb{C}, A_l \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, und $f_l \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu), |f_l| \leq \chi_{A_l}$ mit $\Lambda f_l \geq \nu(A_l) - \varepsilon$ gilt

$$|\Lambda s| = \Big| \sum_{l=1}^k \alpha_l \Lambda \chi_{A_l} \Big| \leq \sum_{l=1}^k |\alpha_l| \nu(A_l) = \int |s| \; \mathrm{d}\nu \leq \sum_{l=1}^k |\alpha_l| (\Lambda f_l + \varepsilon) =$$

$$= \Lambda \Big(\sum_{l=1}^k |\alpha_l| f_l \Big) + \sum_{l=1}^k |\alpha_l| \varepsilon \leq \| \Lambda \| \; \Big\| \sum_{l=1}^k |\alpha_l| f_l \Big\|_{L^p_{\mathcal{A}}(\mu)} + \sum_{l=1}^k |\alpha_l| \varepsilon \leq$$

$$\leq \| \Lambda \| \; \| s \|_{L^p_{\mathcal{A}}(\mu)} + \sum_{l=1}^k |\alpha_l| \varepsilon,$$

da $\Big| \sum_{l=1}^k |\alpha_l| f_l \Big| \leq |s|$. Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir

$$|\Lambda s| \leq \int |s| \; \mathrm{d}\nu \leq \| \Lambda \| \; \| s \|_{L^p_{\mathcal{A}}(\mu)} . \tag{8.8}$$

Für $f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ wählen wir mit Proposition 2.2 eine Folge von einfachen, $\mathcal{A}-$meßbaren Funktionen $s_k \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ mit $s_k \to f$ in $L^p_{\mathcal{A}}(\mu)$. Weiter können wir mit (2.7) annehmen, daß $s_k \to f$ punktweise fast überall bezüglich μ . Mit (8.8) und dem Lemma von Fatou, Satz 1.3, folgt

$$\int |f - s_k| \; \mathrm{d}\nu \leq \liminf_{l \to \infty} \int |s_l - s_k| \; \mathrm{d}\nu \leq$$
$$\leq \liminf_{l \to \infty} \| \Lambda \| \; \| s_l - s_k \|_{L^p_{\mathcal{A}}(\mu)} = \| \Lambda \| \; \| f - s_k \|_{L^p_{\mathcal{A}}(\mu)} < \infty,$$

insbesondere $f \in L^1_{\mathcal{A}}(\nu)$, also

$$L^p_{\mathcal{A}}(\mu) \subseteq L^1_{\mathcal{A}}(\nu), \tag{8.9}$$

und

$$\Big| \int |f| \; \mathrm{d}\nu - \int |s_k| \; \mathrm{d}\nu \Big| \leq \int |f - s_k| \; \mathrm{d}\nu \leq \| \Lambda \| \; \| f - s_k \|_{L^p_{\mathcal{A}}(\mu)} \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Mit (8.8) folgt

$$|\Lambda f| \leq \int |f| \; \mathrm{d}\nu \leq \| \Lambda \| \; \| f \|_{L^p_{\mathcal{A}}(\mu)} \quad \forall f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu). \tag{8.10}$$

Mit Proposition 1.3 existiert eine Folge von einfachen, $\mathcal{A}-$meßbaren Funktionen $h_k : X \to [0, \infty[$ mit $h_k \nearrow h$ punktweise auf X . Daher gilt $|h_k| \leq h$ und mit (8.10)

$$\Big| \int f h_k \; \mathrm{d}\mu \Big| \leq \int |f| h \; \mathrm{d}\mu = \int |f| \; \mathrm{d}\nu \leq \| \Lambda \| \; \| f \|_{L^p_{\mathcal{A}}(\mu)} \quad \forall f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu).$$

Da μ endlich ist, gilt $h_k \in L^q_{\mathcal{A}}(\mu)$, und wir erhalten mit Proposition 2.3

$$\| h_k \|_{L^q_{\mathcal{A}}(\mu)} \leq \| \Lambda \| .$$

Für $q = \infty$ sind $[|h_{k_l}| > \lambda]$ für $\lambda > \liminf_{k\to\infty} \| h_k \|_{L^\infty_{\mathcal{A}}(\mu)}$ für eine Teilfolge $k_l \to \infty$ lokale $\mu-$Nullmengen, also ist $[|h| > \lambda] \subseteq \cup_{l=1}^\infty [|h_{k_l}| > \lambda]$ auch eine lokale $\mu-$Nullmenge. Daher gilt $\| h \|_{L^\infty_{\mathcal{A}}(\mu)} \leq \liminf_{k\to\infty} \| h_k \|_{L^\infty_{\mathcal{A}}(\mu)} \leq \| \Lambda \|$, und $h \in L^\infty_{\mathcal{A}}(\mu)$.
Für $1 < q < \infty$ folgt mit dem Lemma von Fatou, Satz 1.3,

$$\int |h|^q \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int |h_k|^q \, \mathrm{d}\mu \leq \| \Lambda \|^q < \infty,$$

also in jedem Fall

$$h \in L^q_{\mathcal{A}}(\mu). \tag{8.11}$$

Wir setzen

$$\Lambda_0 f := \int f \, \mathrm{d}\nu - \Lambda f \quad \text{für } f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu) \tag{8.12}$$

und sehen mit (8.10), daß $\Lambda_0 \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu)^*$, und, da wir Λ reellwertig annehmen, daß für $f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu), f \geq 0$,

$$\Lambda_0 f = \int |f| \, \mathrm{d}\nu - \Lambda f \geq 0.$$

Für $f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ schreiben wir $\Lambda_0 f = \alpha |\Lambda_0 f|$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ und sehen

$$|\Lambda_0 f| = \bar{\alpha}\Lambda_0 f = Re\Big(\Lambda_0(\bar{\alpha} f)\Big) = \Lambda_0 Re(\bar{\alpha} f) \leq \Lambda_0 |\bar{\alpha} f| = \Lambda_0 |f|.$$

Definieren wir ν_0 wie in (8.5) für Λ_0 , so sehen wir für $f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu), |f| \leq \chi_A, A \in \mathcal{A}$,

$$|\Lambda_0 f| \leq \Lambda_0 |f| \leq \Lambda_0 \chi_A,$$

also

$$\nu_0(A) = \Lambda_0 \chi_A \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Dies ergibt $\Lambda_0 s = \int s \, \mathrm{d}\nu_0$ für einfache, $\mathcal{A}-$meßbare $s : X \to \mathbb{C}$ und mit obiger Approximation

$$\Lambda_0 f = \int f \, \mathrm{d}\nu_0 \quad \forall f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu). \tag{8.13}$$

Wie in (8.7) und (8.11) existiert $h_0 \in L^q_{\mathcal{A}}(\mu)$ mit

$$\int f \, \mathrm{d}\nu_0 = \int f h_0 \, \mathrm{d}\mu \quad \forall f \in L^1_{\mathcal{A}}(\nu), \tag{8.14}$$

Aus (8.9), (8.12), (8.13) und (8.14) folgt für $g := h - h_0 \in L^q_{\mathcal{A}}(\mu)$

$$\Lambda f = \int f \, \mathrm{d}\nu - \Lambda_0 f = \int f g \, \mathrm{d}\mu \quad \forall f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu),$$

und der Satz ist für endliches μ bewiesen.

Für μ , das $\sigma-$endlich bezüglich $\mathcal{A}$ ist, zerlegen wir $X = \sum_{k=1}^\infty X_k, X_k \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X_k) < \infty$. Mit dem oben Bewiesenen existieren $g_k \in L^q_{\mathcal{A}}(\mu), [g_k \neq 0] \subseteq X_k,$ mit

$$\Lambda f = \int f g_k \, \mathrm{d}\mu \quad \forall f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu), [f \neq 0] \subseteq X_k.$$

Wir setzen $g : X \to \mathbb{C}$ durch $g|X_k := g_k$, d.h. $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$. Klarerweise ist g meßbar bezüglich $\mathcal{A}$, und $G_n := \sum_{k=1}^{n} g_k \in L^q_{\mathcal{A}}(\mu), G_n \to g$ punktweise auf X . Für $f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ sehen wir

$$\int fG_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f\chi_{X_k} g_k \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} \Lambda(f\chi_{X_k}) = \Lambda\Big(\sum_{k=1}^{n} f\chi_{X_k}\Big),$$

also

$$\left| \int fG_n \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \| \Lambda \| \, \left\| \sum_{k=1}^{n} f\chi_{X_k} \right\|_{L^p_{\mathcal{A}}(\mu)} \leq \| \Lambda \| \, \| f \|_{L^p_{\mathcal{A}}(\mu)} .$$

Da $G_n \in L^q_{\mathcal{A}}(\mu)$ folgt wieder mit Proposition 2.3

$$\| G_n \|_{L^q_{\mathcal{A}}(\mu)} \leq \| \Lambda \|,$$

und wie oben mit dem Lemma von Fatou, Satz 1.3, $g \in L^q_{\mathcal{A}}(\mu)$. Mit der Hölder-Ungleichung, Satz 2.2, folgt $fg \in L^1_{\mathcal{A}}(\mu)$, und mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue, Satz 2.5, erhalten wir

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{X_k} \quad \text{in } L^p_{\mathcal{A}}(\mu), \\ fg &= \sum_{k=1}^{\infty} fg_k \quad \text{in } L^1_{\mathcal{A}}(\mu). \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\Lambda f = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda(f\chi_{X_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \int fg_k \, \mathrm{d}\mu = \int fg \, \mathrm{d}\mu,$$

und der Satz ist für $\sigma-$endliches μ bewiesen.

Für $1 < p < \infty$ können wir schließlich auf die $\sigma-$Endlichkeit von μ verzichten. Dazu wählen wir $f_k \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu), \| f_k \|_{L^p_{\mathcal{A}}(\mu)} = 1$ mit

$$\Lambda f_k > (1 - 1/k) \, \| \Lambda \|,$$

wobei wir o.B.d.A. $\Lambda \neq 0$, also insbesodnere $L^p_{\mathcal{A}}(\mu) \neq \{0\}$ annehmen können. Die Menge $A := \cup_{k=1}^{\infty} [f_k \neq 0] \in \mathcal{A}$ ist klarerweise $\sigma-$endlich bezüglich μ . Mit dem oben Bewiesenen existiert $g \in L^q_{\mathcal{A}}(\mu)$ mit

$$\Lambda f = \int fg \, \mathrm{d}\mu \quad \forall f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu), [f \neq 0] \subseteq A. \tag{8.15}$$

Wir behaupten

$$\Lambda f = 0 \quad \forall f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu), [f \neq 0] \cap A = \emptyset. \tag{8.16}$$

Andernfalls existiert $f \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu), [f \neq 0] \subseteq X - A$ mit $\Lambda f > 0$ und o.B.d.A. $\| f \|_{L^p_{\mathcal{A}}(\mu)} = 1$. Wir sehen $f + f_k \in L^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ und für $\alpha, \beta \geq 0$

$$\Lambda(\alpha f) + (1 - 1/k)\beta \, \| \Lambda \| \leq \Lambda(\alpha f + \beta f_k) \leq \| \Lambda \| \, \| \alpha f + \beta f_k \|_{L^p_{\mathcal{A}}(\mu)} .$$

Da $|\alpha f + \beta f_k|^p = |\alpha|^p |f|^p + |\beta|^p |f_k|^p$, sehen wir

$$\| \alpha f + \beta f_k \|^p_{L^p_{\mathcal{A}}(\mu)} = |\alpha|^p + |\beta|^p.$$

Lassen wir $k \to \infty$ so erhalten wir

$$\alpha\Lambda f + \beta \parallel \Lambda \parallel \leq \parallel \Lambda \parallel (|\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p} \quad \forall \alpha, \beta \geq 0.$$

Beachten wir $1 < q < \infty, p = q/(q-1)$ und wählen $\alpha = (\Lambda f)^{q-1}, \beta = \parallel \Lambda \parallel^{q-1}$, so erhalten wir

$$|\Lambda f|^q + \parallel \Lambda \parallel^q \leq \parallel \Lambda \parallel \left(|\Lambda f|^{(q-1)p} + \parallel \Lambda \parallel^{(q-1)p} \right)^{1/p}$$

und

$$\left(|\Lambda f|^q + \parallel \Lambda \parallel^q \right)^{1/q} \leq \parallel \Lambda \parallel,$$

im Widerspruch zu $\Lambda f > 0$, und (8.16) folgt.

Aus (8.15) und (8.16) folgt

$$\Lambda f = \Lambda(f \chi_A) = \int f \chi_A g \, \mathrm{d}\mu,$$

und der Satz ist bewiesen.

///

Bemerkungen:

1. Für $S \subseteq [0,1]^2$ setzen wir

$$S^x := \{ y \in [0,1] \mid (x,y) \in S \} \quad \text{für } x \in [0,1],$$
$$S_y := \{ x \in [0,1] \mid (x,y) \in S \} \quad \text{für } y \in [0,1],$$

und betrachten

$$\mu(S) := \sum_{x \in [0,1]} \mathcal{L}^1(S^x), \quad \nu(S) := \sum_{y \in [0,1]} \mathcal{L}^1(S_y).$$

μ und ν sind Maße auf $[0,1]^2$, und alle offenen Mengen, also alle Borelmengen von $[0,1]^2$ sind meßbar bezüglich μ und ν , d.h. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_\mu \cap \mathcal{A}_\nu \subseteq \mathcal{A}_{\mu+\nu}$ für die Borel $\sigma-$Algebra $\mathcal{B}$ von $[0,1]^2$. Wir definieren das lineare Funktional $\Lambda : L^1_{\mathcal{B}}(\mu+\nu) \to \mathbb{C}$ durch

$$\Lambda f := \int f \, \mathrm{d}\nu \quad \forall f \in L^1_{\mathcal{B}}(\mu + \nu).$$

Da $\nu \leq \mu + \nu$, ist Λ stetig mit $\parallel \Lambda \parallel \leq 1$. Wir zeigen, es gibt kein $g \in L^\infty_{\mathcal{B}}(\mu + \nu)$ mit

$$\int fg \, \mathrm{d}(\mu + \nu) = \Lambda f = \int f \, \mathrm{d}\nu \quad \forall f \in L^1_{\mathcal{B}}(\mu + \nu),$$

also $L^\infty_{\mathcal{B}}(\mu + \nu) \neq L^1_{\mathcal{B}}(\mu + \nu)^*$.

Für ein solches g wählen wir $f := \chi_{(\{x\} \times [0,1])} \chi_{[g \neq 0]} \bar{g} |g|^{-1} \in L^1_{\mathcal{B}}(\mu + \nu)$ und sehen

$$\int |g(x,y)| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1(y) = \int\limits_{\{x\} \times [0,1]} |g| \, \mathrm{d}(\mu + \nu) = \int fg \, \mathrm{d}(\mu + \nu) = \int f \, \mathrm{d}\nu = 0,$$

da $\nu(\{x\} \times [0,1]) = 0$. Mit dem Satz von Fubini sehen wir

$$\int \int |g(x,y)| \; \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x) \; \mathrm{d}\mathcal{L}^1(y) = \int \int |g(x,y)| \; \mathrm{d}\mathcal{L}^1(y) \; \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x) = 0,$$

da g borelmeßbar, also auch $\mathcal{L}^2 = (\mathcal{L}^1 \otimes \mathcal{L}^1)-$meßbar ist. Daher existiert ein $y_0 \in [0,1]$ mit

$$\int |g(x,y_0)| \; \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x) = 0.$$

Für $f := \chi_{([0,1]\times\{y_0\})} \in L^1_{\mathcal{B}}(\mu+\nu)$ sehen wir

$$1 = \nu([0,1] \times \{y_0\}) = \int f \; \mathrm{d}\nu =$$

$$= \int fg \; \mathrm{d}(\mu+\nu) = \int\limits_{[0,1]\times\{y_0\}} g \; \mathrm{d}(\mu+\nu) = \int g(x,y_0) \; \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x) = 0,$$

also ein Widerspruch.

2. Es sei ν das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ und $l^\infty := L^\infty(\nu) = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty\}$. $c_0 := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_k \to 0\}$ ist ein echter abgeschlossener Unterraum von l^∞ . Daher existiert mit einem Korollar zum Satz von Hahn-Banach, siehe [A] Satz 4.3, ein stetiges lineares Funktional $\Lambda \in (l^\infty)^* - \{0\}$ mit $\Lambda = 0$ auf c_0 . Wir zeigen, es gibt kein $y \in l^1 := L^1(\nu) = \{(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid \sum_{k=1}^\infty |y_k| < \infty\}$ mit

$$\Lambda x = \Lambda_y x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \quad \forall x \in l^\infty,$$

also $l^1 \neq (l^\infty)^*$.

Für solches y sehen wir für $e_l := (\delta_{kl})_{k\in\mathbb{N}} \in c_0$, daß

$$0 = \Lambda e_l = y_l,$$

also $y = 0$ und $\Lambda = 0$ im Widerspruch zu $\Lambda \neq 0$.

□

9 Hausdorff-Maße

Definition 9.1 *Es sei X ein metrischer Raum, $0 \leq s < \infty, 0 < \delta \leq \infty$.*

1. *Für $A \subseteq X$ ist*

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2} \right)^s \;\middle|\; A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \ \operatorname{diam} C_j \leq \delta \right\}$$

   wobei $\alpha(s) = \pi^{s/2}/\Gamma(s/2+1)$, *mit* $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \,\mathrm{d}x$, $\alpha(0) = 1, (\operatorname{diam} \emptyset)^s := 0$, *und* $(\operatorname{diam} C)^0 = 1$ *für* $C \neq \emptyset$.

2. *Das s-dimensionale Hausdorff-Maß auf X ist für $A \subseteq X$ definiert durch*

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

□

Wir brauchen $\delta \to 0$, damit die Überdeckung $\{C_j\}$ der lokalen Geometrie von A folgt. Für $s = n \in \mathbb{N}$ und den Einheitsball $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $\alpha(n) = \omega_n := \mathcal{L}^n(B_1(0))$.

Proposition 9.1 *$\mathcal{H}^s$ ist ein borelreguläres Maß.*

Beweis:
Zuerst ist $\mathcal{H}^s_\delta$ ein Maß, denn sei $A \subseteq \cup_{k=1}^\infty A_k \subseteq X$ und $A_k \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty C_j^k$, $\operatorname{diam} C_j^k \leq \delta$. Dann gilt

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j^k$$

und

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam} C_j^k}{2} \right)^s$$

also

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_k) \ .$$

Daraus folgt

$$\mathcal{H}^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sup_{\delta > 0} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_k) \ ,$$

und $\mathcal{H}^s$ ist auch ein Maß.

Nun beweisen wir mit Proposition 7.1, daß $\mathcal{H}^s$ ein Borel-Maß ist. Dazu seien $A, B \subseteq X$, $d(A,B) > 0$ und $\delta < d(A,B)$. Weiter sei

$$A \cup B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \ \operatorname{diam} C_j \leq \delta \ .$$

Wir definieren:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &:= \{j \mid C_j \cap A \neq \emptyset\}\\ \mathcal{B} &:= \{j \mid C_j \cap B \neq \emptyset\}\end{aligned}$$

Es gilt

$$A \subseteq \bigcup_{j\in\mathcal{A}} C_j \text{ und } B \subseteq \bigcup_{j\in\mathcal{B}} C_j \,.$$

Da

$$\operatorname{diam} C_j \leq \delta < d(A,B)$$

folgt

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset\,,$$

und somit

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B) &\leq \sum_{j\in\mathcal{A}} \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^s + \sum_{j\in\mathcal{B}} \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^s\\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^s \,.\end{aligned}$$

Nehmen wir das Infimum über alle solchen $\{C_j\}$, so ergibt dies

$$\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B)$$

und für $\delta \searrow 0$

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)\,.$$

Nach Proposition 7.1 ist $\mathcal{H}^s$ ein Borel-Maß.

Schließlich zeigen wir, daß $\mathcal{H}^s$ borelregulär ist. Dazu beachten wir, daß

$$\operatorname{diam} C = \operatorname{diam} \overline{C}$$

für alle $C \subseteq X$, also

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^s \;\middle|\; A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ \operatorname{diam} C_j \leq \delta,\ C_j \text{ abgeschlossen}\right\}\,.$$

Für $A \subseteq X$ mit $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ gilt $\mathcal{H}^s(X) = \infty$, und X ist eine Borelmenge, die A umfaßt. Nun gelte $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, also auch $\mathcal{H}^s_\delta(A) < \infty$. Dann existieren für $\delta_k \searrow 0$ abgeschlossene Mengen $C_j^k \subseteq X$ mit diam $C_j^k \leq \delta_k$ und

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j^k$$

und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam} C_j^k}{2}\right)^s \leq H^s_{\delta_k}(A) + \delta_k\,.$$

Wir definieren die Borelmengen

$$B_k := \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j^k \text{ und } B := \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \ .$$

Dies ergibt

$$A \subseteq B_k \text{ und } A \subseteq B \ ,$$

sowie

$$\mathcal{H}^s_{\delta_k}(B) \leq \mathcal{H}^s_{\delta_k}(B_k) \leq \mathcal{H}^s_{\delta_k}(A) + \delta_k \ ,$$

also für $k \to \infty$

$$\mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A) \ ,$$

und somit die Behauptung.

///

Proposition 9.2

1. *$\mathcal{H}^0$ ist das Zählmaß auf X.*
2. *$\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}^1_\delta = \mathcal{L}^1$ auf $\mathbb{R}$ für alle $\delta > 0$.*
3. *$\mathcal{H}^s \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n$ für $s > n$.*
4. *$\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ für $\lambda > 0,\ A \subseteq \mathbb{R}^n$.*
5. *$\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ für jede affine Isometrie $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ A \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Beweis: **i**) Da $\alpha(0) = 1$, gilt $\mathcal{H}^0(\{x\}) = 1$ für $x \in X$. Da alle endlichen Mengen abgeschlossen sind und $\mathcal{H}^0$ ein Borel-Maß ist, folgt

$$\mathcal{H}^0(A) = \#(A)$$

für alle endlichen Mengen und

$$\mathcal{H}^0(A) = \infty$$

für alle unendlichen Mengen.

ii) Für $A \subseteq \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ gilt

$$\mathcal{L}^1(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam} C_j \ \middle|\ A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \right\} \leq \mathcal{H}^1_\delta(A) \ .$$

Andererseits sei $I_k := [k\delta, (k+1)\delta],\ k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \leq \delta$$

und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \leq \operatorname{diam} C_j \ .$$

Dies ergibt für $A \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty C_j$, daß

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty \bigcup_{k=-\infty}^\infty (C_j \cap I_k) \ ,$$

also

$$\mathcal{H}^1_\delta(A) \le \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=-\infty}^\infty \operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \le \sum_{j=1}^\infty \operatorname{diam} C_j$$

und

$$\mathcal{H}^1_\delta(A) \le \mathcal{L}^1(A) \ .$$

Es folgt

$$\mathcal{H}^1_\delta = \mathcal{L}^1$$

und

$$\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1 \ .$$

iii) Es sei $I = [0,1]^n$. I ist die Vereinigung von k^n Würfeln W der Form

$$W = \prod_{i=1}^n \left[\frac{j_i - 1}{k}, \frac{j_i}{k} \right]$$

also

$$\operatorname{diam} W \le \frac{n^{1/2}}{k} \ .$$

Dies ergibt für $n^{1/2}/k < \delta$, daß

$$\mathcal{H}^s_\delta(I) \le k^n \cdot \alpha(s) \left(\frac{n^{1/2}}{2k} \right)^s = \alpha(s) 2^{-s} n^{s/2} k^{n-s} \to 0$$

für $k \to \infty$, also

$$\mathcal{H}^s(I) = \mathcal{H}^s_\delta(I) = 0 \ .$$

Mit abzählbarer Vereinigung folgt

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0 \ .$$

iv) und **v**) sind trivial.

///

Proposition 9.3 *Es sei $f : X \to Y$ eine Lipschitzabbildung*

$$d(f(x), f(y)) \le L d(x,y) \quad \forall x, y \in X$$

und für ein $L < \infty$.

Dann gilt für $A \subseteq X$, $0 \le s < \infty$, daß

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \le L^s \mathcal{H}^s(A) \ .$$

Beweis: Es sei $L, \delta > 0$ und $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$, diam $C_j \leq \delta$. Dann gilt

$$f(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} f(C_j), \quad \text{diam } f(C_j) \leq L \text{ diam } C_j \leq L\delta$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_{L\delta}(f(A)) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } f(C_j)}{2} \right)^s \\
&\leq L^s \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s .
\end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\mathcal{H}^s_{L\delta}(f(A)) \leq L^s \mathcal{H}^s_\delta(A)$$

und

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq L^s \mathcal{H}^s(A)$$

für $\delta \searrow 0$.

///

Proposition 9.4 *Es sei $A \subseteq X$, $0 \leq s < t < \infty$. Dann gilt:*

$$\mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$$

und

$$\mathcal{H}^t(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty .$$

Beweis: Es sei $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, $\delta > 0$. Dann existieren $C_j \subseteq X$ mit diam $C_j \leq \delta$ und

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1 \leq \mathcal{H}^s(A) + 1 .$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^t_\delta(A) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(t) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^t \\
&\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \left(\frac{\delta}{2} \right)^{t-s} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s \\
&\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} (\mathcal{H}^s(A) + 1) \left(\frac{\delta}{2} \right)^{t-s}
\end{aligned}$$

und

$$\mathcal{H}^t(A) = 0$$

für $\delta \searrow 0$.

///

Definition 9.2 *Die* Hausdorff-Dimension *von* $A \subseteq X$ *ist definiert durch*

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{0 \leq s < \infty \mid \mathcal{H}^s(A) = 0\} .$$

□

Falls $\dim_{\mathcal{H}}(A) = s$ ist, so gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^t(A) &= 0 \quad \text{für } t > s \\ \mathcal{H}^t(A) &= \infty \quad \text{für } 0 \leq t < s \end{aligned}$$

und

$$0 \leq \mathcal{H}^s(A) \leq \infty .$$

Da $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$ für $s > n$ gemäß Proposition 9.2 **iii**), folgt

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq n \quad \text{für } A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Aus Proposition 9.3 folgt

$$\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) \leq \dim_{\mathcal{H}}(A)$$

für jede Lipschitzabbildung f.

10 Isodiametrische Ungleichung

Ziel dieses Paragraphen ist folgender Satz.

Satz 10.1 *Auf* $\mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{H}^n_\delta = \mathcal{H}^n .$$

Beweis:
Für $\delta > 0$ erhalten wir mit der Definition 9.1 des Masses $\mathcal{H}^n_\delta$ und $x \in \mathbb{R}^n, 0 < \varrho \leq \delta/2$, dass $diam\ \bar{B}_\varrho(x) = 2\varrho \leq \delta$ und

$$\mathcal{H}^n_\delta(\bar{B}_\varrho(x)) \leq \omega_n \left(\frac{\text{diam } \bar{B}_\varrho(x)}{2} \right)^n = \omega_n \varrho^n = \mathcal{L}^n(\bar{B}_\varrho(x)).$$

Für $S \subseteq \mathbb{R}^n, S \subseteq U$ offen ist

$$\mathcal{V} := \{ \bar{B}_\varrho(x) \subseteq U \mid x \in S, 0 < \varrho \leq \delta/10 \}$$

eine feine Überdeckung von S, und mit dem Überdeckungssatz von Vitali, Satz 4.4, existiert eine abzählbare, paarweise disjunkte Teilfamilie $\mathcal{V}' = \{ \bar{B}_{\varrho_j}(x_j) \}_{j \in J} \subseteq \mathcal{V}, J \subseteq \mathbb{N}$, mit

$$S \subseteq \bigcup_{j \in J} \bar{B}_{5\varrho_j}(x_j)$$

und

$$\mathcal{L}^n(S - \bigcup_{j \in J} \bar{B}_{\varrho_j}(x_j)) = 0. \tag{10.1}$$

Mit der Subadditivität des Masses $\mathcal{H}^n_\delta$ ergibt dies

$$\mathcal{H}^n_\delta(S) \leq \sum_{j \in J} \mathcal{H}^n_\delta(\bar{B}_{5\varrho_j}(x_j)) \leq \sum_{j \in J} 5^n \mathcal{L}^n(\bar{B}_{\varrho_j}(x_j)) = 5^n \mathcal{L}^n(\bigcup_{j \in J} \bar{B}_{5\varrho_j}(x_j)) \leq 5^n \mathcal{L}^n(U).$$

Nehmen wir das Infimum über $U \supseteq S$ offen, so erhalten wir, da $\mathcal{L}^n$ mit Proposition 4.2 ein Radon-Maß ist, dass

$$\mathcal{H}^n(S) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^n_\delta(S) \leq 5^n \mathcal{L}^n(S) \quad \forall S \subseteq \mathbb{R}^n,$$

also $\mathcal{H}^n \leq 5^n \mathcal{L}^n$. Mit (10.1) folgt insbesondere

$$\mathcal{H}^n_\delta(S - \bigcup_{j \in J} \bar{B}_{\varrho_j}(x_j)) = 0.$$

Dies ergibt wie oben

$$\mathcal{H}^n_\delta(S) \leq \mathcal{H}^n_\delta(S - \bigcup_{j \in J} \bar{B}_{\varrho_j}(x_j)) + \sum_{j \in J} \mathcal{H}^n_\delta(\bar{B}_{\varrho_j}(x_j)) \leq$$

$$\leq \sum_{j \in J} \mathcal{L}^n(\bar{B}_{\varrho_j}(x_j)) = \mathcal{L}^n(\bigcup_{j \in J} \bar{B}_{\varrho_j}(x_j)) \leq \mathcal{L}^n(U),$$

also $\mathcal{H}^n \leq \mathcal{L}^n$.

//

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung beweisen wir die isodiametrische Ungleichung.

Satz 10.2 (Isodiametrische Ungleichung) *Für alle Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \omega_n \left(\frac{diam\ A}{2}\right)^n .$$

□

Beweis von Satz 10.1:
Es sei $\delta > 0$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$ und diam $C_j \leq \delta$. Dann folgt mit Satz 10.2

$$\mathcal{L}^n(S) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(C_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \omega_n \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^n .$$

Nehmen wir das Infimum, so gilt

$$\mathcal{L}^n(S) \leq \mathcal{H}^n_\delta(S) .$$

Dies ergibt mit dem schon bekannten $\mathcal{H}^n \leq \mathcal{L}^n$, daß

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{H}^n_\delta = \mathcal{H}^n .$$

///

Satz 10.2 beweisen wir mit sogenannten Steiner-Symmetrisierungen.

Definition 10.1 *Für $a, b \in \mathbb{R}^n$, $|a| = 1$ setzen wir*

$$L^a_b := \{b + ta \mid t \in \mathbb{R}\} ,$$

die Gerade durch b in Richtung a, und

$$P_a := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot a = 0\} ,$$

die Ebene orthogonal zu a. Die Steiner-Symmetrisierung *von $A \subseteq \mathbb{R}^n$ bezüglich P_a ist definiert durch*

$$S_a := \bigcup_{b \in P_a, A \cap L^a_b \neq \emptyset} \{b + ta \mid |t| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L^a_b) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A \cap L^a_b)\} .$$

□

Einfache Eigenschaften der Steiner-Symmetrisierung besagt die folgende Proposition.

Proposition 10.1 *Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, $|a| = 1$ gilt:*

1. *diam $S_a(A) \leq$ diam A.*
2. *Ist A meßbar bezüglich $\mathcal{L}^n$, so ist $S_a(A)$ meßbar bezüglich $\mathcal{L}^n$, und es gilt*

$$\mathcal{L}^n(S_a(A)) = \mathcal{L}^n(A) .$$

Beweis:
Es genügt, $a = e_n = (0, \dots, 0, 1)$ zu betrachten.

i) Wir nehmen $\operatorname{diam} A < \infty$ an. Es seien $x = (y, t)$, $x' = (y', t') \in S_{e_n}(A)$ und

$$\begin{aligned} A_y &:= \{s \in \mathbb{R} \mid (y, s) \in A\} \\ A_{y'} &:= \{s' \in \mathbb{R} \mid (y', s') \in A\} \\ a &:= \inf A_y \le \sup A_y =: b \\ a' &:= \inf A_{y'} \le \sup A_{y'} =: b' . \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} |t - t'| &\le |t| + |t'| \le \frac{1}{2}(\mathcal{H}^1(A_y) + \mathcal{H}^1(A_{y'})) \\ &\le \frac{1}{2}[(b - a) + (b' - a')] = \frac{1}{2}[(b - a') + (b' - a)] \\ &\le \sup(b - a', b' - a) = b - a' \end{aligned}$$

wobei wir $b - a' \ge b' - a$ annehmen. Da $(y, b), (y', a') \in \bar{A}$ sind, folgt

$$\begin{aligned} |x - x'| &= \sqrt{|y - y'|^2 + |t - t'|^2} \le \sqrt{|y - y'|^2 + |b - a'|^2} \\ &= |(y, b) - (y', a')| \le \operatorname{diam} \bar{A} = \operatorname{diam} A . \end{aligned}$$

//

ii) Da A meßbar bezüglich $\mathcal{L}^n$ ist, folgt aus dem Satz von Fubini, Satz 3.1, daß die Funktion f, definiert durch

$$f(y) := \mathcal{L}^1(A \cap L^{e_n}_{(y,0)}) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(y, t)\, d\mathcal{L}^1(t) ,$$

$\mathcal{L}^{n-1}$-meßbar ist, und es gilt

$$\mathcal{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(y)\, d\mathcal{L}^{n-1}(y) .$$

Weiter gilt nach Definition für $F(y, t) := f(y) - 2|t|$

$$S_{e_n}(A) = \{(y, t) \mid |t| \le \frac{1}{2} f(y), A \cap L^{e_n}_{(y,0)} \neq \emptyset \ \} =$$

$$= [F \ge 0] - \{(y, 0) \mid A \cap L^{e_n}_{(y,0)} = \emptyset \ \}.$$

Die erste Menge $[F \ge 0]$ ist meßbar bezüglich $\mathcal{L}^n$, da F meßbar bezüglich $\mathcal{L}^n$ ist, und die zweite Menge ist Teilmenge der $\mathcal{L}^n-$Nullmenge $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, also selbst eine $\mathcal{L}^n-$Nullmenge und somit $\mathcal{L}^n-$meßbar. Damit ist S_{e_n} meßbar bezüglich $\mathcal{L}^n$ und

$$\mathcal{L}^n(S_{e_n}(A)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(y)\, d\mathcal{L}^{n-1}(y) = \mathcal{L}^n(A) .$$

///

Beweis von Satz 10.2:
Wir können diam $A < \infty$ und A abgeschlossen annehmen. Wir definieren sukzessive

$$A_1 := S_{e_1}(A),\ A_2 := S_{e_2}(A_1), \dots,\ A_n := S_{e_n}(A_{n-1}),\ A^* := A_n \ .$$

Wir behaupten: A_k ist symmetrisch bezüglich $P_{e_1}, \dots,\ P_{e_k}$ für alle k mit $1 \leq k \leq n$.

Dies gilt trivial für

$$A_1 = S_{e_1}(A) \ .$$

Für $1 \leq k < n$ ist $A_{k+1} := S_{e_{k+1}}(A_k)$ symmetrisch bezüglich $P_{e_{k+1}}$. Nach Annahme ist A_k symmetrisch bezüglich $P_{e_1}, \dots,\ P_{e_k}$. Es sei $\Sigma_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ für $1 \leq j \leq k$ die Spiegelung an P_{e_j}. Da $\Sigma_j(A_k) = A_k$ ist, gilt für $b \in P_{e_{k+1}}$

$$\Sigma_j(A_k \cap L_b^{e_{k+1}}) = \Sigma_j(A_k) \cap \Sigma_j(L_b^{e_{k+1}}) = A_k \cap L_{\Sigma_j b}^{e_{k+1}} \ ,$$

insbesondere

$$\mathcal{H}^1(A_k \cap L_b^{e_{k+1}}) = \mathcal{H}^1(\Sigma_j(A_k \cap L_b^{e_{k+1}})) = \mathcal{H}^1(A_k \cap L_{\Sigma_j b}^{e_{k+1}}),$$

also

$$\Sigma_j(A_{k+1} \cap L_b^{e_{k+1}}) = A_{k+1} \cap L_{\Sigma_j b}^{e_{k+1}} \ ,$$

da $A_{k+1} = S_{e_{k+1}}(A_k)$, und A_{k+1} ist auch symmetrisch bezüglich $P_{e_1}, \dots,\ P_{e_k}$.

//

Daraus folgt, daß A^* symmetrisch bezüglich $P_{e_1}, \dots,\ P_{e_n}$ ist und somit auch bezüglich 0. Dies ergibt

$$A^* \subseteq \overline{B_{\frac{1}{2}\text{diam } A^*}(0)} \ ,$$

denn mit $x \in A^*$ ist auch $-x \in A^*$ und $2|x| \leq$ diam A^*. Mit Proposition 10.1 folgt

$$\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(A^*) \leq \omega_n \left(\frac{\text{diam } A^*}{2} \right)^n \leq \omega_n \left(\frac{\text{diam } A}{2} \right)^n \ .$$

///

11 Flächenformel

Definition 11.1 *Es sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \leq m$, linear. Dann ist der Jacobi von L definiert durch*

$$JL := \sqrt{\det(L^T L)}.$$

Falls $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in $x \in U$ offen differenzierbar ist, so definieren wir den Jacobi von f bei x durch

$$Jf(x) := J(Df(x)) = \sqrt{\det(Df(x)^T Df(x))}.$$

□

Wir sehen, daß

$$JL > 0$$

genau dann, wenn $rk(L) = n$, also L vollen Rang hat.

In diesem Abschnitt soll die Flächenformel bewiesen werden.

Satz 11.1 (Flächenformel) *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \leq m$, $f \in C^1_{loc}$. Dann gilt für jede $\mathcal{H}^n$-meßbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, daß*

$$\Big(y \mapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y))\Big) \quad \textit{ist } \mathcal{H}^n - \textit{meßbar auf } \mathbb{R}^m$$

und

$$\int_A Jf \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y)) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n(y).$$

□

Bemerkung:

Tatsächlich gilt die Flächenformel für lokale Lipschitzabbilungen. Dies ergibt sich aus der obigen Version mit dem Erweiterungssatz von Whitney, siehe [EGa] Theorem 6.5.1 and Theorem 6.6.1.

□

Folgende Proposition ist eine einfache Konsequenz aus der linearen Algebra.

Proposition 11.1 *Es sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \leq m$, linear. Dann gilt für $A \subseteq \mathbb{R}^n$, daß*

$$\mathcal{H}^n(L(A)) = JL \cdot \mathcal{H}^n(A) \; . \tag{11.1}$$

Beweis:

Ist $JL = 0$, so gilt

$$\dim L(\mathbb{R}^n) \leq n - 1$$

und

$$\mathcal{H}^n(L(\mathbb{R}^n)) = 0,$$

also (11.1).

Ist $JL > 0$, so gilt $\dim L(\mathbb{R}^n) = n$, und wir wählen eine orthonormale Basis

$$v_1, \ldots, v_n$$

von $L(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren

$$O := (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^{m \times n} \, .$$

Es sind

$$O : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\approx} L(\mathbb{R}^n),$$
$$O^T : L(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n$$

Isomorphismen der inneren Produkträume, die zueinander invers sind. Insbesondere gilt

$$OO^T L = L \, .$$

Deshalb gilt

$$\mathcal{H}^n(L(A)) = \mathcal{H}^n(O^T L(A)) = |\det(O^T L)| \cdot \mathcal{H}^n(A),$$

und mit

$$|\det(O^T L)| = \sqrt{\det(L^T O O^T L)} = \sqrt{\det(L^T L)} = JL$$

folgt (11.1).

///

Wir erweitern nun schrittweise diese Proposition, bis wir die Flächenformel für C^1_{loc}–Abbildungen erhalten.

Proposition 11.2 *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \leq m$, $f \in C^1_{loc}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit*

$$Jf(x_0) \neq 0 \, . \tag{11.2}$$

Dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0, so daß

$$f|U(x_0) \textit{ injektiv ist}$$

und für alle Borelmengen $A \subseteq U(x_0)$ die Menge $f(A)$ wieder borelsch ist und

$$\mathcal{H}^n(f(A)) = \int_A Jf \, d\mathcal{L}^n \tag{11.3}$$

Beweis:
Aus (11.2) folgt

$$n = rk(Df(x_0)),$$

und wir nehmen o.B.d.A. an, daß

$$n = rk(\partial_i f_j(x_0))_{i,j=1,\ldots,n} \, .$$

Wir definieren

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m,$$
$$F(x, y) := f(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

und sehen

$$DF(x_0,0) = \begin{pmatrix} (Df_j(x_0))_{j=1,\dots,n} & 0 \\ (Df_j(x_0))_{j=n+1,\dots,m} & I_{m-n} \end{pmatrix},$$

das nichtsingulär ist.

Dann ist F ein C^1-Diffeomorphismus

$$F : U(x_0) \times U(0) \stackrel{\approx}{\longrightarrow} V \subseteq \mathbb{R}^m$$

von einer Umgebung $U(x_0)\times U(0)$ von $(x_0,0)$ auf eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$. Insbesondere ist $f|U(x_0)$ injektiv, und F bzw. f bilden Borelmengen wieder auf Borelmengen ab.

Wir betrachten μ, definiert durch

$$\mu(S) := \mathcal{H}^n(F(S)) \quad \text{für } S \subseteq U(x_0) \times U(0),$$

und seine Einschränkung $\nu := \mu\lfloor U(x_0) \times \{0\}$ auf $U(x_0) \times \{0\} \cong U(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann sind μ, ν borelreguläre Maße auf $U(x_0) \times U(0)$ bzw. $U(x_0)$.

Behauptung:

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\nu(B_\varrho(x))}{\mathcal{L}^n(B_\varrho(x))} = Jf(x) \quad \text{für alle } x \in U(x_0)\,. \tag{11.4}$$

Aus dieser Behauptung wird (11.3) folgen. Denn zuerst folgt aus (11.4), da $Jf(x_0) < \infty$, daß $\nu(B_{\varrho_0}(x_0)) < \infty$ für ein $\varrho_0 > 0$. Damit können wir $\nu(U(x_0)) < \infty$ annehmen, und ν ist mit Proposition 7.3 ein Radon-Maß , das wir auf $\mathbb{R}^n$ betrachten. (11.4) besagt $D_{\mathcal{L}^n}\nu = Jf$, insbesondere $[D_{\mathcal{L}^n}\nu = +\infty] = \emptyset$. Dann folgt mit dem Differentiationssatz, Satz 4.1, und dem Überdeckungssatz von Vitali, Lemma 4.4, für $A \subseteq U(x_0)$ borelsch

$$\nu(A) = \int_A Jf \, d\mathcal{L}^n.$$

Beachten wir für $A \subseteq U(x_0)$

$$\nu(A) = \mu(A \times \{0\}) = \mathcal{H}^n(F(A \times \{0\})) = \mathcal{H}^n(f(A))\,,$$

so folgt (11.3).

Es verbleibt (11.4) zu zeigen. Dazu sei $x \in U(x_0)$ und $B_\varrho(x) \subset\subset U(x_0)$ und $B_\varrho(x,0) \subset\subset U(x_0) \times U(0)$. Wir definieren

$$\begin{aligned} L &:= Df(x), \\ L_0 &:= DF(x,0) = \begin{pmatrix} Df(x) & \begin{matrix} 0 \\ I_{m-n} \end{matrix} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es gilt für $z \in U(x_0) \times U(0)$

$$F(z) = (L_0 z + F(z) - L_0 z) = (I + (F - L_0)L_0^{-1})L_0 z,$$

also

$$F = \phi \circ L_0$$

mit

$$Lip_{L_0(B_\varrho(x,0))}\ \phi,\ Lip_{F(B_\varrho(x,0))}\ \phi^{-1} \le 1+\omega(\varrho)\ . \tag{11.5}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\nu(B_\varrho(x)) &= \mathcal{H}^n(\phi\circ L_0(B_\varrho(x)\times\{0\}))\\ &\le (Lip_{B_\varrho(x)}\ \phi)^n\ \mathcal{H}^n(L_0(B_\varrho(x)\times\{0\}))\\ &\le (1+\omega(\varrho))^n\ \mathcal{H}^n(L(B_\varrho(x)))\ ,\end{aligned}$$

also mit Satz 10.1 und Proposition 11.1

$$\frac{\nu(B_\varrho(x))}{\mathcal{L}^n(B_\varrho(x))} \le (1+\omega(\varrho))^n\ JL\ . \tag{11.6}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\nu(B_\varrho(x)) &= \mathcal{H}^n(F(B_\varrho(x))) \ge\\ &\ge (Lip_{F(B_\varrho(x))}\ \phi^{-1})^{-n}\ \mathcal{H}^n(\phi^{-1}F(B_\varrho(x)))\\ &\ge (1+\omega(\varrho))^{-n}\ \mathcal{H}^n(L(B_\varrho(x)))\ ,\end{aligned}$$

und

$$\frac{\nu(B_\varrho(x))}{\mathcal{L}^n(B_\varrho(x))} \ge (1+\omega(\varrho))^{-n}\ JL\ . \tag{11.7}$$

Aus (11.6) und (11.7) folgt

$$D_{\mathcal{L}^n}\nu(x) = JL = Jf(x),$$

also (11.4), und die Proposition ist bewiesen.

///

Damit sind wir in der Lage, die Flächenformel für C^1-Abbildungen im regulären Fall zu beweisen.

Proposition 11.3 *Es sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $n\le m$, $f\in C^1_{loc}$. Dann gilt für jede Borelmenge*

$$A\subseteq[Jf>0]\subseteq\mathbb{R}^n\ ,$$

daß

$$(y\mapsto\mathcal{H}^0(A\cap f^{-1}(y)))\quad \textit{ist borelmeßbar auf } \mathbb{R}^m$$

und

$$\int_A Jf\ d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^m}\mathcal{H}^0(A\cap f^{-1}(y))\ d\mathcal{H}^n(y)\ .$$

Beweis:
Für $x\in A\subseteq[Jf>0]$ wählen wir $U(x)\subseteq\mathbb{R}^n$ wie im Proposition 11.2, und betrachten eine abzählbare Überdeckung

$$A\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}U(x_j)$$

mit $x_j \in A$. Also ist A die paarweise disjunkte Vereinigung von Borelmengen A_j mit

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^{\infty} A_j, \\ A_j &\subseteq U(x_j)\,. \end{aligned} \tag{11.8}$$

Da $f|A_j$ injektiv ist, gilt

$$\mathcal{H}^0(A_j \cap f^{-1}(y)) = \chi_{f(A_j)}(y)$$

und $(y \mapsto \mathcal{H}^0(A_j \cap f^{-1}(y)))$ ist borelmeßbar, da $f(A_j)$ gemäß Proposition 11.2 eine Borelmenge ist. Da

$$\mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^0(A_j \cap f^{-1}(y)),$$

ist auch die Funktion

$$(y \mapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y))) \text{ borelmeßbar}\,.$$

Schließlich folgt aus Proposition 11.2, daß

$$\begin{aligned} \int_A Jf\, d\mathcal{L}^n &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} Jf\, d\mathcal{L}^n = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(A_j \cap f^{-1}(y))\, d\mathcal{H}^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y))\, d\mathcal{H}^n(y)\,. \end{aligned}$$

///

Der singuläre Fall folgt durch Approximation.

Proposition 11.4 *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \le m$, $f \in C^1_{loc}$. Dann gilt für jede Borelmenge $A \subseteq [Jf = 0] \subseteq \mathbb{R}^n$, daß*

$$\mathcal{H}^n(f(A)) = 0\,,$$

insbesondere ist

$$\mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y)) = 0 \quad \textit{für } \mathcal{H}^n - \textit{fast alle } y \in \mathbb{R}^m,$$

und

$$\Big(y \mapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y))\Big) \ \textit{ist } \mathcal{H}^n - \textit{meßbar auf } \mathbb{R}^m.$$

Beweis:
Wir faktorisieren

$$f = \pi \circ g_\epsilon$$

mit

$$\begin{aligned} g_\epsilon : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ g_\epsilon(x) &= (f(x), \epsilon x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \pi(y, x) &= y\,. \end{aligned}$$

Es gilt

$$Dg_\epsilon = \begin{pmatrix} Df \\ \epsilon I \end{pmatrix}$$

und

$$Jg_\epsilon = \sqrt{\det(Df^T, \epsilon I) \begin{pmatrix} Df \\ \epsilon I \end{pmatrix}} = \sqrt{\det(\epsilon^2 I + Df^T Df)} \,.$$

Dies ergibt

$$Jg_\epsilon > 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n$$

und

$$Jg_\epsilon \to Jf \quad \text{punktweise auf } \mathbb{R}^n.$$

Da $Lip\,\pi \leq 1$, folgt mit Proposition 11.3 für beschränktes A, daß

$$\mathcal{H}^n(f(A)) \leq \mathcal{H}^n(g_\epsilon(A)) \leq \int_A Jg_\epsilon \, d\mathcal{L}^n \;\to\; \int_A Jf \; \mathcal{L}^n = 0 \,,$$

und somit die Behauptung.

///

Proposition 11.3 und 11.4 ergeben die Flächenformel für C^1_{loc}−Abbildungen in Satz 11.1.

Beweis der Flächenformel, Satz 11.1:
Mit Proposition 11.3 gilt die Flächenformel für alle Borelmengen $A \subseteq [Jf > 0]$, und mit Proposition 11.4 gilt die Flächenformel für alle Borelmengen $A \subseteq [Jf = 0]$, und durch zerlegen und disjunkter Vereinigung folgt die Flächenformel für alle Borelmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^n(A) = 0$, erhalten wir mit Proposition 9.3 auch $\mathcal{H}^n(f(A)) = 0$, da f lokal lipschitz ist, und die Flächenformel folgt für A wie in Proposition 11.4.

Für $\mathcal{H}^n$−messbares $A \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, da $\mathcal{H}^n$ borelregulär und σ−endlich auf $\mathbb{R}^n$ ist, eine Borelmenge $B \supseteq A$ mit $\mathcal{H}^n(B - A) = 0$. Dann ist mit obiger Bemerkung

$$\mathcal{H}^0((B - A) \cap f^{-1}(y)) = 0 \quad \text{für } \mathcal{H}^n - \text{fast alle } y \in \mathbb{R}^m,$$

insbesondere

$$\mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y)) = \mathcal{H}^0(B \cap f^{-1}(y)) \quad \text{für } \mathcal{H}^n - \text{fast alle } y \in \mathbb{R}^m,$$

also ist

$$\Big(y \mapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y))\Big) \text{ ist } \mathcal{H}^n - \text{meßbar auf } \mathbb{R}^m$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y)) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(B \cap f^{-1}(y)) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n(y) = \int_B Jf \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int_A Jf \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

Damit gilt die Flächenformel für A und somit allgemein.

///

Approximieren wir meßbare Funktionen durch einfache Funktionen, so ergibt sich folgendes Korollar.

Korollar 11.2 *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \leq m$, $f \in C^1_{loc}$. Dann gilt für jede $\mathcal{H}^n$-meßbare, nichtnegative Funktion $g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, daß*

$$\left(y \mapsto \int_{f^{-1}(y)} g \, \mathrm{d}\mathcal{H}^0\right) \quad \textit{ist } \mathcal{H}^n - \textit{meßbar auf } \mathbb{R}^m$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \cdot Jf \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{f^{-1}(y)} g \, \mathrm{d}\mathcal{H}^0 \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n(y).$$

Insbesondere gilt dies für alle $g \in L^1(\mathcal{L}^n)$ mit kompaktem Träger.

Beweis:
Für $g = \chi_A$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathcal{H}^n$-meßbar, gilt

$$\int_{f^{-1}(y)} \chi_A \, d\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y)) \, ,$$

und die Aussage folgt direkt aus Satz 11.1 . Damit gilt die Aussage für einfaches, $\mathcal{H}^n-$meßbares, nichtnegatives g.

Da für $\mathcal{H}^n$-meßbares, nichtnegatives g eine Folge von einfachen, $\mathcal{H}^n$-meßbaren Funktionen g_k mit

$$0 \leq g_k \nearrow g$$

existiert, folgt die gesamte Behauptung aus dem Satz von der monotonen Konvergenz.

///

Mit der Flächenformel können wir das Volumenmass auf Untermannigfaltigkeiten als das Hausdorff-Mass identifizieren.

Korollar 11.3 *Für jede C^1-n-Untermannigfaltigkeit M in $\mathbb{R}^m$ ist das Volumenmass gegeben durch die Einschränkung des Hausdorff-Masses, d.h.*

$$vol_M = \mathcal{H}^n \lfloor M.$$

Beweis:
Wir betrachten eine lokale C^1-Parametrisierung $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{\approx} M \cap V$ von M mit $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und mit der Metrik

$$g_{ij} := \langle \partial_i \Phi, \partial_j \Phi \rangle.$$

wie in Definition 5.1. Daher gilt

$$(g_{ij}) = D\Phi^T \cdot D\Phi,$$

also

$$J\Phi = \sqrt{\det g_{ij}}$$

und mit Definition 5.1, dass

$$vol_M \lfloor (M \cap V) = \Phi_* \mu_g = \Phi_* (J\Phi \cdot \mathcal{L}^n \lfloor U).$$

Weiter ist für alle Borelmengen $B \subseteq M \cap V$ das Urbild $A := \Phi^{-1}(B) \subseteq U$ auch eine Borelmenge, da Φ stetig ist, und mit der Flächenformel, Satz 11.1, folgt

$$vol_M(B) = \int\limits_A J\Phi \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap \Phi^{-1}(y)) \; \mathrm{d}\mathcal{H}^n(y) = (\mathcal{H}^n \lfloor M)(B).$$

Da vol_M und $\mathcal{H}^n \lfloor M$ mit den Bemerkungen nach Definition 5.1 und Proposition 9.1 borelregulär sind, folgt die Gleichheit.

///

Teil IV

Appendix

A Lipschitzabbildungen

Definition A.1 *Eine Abbildung* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *heißt lipschitzstetig oder Lipschitzabbildung, falls für* $x, y \in A$ *gilt, daß*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

für ein $L < \infty$ *. Die kleinste solche Konstante* L *heißt Lipschitzkonstante, geschrieben*

$$lip\ f.$$

f *heißt lokal lipschitz, wenn zu jedem* $x \in A$ *ein* $\varrho > 0$ *existiert mit* $f|(B_\varrho(x) \cap A)$ *ist lipschitzstetig.*

□

Proposition A.1 *Jede Lipschitz-Abbildung* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *besitzt eine Lipschitzerweiterung von* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *, genauer es existiert*

$$\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ lipschitz },$$
$$\bar{f}|A = f,$$
$$lip\ \bar{f} = lip\ f.$$

Beweis:
Wir definieren

$$\bar{f}(x) := \inf_{y \in A} (f(y) + L|x - y|)$$

mit

$$L = lip\ f.$$

Da

$$f(y) + L|x - y| \geq f(z) - L|x - z|$$

für $x \in \mathbb{R}^n, y, z \in A$, ist $\bar{f}$ wohldefiniert und reellwertig. Weiter gilt

$$\bar{f}(x) = f(x)$$

für $x \in A$. Schließlich gilt für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, y \in A$

$$f(y) + L|x_1 - y| - f(y) - L|x_2 - y| \leq L(|x_1 - y| - |x_2 - y|) \leq L|x_1 - x_2|,$$

also

$$|\bar{f}(x_1) - \bar{f}(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

und $\bar{f}$ ist lipschitz mit $lip\ \bar{f} = L = lip\ f$.

///

Lipschitzabbildungen bilden Lebesgue-Nullmengen wieder in Nullmengen ab.

Proposition A.2 *Für* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *lokal lipschitz,* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen, gilt*

$$\forall S \subseteq U : \mathcal{L}^n(S) = 0 \Longrightarrow \mathcal{L}^n(f(S)) = 0.$$

Beweis:
Mit abzählbarer Vereinigung genügt es $S \subseteq B_{\varrho/2}(x) \subseteq U$ mit $f|B_\varrho(x)$ ist lipschitzstetig zu betrachten. Ist $\mathcal{L}^n(S) = 0$, so existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ nach Definition $a_{ki} < b_{ki} \in \mathbb{R}$ mit $S \subseteq \cup_{k=1}^\infty \prod_{i=1}^n]a_{ki}, b_{ki}[$ und $\sum_{k=1}^\infty \prod_{i=1}^n (b_{ki} - a_{ki}) < \varepsilon$. Nehmen wir o.B.d.A. $a_{ki}, b_{ki} \in \mathbb{Q}$ an, so können wir nach geeigneter Zerlegung die Intervalle $\prod_{i=1}^n]a_{ki}, b_{ki}[$ durch Würfel ersetzen, die ganz in $B_\varrho(x)$ enthalten sind. Wir erhalten $S \subseteq \cup_{k=1}^\infty (x_k +]0, r_k[^n) \subseteq B_\varrho(x)$ mit

$$\sum_{k=1}^\infty r_k^n < \varepsilon.$$

Da f auf $B_\varrho(x)$ lipschitzstetig ist, z.B. $\Lambda = lip\ f|B_\varrho(x)$, sehen wir

$$diam(f(x_k +]0, r_k[^n)) \leq \Lambda diam(x_k +]0, r_k[^n) \leq \Lambda \sqrt{n} r_k,$$

also

$$f(x_k +]0, r_k[^n) \subseteq B_{\Lambda\sqrt{n} r_k}(f(x_k))$$

und

$$\mathcal{L}^n(f(x_k +]0, r_k[^n)) \leq \mathcal{L}^n(B_1(0)) \Lambda^n n^{n/2} r_k^n.$$

Dies ergibt

$$\mathcal{L}^n(f(S)) \leq \sum_{k=1}^\infty \mathcal{L}^n(f((x_k +]0, r_k[^n)) \leq \sum_{k=1}^\infty \mathcal{L}^n(B_1(0)) \Lambda^n n^{n/2} r_k^n < \mathcal{L}^n(B_1(0)) \Lambda^n n^{n/2} \varepsilon,$$

also $\mathcal{L}^n(f(S)) = 0$, da $\varepsilon > 0$ beliebig war.

///

Das Ziel dieses Paragraphen ist zu zeigen, daß eine lipschitzstetige Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fast überall klassisch differenzierbar ist. Dazu brauchen wir erst folgende eindimensionale Proposition.

Proposition A.3 *Es sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *lokal lipschitz. Dann ist* f *für* $\mathcal{L}^1$*-fast alle* $t \in \mathbb{R}$ *klassisch differenzierbar, und für* $a < b$ *gilt*

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\ \mathrm{d}t$$

Beweis:
Da f lokal lipschitz ist, ist

$$t \mapsto f(t) + lip(f|[a, b])\ t =: \varphi(t)$$

monoton nichtfallend auf $[a,b]$, also ist diese Funktion und somit auch f nach dem Satz von Lebesgue, Korollar 4.2, fast überall klassisch differenzierbar. Weiter gilt mit Korollar 4.2, dass

$$\int_a^b (f'(t) + lip)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \varphi'(t)\ \mathrm{d}t \leq \varphi(b) - \varphi(a) = f(b) - f(a) + lip(b-a),$$

also

$$\int_a^b f'(t)\ \mathrm{d}t \leq f(b) - f(a).$$

Da mit f auch $-f$ lokal lipschitz ist, folgt Gleichheit, und die Proposition ist bewiesen.

///

Nun beweisen wir die höherdimensionale Verallgemeinerung.

Satz A.1 (Rademacher) *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sei lokal lipschitz. Dann ist f fast überall bezüglich $\mathcal{L}^n$ klassisch differenzierbar.*

Beweis:
Es genügt, $m = 1$ und f lipschitzstetig zu betrachten. Für $v \in \partial B_1$ sei

$$D_v f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, wo dieser Limes existiert. Die Komplementmenge sei A_v. Da $\overline{D}_v f = \limsup \ldots$ (bzw. $\underline{D}_v f = \liminf \ldots$) borelmeßbar sind und $A_v = [\overline{D}_v f \neq \underline{D}_v f]$, ist A_v eine Borelmenge. Weiter ist die Funktion

$$\begin{aligned} &\phi(t) = f(x+tv) \\ &\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

lipschitz, also fast überall differenzierbar. Somit ist

$$\mathcal{L}^1(\{t \in \mathbb{R} \mid x + tv \in A_v\}) = 0$$

und mit dem Satz von Fubini

$$\mathcal{L}^n(A_v) = 0\ .$$

Nun sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es gilt mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue und Proposition A.3

$$\int D_v f \cdot \varphi\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \lim_{t \searrow 0} \int \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \varphi(x)\ \mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{t \searrow 0} \int f(x) \frac{\varphi(x-tv) - \varphi(x)}{t}\ \mathrm{d}x = \int f \cdot D\varphi.(-v)\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = -\int f \cdot \partial_v \varphi\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n =$$

$$= -\int f \sum_{i=1}^n v_i \partial_i \varphi\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int \sum_{i=1}^n v_i \partial_i f \cdot \varphi\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int (grad\ f \cdot v) \varphi\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

Da $D_v f - (grad\ f \cdot v) \in L^\infty(\mathcal{L}^n)$ und $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit Proposition 4.1 und 4.2 dicht in $L^1(\mathcal{L}^n)$ liegt, folgt wieder mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue

$$\int \Big(D_v f - (grad\ f \cdot v)\Big)\varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in L^1(\mathcal{L}^n)$$

und mit Proposition 2.3

$$D_v f(x) = grad\ f(x) \cdot v \quad \text{für } \mathcal{L}^n - \text{fast alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Nun sei $\{v_k\} \subseteq \partial B_1$ dicht und

$$B_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{grad} f(x),\ D_{v_k} f(x) \text{ existiert und } D_{v_k} f(x) = \mathrm{grad} f(x) \cdot v_k\} \ .$$

Wir setzen

$$B := \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$$

und wissen

$$\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n - B) = 0 \ .$$

Wir zeigen nun, daß f in $x \in B$ differenzierbar ist. Dazu definieren wir

$$Q(v,t) := \frac{f(x+tv) - f(x) - t\mathrm{grad} f(x) \cdot v}{t} \ .$$

f ist differenzierbar in x mit $Df(x) = \mathrm{grad} f(x)$ genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists\ \delta > 0 : \sup_{v \in \partial B_1, 0 < t \le \delta} |Q(v,t)| \le \epsilon \tag{A.1}$$

Wir wissen

$$\lim_{t \downarrow 0} Q(v_k, t) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}\ , \tag{A.2}$$

und, da f lipschitz ist,

$$|Q(v,t) - Q(v',t)| \le (n+1) lip\ f \cdot |v - v'| \ . \tag{A.3}$$

Für $\epsilon > 0$ wählen wir $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall v \in \partial B_1 \quad \exists k \in \{1, \ldots, N\} : \qquad |v - v_k| \le \frac{\epsilon}{2(n+1) lip\ f} \ .$$

Dann wählen wir $\delta > 0$ mit (A.2), so daß

$$|Q(v_k, t)| \le \frac{\epsilon}{2}$$

für $k = 1, \ldots, N$, $0 < t \le \delta$.

Dann gilt für $v \in \partial B_1$, $0 < t \le \delta$ und v_k wie oben

$$|Q(v,t)| \le |Q(v_k,t)| + |Q(v,t) - Q(v_k,t)| < \epsilon \ ,$$

also folgt (A.1).

///

Bemerkung:
Ist f in $x \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so existiert $D_v f(x)$ für alle $v \in \partial B_1(0)$, und es gilt $D_v f(x) = Df(x) \cdot v = \mathrm{grad} f(x) \cdot v$, also folgt $x \in B$. Damit ist f genau auf der Borelmenge differenzierbar, und die Ableitung $x \mapsto Df(x) = \mathrm{grad} f(x)$ borelmeßbar.

□

Proposition A.4 *Es sei* $f : U \xrightarrow{\approx} V$ *eine lokale Bilipschitzabbildung zwischen zwei offenen Mengen* $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ *, d.h.* f *ist bijektiv und* f *und* f^{-1} *sind lokal lipschitz.*

Dann gilt für $\mathcal{L}^n$*–fast alle* $x \in U$ *, daß* f *differenzierbar in* x *,* f^{-1} *differenzierbar in* $y = f(x) \in V$ *ist und*

$$D(f^{-1})(y)Df(x) = I_n.$$

Beweis:
Mit dem Satz von Rademacher ist f außerhalb einer $\mathcal{L}^n$–Nullmenge $N_f \subseteq U$ und f^{-1} außerhalb einer $\mathcal{L}^n$–Nullmenge $N_{f^{-1}} \subseteq V$ differenzierbar. Mit Proposition A.2 ist $N := N_f \cup f^{-1}(N_{f^{-1}}) \subseteq U$ eine $\mathcal{L}^n$–Nullmenge, und für $x \in U - N$ ist f differenzierbar in x , $y := f(x) \in V - N_{f^{-1}}$, also f^{-1} differenzierbar in y . Da $id_U = f^{-1} \circ f$, folgt die letzte Identität mit der Kettenregel.

///

B Zerlegung der Eins

Definition B.1 *Für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnet $C_0^0(U)$ die Menge aller stetigen Funktionen $\varphi : U \to \mathbb{C}$ mit kompakten Träger in U , d.h.*

$$supp\ \varphi := \overline{[\varphi \neq 0]} \text{ ist kompakt } \subseteq U.$$

□

Proposition B.1 (Zerlegung der Eins) *Für eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und offene Mengen $V_1, \ldots, V_k \subseteq \mathbb{R}^n$ mit*

$$K \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_k$$

existieren lipschitzstetige $\varphi_l : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit kompaktem Träger $supp\ \varphi_l \subseteq V_l$ und

$$\sum_{l=1}^{k} \varphi_l = 1 \quad auf\ K.$$

Beweis:
Zu jedem $x \in K$ existiert eine offene Umgebung $U(x)$ von x mit kompaktem Abschluss $\overline{U(x)} \subseteq V_{l_x}$ für ein $l_x \in \{1, \ldots, k\}$. Da K kompakt ist, existieren endlich viele $x_1, \ldots, x_N \in K$ mit $K \subseteq \cup_{i=1}^N U(x_i)$. Für $l \in \{1, \ldots, k\}$ setzen wir

$$K_l := \bigcup_{i \in \{1,\ldots,N\}, l_{x_i} = l} \overline{U(x_i)} \subseteq V_l$$

und sehen

$$K \subseteq \cup_{l=1}^k K_l.$$

Da $K_l \subseteq V_l$ kompakt ist, können wir $0 < \delta < d(\mathbb{R}^n - V_l, K_l)$ wählen und setzen

$$\psi_l(x) := (1 - d(x, K_l)/\delta)_+ \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $\psi_l : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ lipschitzstetig mit kompaktem Träger $supp\ \psi_l \subseteq V_l$ und $\psi_l = 1$ auf K_l . Wir setzen

$$\varphi_l := \psi_l \prod_{m=1}^{l-1} (1 - \psi_m).$$

φ_l sind lipschitzstetig mit kompaktem Träger $supp\ \varphi_l \subseteq supp\ \psi_l \subseteq V_l$ und

$$\sum_{l=1}^{k} \varphi_l = 1 - \prod_{l=1}^{k} (1 - \psi_l),$$

also

$$\sum_{l=1}^{k} \varphi_l = 1 \quad \text{auf } K.$$

///

C Dualität in Hilberträumen

Satz C.1 (Satz von Riesz, Dualität in Hilberträumen) *Es sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ und $\Lambda : X \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ein stetiges, lineares Funktional auf X. Dann existiert $y \in X$ mit*

$$\Lambda x = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x \in X.$$

□

Wir beweisen den Satz von Riesz mit folgender nützlicher Proposition.

Proposition C.1 *Jede nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge C eines Hilbertraumes X besitzt ein eindeutiges Element kürzester Norm.*

Ist $C = x + Y$ affin mit einem abgeschlossenen Unterraum $Y \subseteq X$, so existiert $y \in Y$ mit

$$\| x - y \| = d(x, Y),$$

$$x - y \perp Y.$$

Beweis:
Wir wählen eine Minimalfolge $x_k \in C$ mit

$$\| x_k \| \to \inf_{x \in C} \| x \| =: d.$$

Da $(x_k + x_l)/2 \in C$ mit der Konvexität von C, folgt mit der Parallelogrammidentität

$$\| x_k - x_l \|^2 = 2 \| x_k \|^2 + 2 \| x_l \|^2 - 4 \left\| \frac{x_k + x_l}{2} \right\|^2 \leq$$

$$\leq 2 \| x_k \|^2 + 2 \| x_l \|^2 - 4d^2 \to 0 \quad \text{für } k, l \to \infty.$$

Damit ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, also konvergent, da X ein Hilbertraum ist, und wir erhalten $x_k \to x \in M$, da C abgeschlossen ist. Klarerweise gilt

$$\| x \| \leftarrow \| x_k \| \to d = \inf_{y \in C} \| y \|,$$

wie gewünscht.

Eindeutigkeit erhalten wir durch Folgenmischung. Dazu seien $x, x' \in C$ mit $\| x \| = \| x' \| = \inf_{y \in C} \| y \|$. Setzen wir $x_{2k} := x, x_{2k-1} := x'$ für $k \in \mathbb{N}$, so definiert dies eine Minimalfolge, ist also nach dem oben gezeigten konvergent. Dies ergibt

$$x = \lim_{k \to \infty} x_{2k} = \lim_{k \to \infty} x_{2k-1} = x',$$

also $x = x'$.

Für $C = x + Y$ wählen wir $z = x - y \in x + Y$ mit $\| z \| \leq \| x - y' \|$ für alle $y' \in Y$. Dies ergibt $\| x - y \| = d(x, Y)$ und weiter für alle $t \in \mathbb{R}, y' \in Y$

$$\| x - y \|^2 \leq \| x - y - ty' \|^2 = \| x - y \|^2 + t\langle x - y, y' \rangle + t\langle y', x - y \rangle + t^2 \| y' \|^2 =$$

$$= \| x - y \|^2 + 2tRe(\langle x - y, y' \rangle) + t^2 \| y' \|^2 .$$

Differentiation bei $t = 0$ ergibt

$$Re(\langle x - y, y' \rangle) = 0 \quad \text{für alle } y' \in Y.$$

Ersetzen wir für einen komplexen Hilbertraum X den Vektor y' durch iy' , so erhalten wir in jedem Fall

$$\langle x - y, y' \rangle = 0 \quad \text{für alle } y' \in Y,$$

also $x - y \perp Y$.

///

Beweis von Satz C.1:
Ist $\Lambda = 0$, so wählen wir $y = 0$. Ist $\Lambda \neq 0$, so ist $ker\ \Lambda \neq X$ ein echter, abgeschlossener Unterraum von X , und wir wählen $z \in X - ker\ \Lambda$. Mit Proposition C.1 existiert $z^\top \in ker\ \Lambda$ mit $z^\perp := z - z^\top \perp ker\ \Lambda$. Da $z^\top \in ker\ \Lambda, z \notin ker\ \Lambda$, folgt weiter $z^\perp \notin ker\ \Lambda$, insbesondere $\Lambda z^\perp \neq 0$.

Für beliebiges $x \in X$ sehen wir $\bar{x} := x - z^\perp \Lambda x / \Lambda z^\perp \in ker\ \Lambda \perp z^\perp$, also

$$\langle x, z^\perp \rangle = \Lambda x \ \| z^\perp \|^2 / \Lambda z^\perp$$

und für $y := z^\perp \overline{\Lambda z^\perp} / \| z^\perp \|^2$ gilt

$$\langle x, y \rangle = \Lambda x.$$

///

Literatur

[A] Alt, H.W., (1999) Lineare Funktionalanalysis, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.

[Ba] Bauer, H., (1978) Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, de Gruyter, Berlin - New York.

[EGa] Evans, L.C., Gariepy, R.F., (1992) Measure Theory and Fine Properties of Functions, CRC Press, Boca Raton - Ann Arbor - London.

[HeSt] Hewitt, E., Stromberg, K.R., (1975) Real and Abstract Analysis, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.

[No] Nöbeling, G., (1978) Integralsätze der Analysis, de Gruyter, Berlin - New York.

[Ru] Rudin, W.T., (1966) Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York.