Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork

31.10.24

Masstheoretische Methoden
WS 2024/25
2.Übung

AUFGABE 3:
μ sei ein borelreguläres Maß auf X , $f : X \to [0, \infty]$ sei $\mu-$meßbar und $[f > 0]$ eine $\sigma-$endliche Menge bezüglich μ oder f sei borelmeßbar.

Zeigen Sie

$$(f\mu)(S) = \inf_{B \supseteq S \text{ Borelmenge}} \int\limits_B f \, \mathrm{d}\mu \quad \forall S \subseteq X,$$

also ist $f\mu$ borelregulär. Insbesondere ist für $A \subseteq X$ meßbar und $\sigma-$endlich bezüglich μ oder $A \subseteq X$ eine Borelmenge das Mass $\mu \lfloor A = \chi_A \mu$ borelregulär.
(Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 2.)

AUFGABE 4:
Es sei μ ein reguläres Maß auf X , und $A_k \subseteq A_{k+1} \subseteq X$. Zeigen Sie

$$\mu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k).$$

AUFGABE 5:
Es sei μ ein Borel-Maß oder ein reguläres Maß auf einem metrischen Raum. Zeigen Sie, daß für $\varrho > 0$ die Funktion $\varphi_\varrho : X \to [0, \infty]$ mit

$$\varphi_\varrho(x) := \mu(B_\varrho(x))$$

unterhalbstetig ist, also insbesondere borelmeßbar ist.

Bearbeiten Sie zwei der drei Aufgaben.
Abgabetermin ist Donnerstag, 07.11.24.