Einführung in Geometrische Maßtheorie

Maßtheoretische Methoden

Reiner Schätzle
Wintersemester 2024/25
Universität Tübingen

Inhaltsverzeichnis

Einführung:
Grenzprozesse mit Mannigfaltigkeiten sind schwierig, da Limites von Mannigfaltigkeiten Singularitäten aufweisen können, also keine Mannigfaltigkeiten mehr sein müssen. Diese fehlende Kompaktheit erschwert die Existenztheorie verschiedener Variationsprobleme wie z.B. flächeninhaltsminimierende Flächen.

In der geometrischen Maßtheorie werden geometrische Objekte mit Hilfe von analytischen und maßtheoretischen Methoden untersucht. Untermannigfaltigkeiten im euklidischen Raum werden zu Varifaltigkeiten und Strömen verallgemeinert. Dazu müssen Konzepte wie Tangentialraum, mittlere Krümmung, zweite Fundamentalform und Rand durch schwache Definitionen ersetzt werden. Existenzfragen für Varationsprobleme können dann durch verschiedene Kompaktheits- und Regularitätssätze untersucht werden.

Teil I
Maßtheorie

1 Maße

Definition 1.1 *Eine Abbildung* $\mu : \mathcal{P}(X) \mapsto [0, \infty]$ *heißt Maß auf der Menge* X *, falls*

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- $\mu(A) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ *für* $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq X$.

Für $A \subseteq X$ *heißt* $\mu \lfloor A$ *, definiert durch*

$$(\mu \lfloor A)(B) := \mu(B \cap A) \quad \forall B \in \mathcal{P}(X),$$

die Restriktion von μ *auf* A *.*

Eine Menge $A \subseteq X$ *heißt* μ*-meßbar oder meßbar bezüglich* μ *, falls*

$$\forall S \subseteq X : \mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S - A). \tag{1.1}$$

□

Bemerkungen:

1. Üblicherweise wird μ wie in Definition 1.1 ein äußeres Maß genannt, und die Einschränkung von μ auf die meßbaren Teilmengen ein Maß genannt. Wir werden aber sehen, daß es sehr nützlich sein wird, daß auch nicht-meßbaren Mengen ein Wert durch μ zugeordnet wird.
2. Wegen der Subadditivität, genügt es für die Meßbarkeit
$$\mu(S) \geq \mu(S \cap A) + \mu(S - A) \quad \forall S \subseteq X, \mu(S) < \infty \tag{1.2}$$
zu zeigen.
3. $A \subseteq X$ ist genau dann $\mu-$meßbar, wenn $X - A$ meßbar bezüglich μ ist.

4. $\mu-$meßbaren Mengen sind für alle $S \subseteq X$ auch $(\mu\lfloor S)-$meßbar.
5. Ist $\mu(A) = 0$, so ist A meßbar bezüglich μ und heisst $\mu-$Nullmenge. Weiter heißt eine $\mu-$meßbare Menge $A \subseteq X$ lokale $\mu-$Nullmenge, falls

$$\forall B \subseteq A \text{ meßbar bezüglich } \mu : \mu(B) = 0 \text{ oder } \mu(B) = \infty.$$

□

Einfache Eigenschaften meßbarer Mengen sind in der folgenden Proposition zusammengestellt.

Proposition 1.1 *μ sei ein Maß auf X , und $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von $\mu-$meßbaren Mengen. Dann gilt:*

$$\cup_{k=1}^{\infty} A_k, \cap_{k=1}^{\infty} A_k \textit{ sind wieder } \mu - \textit{meßbar}, \tag{1.3}$$

$$\mu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad \textit{für } A_k \textit{ paarweise disjunkt}, \tag{1.4}$$

$$\mu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \quad \textit{für } A_k \subseteq A_{k+1}, \tag{1.5}$$

$$\mu(\cap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \quad \textit{für } A_k \supseteq A_{k+1}, \mu(A_1) < \infty. \tag{1.6}$$

Beweis:
Da die $A_k, k \in \mathbb{N}, \mu-$meßbar sind, gilt für alle $S \subseteq X$

$$\mu(S) = \mu(S \cap A_1) + \mu(S - A_1) =$$
$$= \mu(S \cap A_1) + \mu((S - A_1) \cap A_2) + \mu((S - A_1) - A_2) \geq$$
$$\geq \mu(S \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(S - (A_1 \cup A_2)).$$

Somit sind $A_1 \cup A_2$ und alle endlichen Vereinigungen auch $\mu-$meßbar. Da

$$X - (A_1 \cap A_2) = (X - A_1) \cup (X - A_2),$$

sind $A_1 \cap A_2$ und alle endlichen Durchschnitte auch $\mu-$meßbar.

Sind die A_k paarweise disjunkt, so gilt für $B_l := \cup_{k=1}^{l} A_k$

$$\mu(B_{l+1}) = \mu(B_{l+1} \cap A_{l+1}) + \mu(B_{l+1} - A_{l+1}) = \mu(A_{l+1}) + \mu(B_l)$$

und mit Induktion

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{l} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{l} \mu(A_k).$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

also (1.4) mit Subadditivität.

Zum Beweis von (1.5) sehen wir mit (1.4)

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{k+1} - A_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big).$$

Für $\nu := \mu\lfloor S, \mu(S) < \infty$, sind A_k und $B_l := \cup_{k=1}^{l} A_k \subseteq B_{l+1}$ auch $\nu-$meßbar, also mit (1.5)

$$\mu\Big(S \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big)\Big) + \mu\Big(S - \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) + \nu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} (X - B_k)\Big) \leq$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} \nu(B_k) + \lim_{k\to\infty} \nu(X - B_k) = \nu(X) = \mu(S),$$

und $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$ ist $\mu-$meßbar. Da

$$X - \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X - A_k),$$

ist $\cap_{k=1}^{\infty} A_k$ auch $\mu-$meßbar.

Zum Beweis von (1.6) rechnen wir mit (1.5) und Subadditivität

$$\mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_1 - A_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_1 - A_k)\Big) \geq \mu(A_1) - \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big),$$

also

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \leq \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big),$$

und Gleichheit folgt mit Monotonie.

///

Obige Proposition legt folgende Definition nahe.

Definition 1.2 *Eine Familie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt $\sigma-$ Algebra auf X, falls*

- $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X - A \in \mathcal{A}$,
- $A_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Für ein Maß μ auf X setzen wir $\mathcal{A}_\mu$ die $\sigma-$Algebra der $\mu-$meßbaren Mengen.

Für X ein topologischer Raum ist, so heißt die kleinste σ-Algebra, die alle offenen und abgeschlossenen Mengen enthält, die Borel-σ-Algebra, *und ihre Elemente heißen* Borelmengen.

□

Die nächste Definition führt gewisse Regularitätsbegriffe ein.

Definition 1.3

- *Ein Maß μ auf einer beliebigen Menge X heißt* regulär*, falls zu jeder Menge $S \subseteq X$ eine μ-meßbare Menge A existiert mit $A \subseteq A$ und $\mu(S) = \mu(A)$.*
- *Der Träger oder Support eines Maßes μ auf einem topologischen Raum X ist die Menge aller Punkte, für die jede offene Umgebung positives Maß μ hat, d.h.*

$$spt\ \mu := X - \bigcup \{U \subseteq X \text{ offen} \mid \mu(U) = 0\ \}.$$

- *μ heißt* Borel-Maß*, falls alle Borelmengen μ-meßbar sind.*
- *μ heißt* borelregulär*, falls μ ein Borel-Maß ist und falls für jede Menge $A \subseteq X$ eine Borelmenge B existiert mit $A \subseteq B$ und $\mu(A) = \mu(B)$.*
- *für einen lokalkompakten Hausdorff-Raum heißt μ ein* Radon-Maß*, falls μ ein Borel-Maß ist und falls*

$$\begin{aligned} \mu(K) &< \infty \quad \forall K \subseteq X \text{ kompakt}, \\ \mu(S) &= \inf_{V \supseteq S \text{ offen}} \mu(V) \quad \forall S \subseteq X, \\ \mu(V) &= \sup_{K \subseteq V \text{ kompakt}} \mu(K) \quad \forall V \subseteq X \text{ offen}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

□

Bemerkungen:

1. Für ein Maß μ definieren wir die Regularisierung durch

$$\nu(S) := \inf_{A \supseteq S \text{ meßbar bezüglich } \mu} \mu(A). \tag{1.8}$$

   ν ist ein Maß mit $\nu \geq \mu$ und $\nu(A) = \mu(A)$ für alle $\mu-$meßbaren Mengen $A \subseteq X$. Weiter sind alle $\mu-$meßbaren Mengen auch $\nu-$meßbar, und ν ist ein reguläres Maß. Ist μ insbesondere ein Borel-Maß, so ist ν ein reguläres Borel-Maß.

2. Allgemeiner betrachten wir eine $\sigma-$Algebra $\mathcal{A}$ auf einer Menge X und eine nicht-triviale, endlich-additive, subadditive Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, d.h.

$$\begin{aligned} \mu(\emptyset) &= 0, \\ \mu(A \cup B) &= \mu(A) + \mu(B) \quad \text{für } A, B \in \mathcal{A} \text{ mit } A \cap B = \emptyset, \\ \mu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad \text{für } A_k \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

   und definieren

$$\nu(S) := \inf_{A \supseteq S, A \in \mathcal{A}} \mu(A). \tag{1.9}$$

   ν ist ein Maß. Da μ monoton ist, d.h. für $A \subseteq B, A, B \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) \leq \mu(A) + \mu(B - A) = \mu(B),$$

gilt $\nu(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$, und zu jedem $S \subseteq X$ existiert ein $A \supseteq S, A \in \mathcal{A}$ mit $\nu(S) = \nu(A) = \mu(A)$. Für $B \in \mathcal{A}$ erhalten wir mit der endlichen Additivität

$$\nu(S) = \mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A - B) \geq \nu(S \cap B) + \nu(S - B),$$

und B ist $\nu-$meßbar, also $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\nu$, insbesondere ist ν regulär.

Ist $\mathcal{A}$ die Borel-$\sigma-$Algebra auf einem topologischen Raum X , so ist ν borelregulär mit $\nu(B) = \mu(B)$ für alle Borelmengen B .

Für ein allgemeines Maß μ und $\mu-$meßbares $f : X \to [0, \infty]$ definieren wir für $S \subseteq X$

$$(f\mu)(S) := \inf_{A \supseteq S, A \in \mathcal{A}_\mu} \int_A f \, \mathrm{d}\mu. \tag{1.10}$$

$f\mu$ ist ein reguläres Maß mit $(f\mu)(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}_\mu$ und $\mathcal{A}_\mu \subseteq \mathcal{A}_{f\mu}$.

Für $f = \chi_A$ sehen wir

$$(\chi_A\mu)(S) = \inf_{T \supseteq S, T \in \mathcal{A}_\mu} \int_T \chi_A \, \mathrm{d}\mu = \inf_{T \supseteq S, T \in \mathcal{A}_\mu} \mu(T \cap A) \geq \mu(S \cap A) = (\mu \lfloor A)(S),$$

also $\chi_A\mu \geq \mu \lfloor A$.

Ist μ regulär, so existiert eine $\mu-$messbare Menge $T \supseteq S \cap A$ mit $\mu(T) = \mu(S \cap A)$. Da $T \cup (X - A) \supseteq S$ messbar bezüglich μ ist, folgt

$$(\chi_A\mu)(S) \leq \int_{T \cup (X-A)} \chi_A \, \mathrm{d}\mu \leq \mu(T) = \mu(S \cap A).$$

Zusammen erhalten wir für $\mu-$messbares $A \subseteq X$ und reguläres μ , dass

$$\chi_A\mu = \mu \lfloor A. \tag{1.11}$$

3. Für ein borelreguläres Maß μ gilt

$$\mu(S) = \inf_{B \supseteq S \text{ Borelmenge}} \mu(B) \quad \forall S \subseteq X,$$

insbesondere ist μ durch seine Werte auf den Borelmengen eindeutig bestimmt.

4. Für ein Radon-Maß μ und $S \subseteq X$ wählen wir gemäß (1.7) eine Folge offener Mengen $V_j \supseteq S$ mit $\mu(V_j) \to \mu(S)$. Dann ist $B := \cap_{j=1}^\infty V_j \supseteq S$ eine Borelmenge mit $\mu(S) \leq \mu(B) \leq \inf_j \mu(V_j) = \mu(S)$. Folglich ist jedes Radon-Maß borelregulär. Zur Umkehrung unter gewissen Voraussetzungen, siehe Lemma 1.5.

5. Für ein Radon-Mass μ auf einem lokalkompakten topologischen Raum X oder für ein beliebiges Mass μ auf einem topologischen Raum X mit abzählbarer Basis, z.B. für X metrisch und separabel, gilt

$$\mu(X - spt\ \mu) = 0.$$

$\square$

Lemma 1.2 *μ sei ein borelreguläres Maß auf X , $f : X \to [0,\infty]$ sei borelmeßbar oder $\mu-$meßbar und $[f > 0]$ eine $\sigma-$endliche Menge bezüglich μ , d.h. $[f > 0] = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ mit A_k sind $\mu-$ meßbar und $\mu(A_k) < \infty$.*

Dann ist $f\mu$ definiert in (1.10) wieder borelregulär. Insbesondere ist für $A \subseteq X$ eine Borelmenge oder meßbar und $\sigma-$endlich bezüglich μ das Mass $\mu\lfloor A = \chi_A\mu$ borelregulär.

$\square$

Beweis:

Für $\mu-$messbares $f : X \to [0,\infty]$ haben wir nach (1.10) bereits $\mathcal{A}_\mu \subseteq \mathcal{A}_{f\mu}$ gesehen, also ist $f\mu$ ein Borel Maß. Da μ regulär ist, folgt weiter mit (1.11) für $\mu-$messbares $A \subseteq X$, daß $\chi_A\mu = \mu\lfloor A$.

Ist $A \subseteq X$ eine Borelmenge, so existiert für beliebiges $S \subseteq X$ eine Borelmenge $B \supseteq S \cap A$ mit $\mu(B) = \mu(S \cap A)$. Dann ist $C := B \cup (X - A) \supseteq S$ eine Borelmenge und

$$(\mu\lfloor A)(C) = \mu(C \cap A) = \mu(B \cap A) \leq \mu(B) = \mu(S \cap A) = (\mu\lfloor A)(S),$$

also ist $\chi_A\mu = \mu\lfloor A$ borelregulär.

Ist $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ mit $f_k : X \to [0,\infty]$ meßbar bezüglich μ und $f_k\mu$ borelregulär, so existieren für beliebiges $S \subseteq X$ Borelmengen $B_k \supseteq S$ mit $(f_k\mu)(B_k) = (f_k\mu)(S)$. Dann ist $B := \cap_{k=1}^{\infty} B_k \supseteq S$ eine Borelmenge und für jedes $\mu-$meßbare $A \supseteq S$ gilt

$$(f\mu)(B) = \int_B \sum_{k=1}^{\infty} f_k \,\mathrm{d}\mu \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} f_k \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k\mu)(B_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (f_k\mu)(S) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k \,\mathrm{d}\mu = \int_A \sum_{k=1}^{\infty} f_k \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu,$$

also $(f\mu)(B) = (f\mu)(S)$, und $f\mu$ ist borelregulär.

Für borelmeßbares $f : X \to [0,\infty]$ schreiben wir $f = \sum_{k=1}^{\infty} (1/k)\chi_{B_k}$ mit Borelmengen $B_k \subseteq X$ mit [Sch24] Proposition 1.3 und sehen $f\mu$ ist borelregulär.

Für $A \subseteq X$ meßbar bezüglich μ und $\mu(A) < \infty$, so existiert eine Borelmenge $B \supseteq A$ mit $\mu(B) = \mu(A)$, also $\mu(B - A) = 0$, und $\mu\lfloor B = \mu\lfloor A = \chi_A\mu$ ist borelregulär.

Für $A \subseteq X$ meßbar und $\sigma-$endlich bezüglich μ , d.h. $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ mit A_k sind $\mu-$ meßbar und $\mu(A_k) < \infty$, können wir A_k paarweise disjunkt annehmen und erhalten $\chi_A = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}$, also ist $\chi_A\mu = \mu\lfloor A$ borelregulär.

Für $\mu-$meßbares $f : X \to [0,\infty]$ schreiben wir $f = \sum_{k=1}^{\infty} (1/k)\chi_{A_k}$ mit $\mu-$meßbaren Mengen $A_k \subseteq X$ mit [Sch24] Proposition 1.3. Ist $[f > 0]$ eine $\sigma-$endliche Menge, so sind $A_k \subseteq [f > 0]$ auch $\sigma-$endliche Mengen, und $\chi_{A_k}\mu$ und $f\mu$ sind borelregulär.

///

Lemma 1.3 *μ sei ein reguläres Maß auf X, und $A_k \subseteq A_{k+1} \subseteq X$. Dann gilt:*

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

$\square$

Beweis:
Da μ regulär ist, existieren μ-meßbare Mengen

$$A_k \subseteq B_k$$

mit

$$\mu(A_k) = \mu(B_k).$$

Wir setzen

$$C_k := \bigcap_{j \geq k} B_j.$$

Die C_k sind μ-meßbar, und es gilt

$$A_k \subseteq C_k,\ \mu(A_k) = \mu(C_k),\ C_k \subseteq C_{k+1}.$$

Daraus folgt

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(C_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \leq \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k).$$

///

Satz 1.1 (Caratheodory's Kriterium)
Es sei μ ein Maß auf einem metrischen Raum X, für das

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

für alle $A,\ B \subseteq X$ mit $d(A, B) > 0$ gilt. Dann ist μ ein Borel-Maß , d.h. alle Borelmengen sind meßbar.

Beweis:
Da die μ-meßbaren Mengen eine σ-Algebra bilden und μ bereits subadditiv ist, genügt es zu zeigen, daß

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap C) + \mu(S - C)$$

für alle abgeschlossenen Mengen $C \subseteq X$ und alle Mengen $S \subseteq X$ mit $\mu(S) < \infty$ ist. Es sei

$$C_j := \{x \in X \mid d(x, C) \leq \frac{1}{j}\}.$$

Dann gilt

$$d(S - C_j, S \cap C) \geq \frac{1}{j}$$

und somit

$$\mu(S) \geq \mu((S - C_j) \cup (S \cap C)) = \mu(S - C_j) + \mu(S \cap C).$$

Der Satz ist somit bewiesen, wenn gezeigt wird, daß

$$\lim_{j\to\infty} \mu(S - C_j) = \mu(S - C) \tag{1.12}$$

ist. Da C abgeschlossen ist, gilt

$$S - C = (S - C_j) \cup \bigcup_{k=j}^{\infty} R_k, \tag{1.13}$$

wobei

$$R_k := \{x \in S \mid \frac{1}{k+1} < d(x, C) \leq \frac{1}{k}\}$$

gesetzt wird. Aus (1.13) folgt

$$\mu(S - C_j) \leq \mu(S - C) \leq \mu(S - C_j) + \sum_{k=j}^{\infty} \mu(R_k).$$

(1.12) folgt, falls wir zeigen, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) < \infty \tag{1.14}$$

ist. Nun gilt für $|i - j| \geq 2$, daß

$$d(R_i, R_j) > 0.$$

Dies ergibt

$$\sum_{k=1}^{N} \mu(R_{2k}) = \mu(\bigcup_{k=1}^{N} R_{2k}) \leq \mu(S) < \infty$$

und

$$\sum_{k=1}^{N} \mu(R_{2k-1}) = \mu(\bigcup_{k=1}^{N} R_{2k-1}) \leq \mu(S) < \infty,$$

und (1.14) ist bewiesen.

///

Lemma 1.4 *Es sei μ ein borelreguläres Maß auf einem metrischen Raum X, und $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$, mit V_j offen, $\mu(V_j) < \infty$. Dann gilt*

- *für alle $A \subseteq X$, daß*
$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid U \supseteq A \textit{ offen } \}, \tag{1.15}$$
- *für alle μ-meßbaren $A \subseteq X$, daß*
$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) \mid C \subseteq A \textit{ abgeschlossen } \}. \tag{1.16}$$

Beweis:
Da μ borelregulär ist, genügt es, (1.15) für Borelmengen A zu zeigen. Zuerst betrachten wir den Fall

$$\mu(X) < \infty.$$

Es sei

$$\mathcal{A} := \{A \text{ Borelmenge} \mid (1.15) \text{ ist erfüllt für A } \}.$$

Trivialerweise enthält $\mathcal{A}$ alle offenen Mengen. Weiter ist $\mathcal{A}$ abgeschlossen bezüglich abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten, denn sei $A_k \in \mathcal{A}$ und $A := \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Mit (1.15) existieren offene Mengen U_k mit

$$\begin{aligned} A_k &\subseteq U_k \\ \mu(U_k - A_k) &\leq \epsilon 2^{-k}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

da $\mu(X) < \infty$. Dann ist $U := \bigcup_{k=1}^\infty U_k$ offen, und es gilt

$$\begin{aligned} A &\subseteq U, \\ \mu(U - A) &\leq \sum_{k=1}^\infty \mu(U_k - A_k) \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Nun sei $A := \bigcap_{k=1}^\infty A_k$. Wieder existieren U_k wie in (1.17). Für $k \in \mathbb{N}$ ist $W_k := \bigcap_{j=1}^k U_j$ offen, und es gilt

$$A \subseteq \bigcap_{j=1}^k A_j \subseteq W_k.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \mu(W_k) &\leq \lim_{k\to\infty} \mu(\bigcap_{j=1}^k A_j) + \limsup_{k\to\infty} \mu(\bigcap_{j=1}^k U_j - \bigcap_{j=1}^k A_j) \\ &\leq \mu(A) + \sum_{j=1}^\infty \mu(U_j - A_j) \leq \mu(A) + \epsilon. \end{aligned}$$

Da in einem metrischen Raum X für jede abgeschlossene Menge $C \subseteq X$ gilt, daß

$$C = \{x \in X \mid d(x, C) = 0\} = \bigcap_{j=1}^\infty \{x \in X \mid d(x, C) < \frac{1}{j}\},$$

also jede abgeschlossene Menge als abzählbarer Schnitt von offenen Mengen dargestellt werden kann, enthält $\mathcal{A}$ auch alle abgeschlossenen Mengen.

Nun sei

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{A \subseteq X \mid A, X - A \in \mathcal{A}\}.$$

Dann ist $\tilde{\mathcal{A}}$ eine σ-Algebra gemäß den Eigenschaften von $\mathcal{A}$, und $\tilde{\mathcal{A}}$ enthält alle offenen Mengen. Daher enthält $\tilde{\mathcal{A}}$ alle Borelmengen, und (1.15) ist bewiesen, falls $\mu(X) < \infty$.

Für den allgemeinen Fall setzen wir

$$\mu_j := \mu\lfloor V_j$$

Mit Lemma 1.2 ist μ_j ein endliches borelreguläres Maß. Mit dem oben Bewiesenen gibt es eine offene Menge U_j mit

$$\begin{aligned} A &\subseteq U_j \\ \mu(U_j \cap V_j) = \mu_j(U_j) &\leq \mu_j(A) + \epsilon 2^{-j} \\ &\leq \mu(A \cap V_j) + \epsilon 2^{-j}. \end{aligned}$$

Also gilt, da $\mu(V_j) < \infty$ ist,

$$\mu(U_j \cap V_j - A) = \mu(U_j \cap V_j - (A \cap V_j)) \leq \epsilon 2^{-j}.$$

Summieren über j ergibt

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty}(U_j \cap V_j) - A) \leq \epsilon.$$

Da $U := \bigcup_{j=1}^{\infty}(U_j \cap V_j)$ offen ist und $A \subseteq U$, ist die Proposition bewiesen.

Zum Beweis von (1.16) betrachten wir mit (1.15) offene Mengen $U_j \supseteq (X - A) \cap V_j$ mit

$$\mu(U_j) \leq \mu((X - A) \cap V_j) + \varepsilon 2^{-j}.$$

Dabei können wir $U_j \subseteq V_j$ annehmen. Da $\mu(V_j) < \infty$ und A meßbar bezüglich μ ist, gilt

$$\mu(U_j \cap A) = \mu(U_j - ((X - A) \cap V_j)) \leq \varepsilon 2^{-j}.$$

Dann ist $U := \cup_{j=1}^{\infty} U_j \supseteq X - A$ offen, also $C := X - U \subseteq A$ abgeschlossen und

$$\mu(A - C) = \mu(U \cap A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j \cap A) \leq \varepsilon,$$

und

$$\mu(A) \leq \mu(C) + \varepsilon.$$

///

Auf lokalkompakten, separablen metrischen Räumen bekommen wir eine einfache hinreichende Bedingung für Radon-Maße.

Lemma 1.5 *μ sei ein borelreguläres Maß auf einem lokalkompakten, separablen metrischen Raum X mit*

$$\mu(K) < \infty \quad \forall K \subseteq X \text{ kompakt.}$$

Dann ist μ ein Radon-Maß.

Beweis:
Ein lokalkompakter, separabler metrischer Raum X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom und genauer kann eine abzählbare Basis aus relativ kompakten Mengen gewählt werden. Also kann X dargestellt werden durch

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$$

mit $\overline{V_j} \subseteq X$ kompakt. Damit folgt $\mu(V_j) \leq \mu(\overline{V_j}) < \infty$. Weiter läßt sich jede abgeschlossene Menge $C \subseteq X$ als abzählbare Vereinigung $C = \cup_{j=1}^{\infty}(C \cap \overline{V_j})$ kompakter Mengen schreiben. Mit Lemma 1.4 folgt

- für alle $A \subseteq X$, daß

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid U \supseteq A \text{ offen }\},$$

- für alle μ-meßbaren $A \subseteq X$, daß

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A \text{ kompakt }\},$$

und μ ist ein Radon-Maß.

///

2 Überdeckungssätze

In diesem Paragraphen beweisen wir die wichtigen Überdeckungssätze von Vitali und Besicovitch. Der Beweis für den Überdeckungssatz von Vitali ist erheblich einfacher, verwendet aber vergrößerte Bälle der Ausgangsüberdeckung. Dagegen verwendet der Überdeckungssatz von Besicovitch die gleichen Bälle, allerdings auf Kosten von Mehrfachüberdeckungen und gilt im Gegensatz zu demjenigen von Vitali nur im $\mathbb{R}^n$. Der Satz von Vitali ist ausreichend für ein Maß mit einer Verdoppelungsbedingung, d.h.

$$\mu(\bar{B}_{2\varrho}(x)) \leq C\mu(\bar{B}_\varrho(x)),$$

wie z.B. das Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^n$ auf $\mathbb{R}^n$. Für allgemeine Radon-Maße ist die Heranziehung des Satzes von Besicovitch notwendig.

Im folgenden sei X ein metrischer Raum, und

$$B_\varrho(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varrho\} \text{ bzw. } \bar{B}_\varrho(x) = \{y \in X \mid d(x,y) \leq \varrho\}$$

bezeichne den offenen bzw. abgeschlossenen Ball mit Radius $\varrho > 0$ und Zentrum x. Für $B = \bar{B}_\varrho(x)$ wählen wir

$$\hat{B} := B_{5\varrho}(x).$$

Man beachte, daß $\hat{B}$ i.A. nicht eindeutig durch B bestimmt ist, da Radius und Zentrum von B i.A. nicht eindeutig sind.

Definition 2.1 *Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von abgeschlossenen Bällen in einem metrischen Raum X.*

- $\mathcal{F}$ überdeckt *eine Menge $M \subseteq X$, falls $M \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{F}} B$.*
- *Die* Zentrenmenge A *von $\mathcal{F}$ ist definiert durch*

$$A := \{a \in X \mid \exists\, \varrho > 0 : \bar{B}_\varrho(a) \in \mathcal{F}\}.$$

- *$\mathcal{F}$ überdeckt eine Menge $M \subseteq X$* fein, *falls für alle $x \in M$ gilt:*

$$\inf\{\varrho \mid \exists a \in X : x \in \bar{B}_\varrho(a) \in \mathcal{F}\} = 0.$$

- *$\mathcal{F}$ überdeckt eine Menge $A \subseteq X$* zentral fein, *falls für alle $a \in A$ gilt:*

$$\inf\{\varrho \mid \bar{B}_\varrho(a) \in \mathcal{F}\} = 0.$$

□

Satz 2.1 (Überdeckungssatz von Vitali) *Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von abgeschlossenen, nichtdegenerierten Bällen in einem metrischen Raum X mit*

$$\sup\{\mathrm{diam} B \mid B \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Dann existiert eine Teilfamilie $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ mit

- *$\mathcal{G}$ ist paarweise disjunkt, d.h. für*

$$B \neq B' \in \mathcal{G} : B \cap B' = \emptyset.$$

- $\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \subseteq \bigcup_{B'\in\mathcal{G}} \hat{B}'$.

Genauer existiert zu jedem $B \in \mathcal{F}$ ein $B' \in \mathcal{G}$ mit

$$B \cap B' \neq \emptyset \text{ und } B \subseteq \hat{B}'.$$

Beweis:
Den Bällen $B \in \mathcal{F}$ ordnen wir nicht notwendigerweise eindeutige Zentren $a(B) \in B \subseteq X$ und Radien $0 < \varrho(B) \leq \operatorname{diam} B + 1$ mit $B = \bar{B}_{\varrho(B)}(a(B))$ zu. Es sei $D := \sup\{\varrho(B) \mid B \in \mathcal{F}\} \leq \sup\{\operatorname{diam} B \mid B \in \mathcal{F}\} + 1 < \infty$, und wir setzen

$$\mathcal{F}_j := \{B \in \mathcal{F} \mid D2^{-j} < \varrho(B) \leq D2^{-j+1}\}$$

für $j = 1, 2, \dots$. Nun wählen wir sukzeßive Teilfamilien $\mathcal{G}_j \subseteq \mathcal{F}_j$ wie folgt:

1. $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{F}_1$ ist eine maximale paarweise disjunkte Teilfamilie von $\mathcal{F}_1$.
2. Nun seien $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{j-1}, j \geq 2$, bereits gewählt und $\mathcal{G}_j \subseteq \mathcal{F}_j$ sei eine maximale paarweise disjunkte Teilfamilie von

$$\mathcal{F}'_j := \{B \in \mathcal{F}_j \mid \forall\, B' \in \bigcup_{l=1}^{j-1} \mathcal{G}_l :\ B \cap B' = \emptyset\}.$$

Nun setzen wir

$$\mathcal{G} := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{G}_j \subseteq \mathcal{F}.$$

Trivialerweise ist $\mathcal{G}$ eine paarweise disjunkte Teilfamilie von $\mathcal{F}$. Nun sei $B \in \mathcal{F}$, also $B \in \mathcal{F}_j$ für ein $j \in \mathbb{N}$. Wegen der Maximalität der $\mathcal{G}_j$ existiert

$$B' \in \bigcup_{l=1}^{j} \mathcal{G}_l$$

mit

$$B \cap B' \neq \emptyset. \tag{2.1}$$

Für $B = \bar{B}_\varrho(a), B' = \bar{B}_{\varrho'}(a'), \hat{B}' = B_{5\varrho'}(a')$, wie oben gewählt, gilt

$$\varrho \leq D\,2^{-j+1}, \quad D\,2^{-j} < \varrho',$$

also

$$\varrho < 2\varrho'. \tag{2.2}$$

Nun sei $x \in B \cap B'$ gemäß (2.1). Es gilt

$$d(a', x) \leq \varrho'$$

und

$$\forall\, y \in B: \quad d(x,y) \le \operatorname{diam} B \le 2\varrho < 4\varrho'$$

mit (2.2). Daraus folgt für $y \in B$, daß

$$d(a', y) \le d(a', x) + d(x, y) < 5\varrho'$$

und

$$y \in \hat{B}',$$

also

$$B \subseteq \hat{B}'.$$

Dies ergibt

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subseteq \bigcup_{B' \in \mathcal{G}} \hat{B}',$$

und der Satz ist bewiesen.

///

Eine technische Konsequenz ist das folgende Korollar.

Korollar 2.2 *$\mathcal{F}$ sei eine Familie von abgeschlossenen, nichtdegenerierten Bällen eines metrischen Raumes X mit*

$$\sup\{\operatorname{diam} B \mid B \in \mathcal{F}\} < \infty\,,$$

und $\mathcal{F}$ überdecke die Menge $A \subseteq X$ fein. Dann existiert eine paarweise disjunkte Teilfamilie $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, so daß für jede endliche Teilmenge $\{B_1, \ldots, B_m\} \subseteq \mathcal{F}$ folgende Inklusion gilt:

$$A - \bigcup_{j=1}^{m} B_j \subseteq \bigcup_{B' \in \mathcal{G} - \{B_1, \ldots, B_m\}} \hat{B}'$$

Beweis:
Wir wählen $\mathcal{G}$ wie im Beweis von Satz 2.1, und es sei $\{B_1, \ldots, B_m\} \subseteq \mathcal{F}$. Da die B_i abgeschlossen sind und $\mathcal{F}$ die Menge A fein überdeckt, existiert zu jedem

$$x \in A - \bigcup_{j=1}^{m} B_j$$

ein $B \in \mathcal{F}$ mit $x \in B$ und

$$B \cap (\bigcup_{j=1}^{m} B_j) = \emptyset.$$

Nach Satz 2.1 existiert ein $B' \in \mathcal{G}$ mit

$$B \cap B' \neq \emptyset\,,\ B \subseteq \hat{B}'.$$

Daraus folgt

$$B' \neq B_1, \ldots, B_m$$

und

$$x \in B \subseteq \hat{B}',$$

also

$$A - \bigcup_{j=1}^{m} B_j \subseteq \bigcup_{B'' \in \mathcal{G} - \{B_1, \ldots, B_m\}} \hat{B}''.$$

///

Definition 2.2 *Es sei μ ein Radon-Maß auf einem lokalkompakten, separablen metrischen Raum X. Wir sagen, daß X die* symmetrische Vitalieigenschaft bezüglich μ *besitzt, falls für jede Familie von abgeschlossenen, nichtdegenerierten Bällen $\mathcal{F}$ in X, welche eine Menge $A \subseteq X$ mit $\mu(A) < \infty$ zentral fein überdeckt, eine abzählbare, paarweise disjunkte Teilfamilie $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ existiert, die A fast überall bezüglich μ überdeckt, d.h.*

$$\mu(A - \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B) = 0.$$

□

Mit dem Überdeckungssatz von Vitali kann man zeigen, siehe Korollar 2.3, daß lokalkompakte, separable metrische Räume die symmetrische Vitalieigenschaft bezüglich jeden Radon-Maßes μ erfüllen, das eine Verdoppelungseigenschaft erfüllt.

Zur symmetrischen Vitalieigenschaft siehe auch [F] 2.8.16 .

Korollar 2.3 *X sei ein lokalkompakter, separabler metrischer Raum, und μ sei ein Radon-Maß auf X, das eine Verdoppelungseigenschaft erfüllt, d.h.*

$$\mu(\bar{B}_{2\varrho}(x)) \leq C \cdot \mu(\bar{B}_{\varrho}(x)).$$

Dann erfüllt X die symmetrische Vitalieigenschaft bezüglich μ.

Beweis:
Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von abgeschlossenen, nichtdegenerierten Bällen, die $A \subseteq X$ zentral fein überdeckt. Weiter gelte $\mu(A) < \infty$. Da μ ein Radon-Maß ist, existiert mit (1.7) eine offene Menge U mit

$$A \subseteq U\,,\ \mu(U) < \infty\,.$$

Da $\mathcal{F}$ die Menge A zentral fein überdeckt, so überdeckt auch die Teilfamilie

$$\mathcal{F}' := \{B \in \mathcal{F} \mid B \subseteq U\,, \operatorname{diam} B \leq 1\}$$

A zentral fein. Nun wählen wir eine Teilfamilie $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}'$ gemäß Korollar 2.2. Da $\mathcal{G}$ paarweise disjunkt ist, die Bälle von $\mathcal{F}$ nichtdegeneriert sind, also nichtleeres Inneres haben, und X das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist $\mathcal{G}$ abzählbar, also $\mathcal{G} = \{B_1, B_2, \ldots\}$. Weiter folgt mit der Verdoppelungseigenschaft, daß

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(\hat{B}_j) \leq C^3 \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq C^3 \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) \leq C^3 \mu(U) < \infty.$$

Nun folgt

$$\mu(A - \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B) \leq \lim_{N \to \infty} \mu(A - \bigcup_{j=1}^{N} B_j) \leq \lim_{N \to \infty} \sum_{j=N+1}^{\infty} \mu(\hat{B}_j) = 0,$$

und das Korollar ist bewiesen.

///

Für allgemeine Radon-Maße μ kann $\mu(\hat{B})$ i.A. nicht durch $\mu(B)$ kontrolliert werden, und der Überdeckungssatz von Vitali kann nicht angewendet werden. Im $\mathbb{R}^n$ ermöglicht der Überdeckungssatz von Besicovitch die Betrachtung allgemeiner Radon-Maße.

Satz 2.4 (Überdeckungssatz von Besicovitch) *Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von abgeschlossenen, nichtdegenerierten Bällen im $\mathbb{R}^n$ mit*

$$\sup\{\text{diam } B \mid B \in \mathcal{F}\} < \infty\,,$$

und A sei die Zentrenmenge von $\mathcal{F}$.

Dann existieren paarweise disjunkte Teilfamilien $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_N$ von $\mathcal{F}$, wobei $N = N(n)$ nur von n abhängt, mit der Eigenschaft

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \bigcup_{B \in \mathcal{G}_j} B\,.$$

Beweis:
Zuerst nehmen wir an, daß A beschränkt ist. Es sei

$$D := \sup\{\text{diam } B \mid B \in \mathcal{F}\}\,.$$

Wir wählen induktiv Bälle $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}$ wie folgt:
Sei $j \geq 1$ und $B_1, \ldots, B_{j-1} \in \mathcal{F}$ bereits gewählt. Es sei

$$A_j := A - \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i\,.$$

Falls $A_j = \emptyset$, so setzen wir $J := j - 1$, und die Auswahl ist beendet. Falls $A_j \neq \emptyset$, wählen wir $B_j := \bar{B}_{\varrho_j}(a_j) \in \mathcal{F}$, $a_j \in A_j$, so daß

$$\varrho_j \geq \frac{3}{4} \sup\{\varrho \mid \exists a \in A_j : \bar{B}_\varrho(a) \in \mathcal{F}\}. \tag{2.3}$$

Falls $A_j \neq \emptyset$ für alle j, so setzen wir $J := \infty$.
Behauptung 1:
Für $j > i$ gilt

$$\varrho_j \leq \frac{4}{3} \varrho_i\,, \tag{2.4}$$

denn es gilt $a_j \in A_j = A - \bigcup_{k=1}^{j-1} B_k \subseteq A_i = A - \bigcup_{k=1}^{i-1} B_k$ und somit

$$\varrho_i \geq \frac{3}{4} \sup\{\varrho \mid \exists a \in A_i : \bar{B}_\varrho(a) \in \mathcal{F}\} \geq \frac{3}{4} \varrho_j\,.$$

//

Behauptung 2:
Die Familie $\{\bar{B}_{\varrho_{j/3}}(a_j)\}_{j=1,\dots,J}$ ist paarweise disjunkt, d.h.

$$\bar{B}_{\varrho_{i/3}}(a_i) \cap \bar{B}_{\varrho_{j/3}}(a_j) = \emptyset \quad \text{für } i \neq j \ . \tag{2.5}$$

Denn sei $j > i$, so gilt $a_j \notin B_i$ und

$$|a_i - a_j| > \varrho_i = \frac{1}{3}\varrho_i + \frac{2}{3}\varrho_i \geq \frac{1}{3}\varrho_i + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\varrho_j \geq \frac{\varrho_i}{3} + \frac{\varrho_j}{3}.$$

//

Falls $J < \infty$, so gilt trivial

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{J} B_j. \tag{2.6}$$

Falls $J = \infty$, so folgt zuerst $\varrho_j \to 0$, da die $\bar{B}_{\varrho_{j/3}}(a_j)$ paarweise disjunkt sind und A beschränkt ist. Nun existiert für $a \in A$ ein $\bar{B}_\varrho(a) \in \mathcal{F}$, also gilt für großes j, daß

$$\varrho > \frac{4}{3}\varrho_j \geq \sup\{s \mid \exists b \in A - \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i : \bar{B}_s(b) \in \mathcal{F}\},$$

und somit

$$a \in \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i \, ,$$

und (2.6) ist auch im Fall $J = \infty$ bewiesen.

Der Satz ist bewiesen, für beschränktes A, falls wir zeigen, daß für jedes $k > 1$ und

$$I = I_k = \{j \mid 1 \leq j < k, \ B_j \cap B_k \neq \emptyset\}$$

die Kardinalität von I durch eine Konstante abgeschätzt werden kann, d.h.

$$\#(I) \leq M_n \, , \tag{2.7}$$

wobei M_n nur von n abhängt. Für $k > 1$ betrachten wir

$$K := \{j \in I \mid \varrho_j \leq 3\varrho_k\} \, .$$

Für $j \in K$ gilt $B_j \cap B_k \neq \emptyset$ und somit

$$|a_j - a_k| \leq \varrho_j + \varrho_k \leq 4\varrho_k$$

und

$$\bar{B}_{\varrho_{j/3}}(a_j) \subseteq \bar{B}_{\varrho_k}(a_j) \subseteq \bar{B}_{5\varrho_k}(a_k) \, .$$

Da die $\{\bar{B}_{\varrho_{j/3}}(a_j)\}$ nach (2.5) paarweise disjunkt sind und $\varrho_k \le \frac{4}{3}\varrho_j$ nach (2.4), folgt

$$\begin{aligned}
\#(K)\omega_n \varrho_k^n 4^{-n} &\le \sum_{j\in K} \omega_n \left(\frac{\varrho_j}{3}\right)^n \\
&= \sum_{j\in K} \mathcal{L}^n(\bar{B}_{\varrho_{j/3}}(a_j)) \\
&\le \mathcal{L}^n(\bar{B}_{5\varrho_k}(a_k)) \\
&= \omega_n(5\varrho_k)^n ,
\end{aligned}$$

wobei $\omega_n = \mathcal{L}^n(B_1^n(0))$ gesetzt wird. Dies ergibt

$$\#(K) \le 20^n . \tag{2.8}$$

Nun betrachten wir die Menge $I - K$. Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir $a_k = 0$.

Wir zeigen
Behauptung 3:
Für $i \neq j \in I - K$ gilt für den Winkel $0 \le \theta \le \pi$ zwischen a_i und a_j, d.h.

$$\cos\theta = \frac{\langle a_i, a_j\rangle}{|a_i|\,|a_j|} ,$$

daß

$$\theta \ge c_0 > 0 . \tag{2.9}$$

Wir bemerken, daß $a_k \notin B_i \cup B_j$ und somit $a_i, a_j \neq a_k = 0$, d.h. θ ist wohldefiniert.

(2.9) impliziert sofort, daß für $v_i := a_i/|a_i|,\ v_j := a_j/|a_j| \in \partial B_1^n$ die Abschätzung

$$|v_i - v_j| \ge c_1 > 0 \tag{2.10}$$

gilt. Nun gibt es eine endliche Überdeckung von ∂B_1^n aus Mengen mit Diameter $< c_1/2$. Die Anzahl der Elemente dieser Überdeckung sei L_n. Dann impliziert (2.10), daß

$$\#(I - K) \le L_n ,$$

und (2.7) folgt aus (2.8) mit

$$M_n := 20^n + L_n .$$

Wir zeigen (2.9), oder äquivalent dazu

$$\cos\theta \le 1 - \delta . \tag{2.11}$$

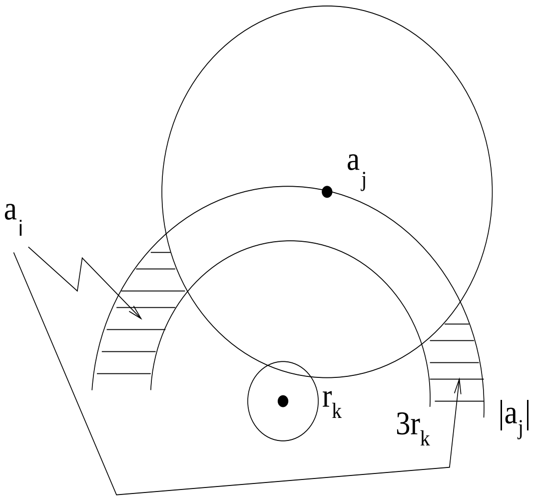
Da $i, j < k$ ist, gilt $0 = a_k \notin B_i \cup B_j$, also $\varrho_i < |a_i|$, $\varrho_j < |a_j|$. Da $B_i \cap B_k \neq \emptyset$, $B_j \cap B_k \neq \emptyset$ ist, gilt $|a_i| \le \varrho_i + \varrho_k$. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
3\varrho_k < \varrho_i < |a_i| \le \varrho_i + \varrho_k \le \frac{4}{3}\varrho_i, \\
3\varrho_k < \varrho_j < |a_j| \le \varrho_j + \varrho_k \le \frac{4}{3}\varrho_j ,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

und o.B.d.A. soll gelten:

$$|a_i| \le |a_j|.$$

Fall (α): $\quad a_i \notin B_j$



Daraus folgt

$$\varrho_j < |a_i - a_j|$$

und

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\langle a_i, a_j\rangle}{|a_i|\,|a_j|} = \frac{|a_i|^2 + |a_j|^2 - |a_i - a_j|^2}{2|a_i|\,|a_j|} \\
&= \frac{|a_i|}{2|a_j|} + \frac{(|a_j| - |a_i - a_j|)(|a_j| + |a_i - a_j|)}{2|a_i|\,|a_j|} \\
&\le \frac{1}{2} + \frac{max(|a_j| - |a_i - a_j|, 0)\, 2|a_j|}{2|a_i|\,|a_j|} \le \frac{1}{2} + \frac{(\varrho_j + \varrho_k - \varrho_j)}{\varrho_i} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\varrho_k}{\varrho_i} \le \frac{5}{6} < 1\,,
\end{aligned}$$

wobei wir (2.12) verwendet haben. Damit ist (2.11) bewiesen im Fall (α).

Fall (β): $\quad a_i \in B_j$. Daraus folgt $i < j$, $a_j \notin B_i$, also

$$\varrho_i \le |a_i - a_j| \le \varrho_j \tag{2.13}$$

und mit (2.4)

$$\varrho_j \le \frac{4}{3}\varrho_i\,. \tag{2.14}$$

Andererseits folgt aus (2.12), daß

$$\varrho_i \le |a_i| \le |a_j| \le \frac{4}{3}\varrho_j \tag{2.15}$$

und somit
$$\varrho_i \sim |a_i| \sim |a_j| \sim \varrho_j \, .$$
Wir zeigen nun (2.11) für alle von 0 verschiedenen Elemente der abgeschlossenen Menge
$$C = \{(a_i, \varrho_i, a_j, \varrho_j) \mid a_i, \varrho_i, a_j, \varrho_j \text{ erfüllen } (2.13), (2.14), (2.15)\} \, .$$
Zuerst bemerken wir, daß
$$\cos\theta < 1 \, , \tag{2.16}$$
für $(a_i, \varrho_i, a_j, \varrho_j) \in C - \{0\}$, denn falls $\cos\theta = 1$, so folgt
$$\begin{aligned} \varrho_i &\le |a_j - a_i| = ||a_j| - |a_i|| = |a_j| - |a_i| \\ &\le \frac{4}{3}\varrho_j - \varrho_i \le \frac{16}{9}\varrho_i - \varrho_i = \frac{7}{9}\varrho_i \, , \end{aligned}$$
also ein Widerspruch. Andererseits ist die Menge der Winkel kompakt, da diese stetiges Bild der kompakten Teilmenge
$$C_0 = \{(a_i, \varrho_i, a_j, \varrho_j) \in C \mid |a_j| = 1\}$$
ist. Zusammen mit (2.16) ergibt dies (2.11), und der Satz ist bewiesen für beschränktes A.

//

Für allgemeines A und $l \ge 1$ definieren wir die Menge
$$A_l := \{x \in A \mid 3D(l-1) \le |x| < 3Dl\}$$
sowie die Familien
$$\mathcal{F}^l := \{\bar{B}_\varrho(a) \in \mathcal{F} \mid a \in A_l\} \, .$$
Da die A_l beschränkt sind, gibt es nach dem oben bewiesenen paarweise disjunkte Teilfamilien $\mathcal{G}_1^l, \ldots, \mathcal{G}_{\bar{N}_n}^l \subseteq \mathcal{F}^l$ mit
$$A_l \subseteq \bigcup_{i=1}^{\bar{N}_n} \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i^l} B \, .$$
Dann sind für $j = 1, \ldots, \bar{N}_n$
$$\begin{aligned} \mathcal{G}_j &:= \bigcup_{l=1}^{\infty} \mathcal{G}_j^{2l-1}, \\ \mathcal{G}_{j+\bar{N}_n} &:= \bigcup_{l=1}^{\infty} \mathcal{G}_j^{2l} \end{aligned}$$
paarweise disjunkte Teilfamilien, die gemeinsam A überdecken, und der Satz folgt mit $N := 2\bar{N}_n$.

///

Korollar 2.5 *$\mathbb{R}^n$ besitzt die symmetrische Vitalieigenschaft bezüglich jedes Radon-Maßes μ.*

Beweis:
Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von abgeschlossenen Bällen im $\mathbb{R}^n$, die eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mu(A) < \infty$ zentral fein überdeckt. Wir wählen $1 - \frac{1}{N} < \theta < 1$, wobei N die Konstante aus dem Überdeckungssatz von Besicovitch ist. Da $\mathcal{F}$ die Menge A zentral fein überdeckt, überdeckt auch die Teilfamilie

$$\mathcal{F}_1 := \{B \in \mathcal{F} \mid \operatorname{diam} B \leq 1\}$$

A zentral fein. Nach dem Überdeckungssatz von Besicovitch existieren paarweise disjunkte Teilfamilien $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_N \subseteq \mathcal{F}$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \bigcup_{B \in \mathcal{G}_j} B\,.$$

Daraus folgt

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{N} \mu(A \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_j} B)\,,$$

und es existiert ein $i \in \{1, \ldots, N\}$ mit

$$\frac{1}{N}\mu(A) \leq \mu(A \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B)\,.$$

Da $\mathcal{G}_i$ paarweise disjunkt ist und $\mathbb{R}^n$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, sind die $\mathcal{G}_i$'s abzählbar. Daher gilt

$$\frac{1}{N}\mu(A) \leq \sum_{B \in \mathcal{G}_i} \mu(A \cap B)\,,$$

und es existieren

$$B_1, \ldots, B_{M_1} \in \mathcal{G}_i \subseteq \mathcal{F}$$

mit

$$(1-\theta)\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{M_1} \mu(A \cap B_j) = \mu(A \cap \bigcup_{j=1}^{M_1} B_j),$$

da $\mu(A) < \infty$ ist und die B_j paarweise disjunkt sind. Da $\cup_{j=1}^{M_1} B_j$ abgeschlossen, also $\mu-$meßbar ist, folgt

$$\mu(A - \bigcup_{j=1}^{M_1} B_j) \leq \theta\mu(A)\,. \tag{2.17}$$

Da die B_j abgeschlossen sind, ist

$$U_2 := \mathbb{R}^n - \bigcup_{j=1}^{M_1} B_j$$

offen, und, da $\mathcal{F}$ die Menge A zentral fein überdeckt, wird die Menge

$$A_2 := A \cap U_2 = A - \bigcup_{j=1}^{M_1} B_j$$

von

$$\mathcal{F}_2 := \{B \in \mathcal{F} \mid \text{diam } B \leq 1,\ B \subseteq U_2\}$$

auch zentral fein überdeckt. Wie oben gibt es paarweise disjunkte Bälle

$$B_{M_1+1}, \ldots, B_{M_2} \in \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$$

mit

$$\mu(A_2 - \bigcup_{j=M_1+1}^{M_2} B_j) \leq \theta\mu(A_2)$$

also

$$\mu(A - \bigcup_{j=1}^{M_2} B_j) \leq \theta^2\mu(A)\,.$$

Da $B_j \subseteq U_2 = \mathbb{R}^n - \cup_{j=1}^{M_1} B_j$ für $j = M_1+1, \ldots, M_2$, sind $B_1, \ldots, B_{M_2}$ paarweise disjunkt. Somit existieren per Induktion paarweise disjunkte Bälle $B_1, \ldots, B_{M_k} \in \mathcal{F}$ mit

$$\mu(A - \bigcup_{j=1}^{M_k} B_j) \leq \theta^k\mu(A)\,.$$

Da $\theta < 1$ und $\mu(A) < \infty$, folgt

$$\mu(A - \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = 0\,.$$

///

3 Differentiation von Maßen

Definition 3.1 *X sei ein topologischer Raum und μ, ν seien Borel-Maße auf X.*

1. *ν heißt* absolutstetig bezüglich μ, *geschrieben*
$$\nu \ll \mu\,,$$
falls für alle Borelmengen $B \subseteq X$ gilt
$$\mu(B) = 0 \;\Rightarrow\; \nu(B) = 0\,.$$

2. *μ und ν heißen* gegenseitig singulär, *geschrieben*
$$\mu \perp \nu\,,$$
falls eine Borelmenge $B \subseteq X$ existiert mit
$$\mu(X - B) = \nu(B) = 0\,.$$

□

Definition 3.2 *Es seien μ, ν Radon-Maße auf einem lokalkompakten, metrischen Raum X. Für $x \in spt\,\mu$ definieren wir die* (untere/obere) Dichte von ν bezüglich μ *durch*

$$\begin{aligned}\overline{D}_\mu\nu(x) &:= \limsup_{\varrho\downarrow 0} \frac{\nu(B_\varrho(x))}{\mu(B_\varrho(x))}\\ \underline{D}_\mu\nu(x) &:= \liminf_{\varrho\downarrow 0} \frac{\nu(B_\varrho(x))}{\mu(B_\varrho(x))}\end{aligned}$$

und

$$D_\mu\nu(x) := \lim_{\varrho\downarrow 0} \frac{\nu(B_\varrho(x))}{\mu(B_\varrho(x))}\,,$$

falls dieser Limes existiert, d.h. $D_\mu\nu(x) \in [0,\infty]$. Für $x \in X - spt\,\mu$ setzen wir

$$D_\mu\nu(x) = \overline{D_\mu}\nu(x) = \underline{D_\mu}\nu(x) := \infty\,.$$

□

Bemerkungen:

1. Da X lokalkompakt ist, existiert für $x \in X$ ein $\varrho_0 > 0$ mit
$$\overline{B_{\varrho_0}(x)} \text{ kompakt}\,,$$
also $\mu(B_\varrho(x)), \nu(B_\varrho(x)) < \infty$ für $0 < \varrho \leq \varrho_0$. Für $x \in spt\,\mu$ gilt
$$\mu(B_\varrho(x)) > 0$$
für alle $\varrho > 0$, und der Quotient in Definition 3.2 ist wohldefiniert für $0 < \varrho \leq \varrho_0$.

2. Da die abgeschlossenen Bälle $\bar{B}_\varrho(x) = \cap_{r>\varrho}\bar{B}_r(x) = \cap_{r>\varrho}B_r(x)$ der Schnitt über die umgebenden Bälle sind und die offenen Bälle $B_\varrho(x) = \cup_{r<\varrho}\bar{B}_r(x) = \cup_{r<\varrho}B_r(x)$ die Vereinigung der enthaltenen Bälle, folgt mit Proposition 1.1 für $0 < \varrho < \varrho_0$

$$\begin{aligned}\mu(\bar{B}_\varrho(x)) &= \lim_{r\downarrow\varrho}\mu(\bar{B}_r(x)) = \lim_{r\downarrow\varrho}\mu(B_r(x)),\\ \mu(B_\varrho(x)) &= \lim_{r\uparrow\varrho}\mu(\bar{B}_r(x)) = \lim_{r\uparrow\varrho}\mu(B_r(x)),\end{aligned}$$

und gleiches für ν . Dies ergibt für $x \in spt\ \mu$

$$\begin{aligned}\overline{D}_\mu\nu(x) &= \limsup_{\varrho\downarrow 0}\frac{\nu(B_\varrho(x))}{\mu(B_\varrho(x))} = \limsup_{\varrho\downarrow 0}\frac{\nu(\bar{B}_\varrho(x))}{\mu(\bar{B}_\varrho(x))},\\ \underline{D}_\mu\nu(x) &= \liminf_{\varrho\downarrow 0}\frac{\nu(B_\varrho(x))}{\mu(B_\varrho(x))} = \liminf_{\varrho\downarrow 0}\frac{\nu(\bar{B}_\varrho(x))}{\mu(\bar{B}_\varrho(x))},\end{aligned} \tag{3.1}$$

und in Definition 3.2 können äquivalent abgeschlossene Bälle verwendet werden.

3. Da μ und ν als Borel-Maße vorausgesetzt sind, sind die Funktionen

$$\begin{aligned}\varphi_\varrho(x) &:= \mu(B_\varrho(x))\,,\\ \psi_\varrho(x) &:= \nu(B_\varrho(x))\,,\end{aligned}$$

unterhalbstetig, also borelmeßbar. Dann sind auch

$$\lambda_\varrho(x) := \begin{cases}\psi_\varrho(x)/\varphi_\varrho(x) & [0 < \varphi_\varrho < \infty],\\ \infty & [\varphi_\varrho = 0],\\ 0 & [\varphi_\varrho = \infty],\end{cases}$$

und mit der vorigen Bemerkung sind

$$x \mapsto \sup_{0<\varrho<\delta}(\inf)\lambda_\varrho(x) = \sup_{0<\varrho<\delta,\varrho\in\mathbb{Q}}(\inf)\lambda_\varrho(x)$$

borelmeßbar, und somit sind auch

$$\underline{D}_\mu\nu = \liminf_{\varrho\downarrow 0}\lambda_\varrho = \lim_{k\to\infty}\inf_{0<\varrho<1/k}\lambda_\varrho \quad \text{und} \quad \overline{D}_\mu\nu = \limsup_{\varrho\downarrow 0}\lambda_\varrho = \lim_{k\to\infty}\sup_{0<\varrho<1/k}\lambda_\varrho$$

borelmeßbar. Weiter ist $D_\mu\nu$ auf der Borelmenge $[\overline{D}_\mu\nu = \underline{D}_\mu\nu]$ wohldefiniert und somit auch borelmeßbar.

□

Satz 3.1 (Differentiationssatz für Radon-Maße) *Es seien μ, ν Radon-Maße auf einem lokalkompakten, separablen metrischen Raum X , und X besitze die symmetrische Vitalieigenschaft bezüglich μ .*

Dann ist die Dichte von ν bezüglich μ

$$D_\mu\nu(x) = \lim_{\varrho\downarrow 0}\frac{\nu(B_\varrho(x))}{\mu(B_\varrho(x))}$$

$\mu-$fast überall definiert und borelmeßbar. Weiter existiert ein Radon-Maß ν_s mit

$$\nu_s \perp \mu, \tag{3.2}$$

genauer

$$\nu_s = \nu\lfloor Z,$$

wobei Z eine Borelmenge mit $\mu(Z) = 0$ ist, und

$$\nu = D_\mu \nu \cdot \mu + \nu_s. \tag{3.3}$$

Falls X auch die symmetrische Vitalieigenschaft bezüglich ν besitzt, so ist $D_\mu \nu$ auch $\nu-$fast überall definiert, und (3.2) ist erfüllt für

$$Z = [D_\mu \nu = \infty]. \tag{3.4}$$

□

Bevor wir diesen Satz beweisen, erwähnen wir zwei Korollare.

Korollar 3.2 (Version des Satzes von Radon-Nikodym) *Es seien μ, ν Radon-Maße auf einem lokalkompakten, separablen metrischen Raum X, und X besitze die symmetrische Vitalieigenschaft bezüglich μ. Weiter sei*

$$\nu \ll \mu.$$

Dann gilt

$$\nu = D_\mu \nu \cdot \mu.$$

□

Korollar 3.3 (Version des Zerlegungssatzes von Lebesgue) *Es seien μ, ν Radon-Maße auf einem lokalkompakten, separablen metrischen Raum X, und X besitze die symmetrische Vitalieigenschaft bezüglich μ.*

Dann kann ν eindeutig zerlegt werden in

$$\left.\begin{array}{c} \nu = \nu_{ac} + \nu_s, \\ \text{wobei } \nu_{ac}, \nu_s \text{ Radon-Maße sind mit} \\ \nu_{ac} \ll \mu, \nu_s \perp \mu\,. \end{array}\right\} \tag{3.5}$$

Weiter gilt

$$D_\mu \nu = D_\mu \nu_{ac}, D_\mu \nu_s = 0 \tag{3.6}$$

$\mu-$fast überall.

□

Beweis der Korollare:
Korollar 3.2 und die Zerlegung im Korollar 3.3 folgen direkt aus Satz 3.1. Für eine weitere Zerlegung $\nu = \nu'_{ac} + \nu'_s, \nu'_{ac} \ll \mu, \nu'_s \perp \mu$ existieren Borelmengen $B, B' \subseteq X$ mit $\mu(B), \mu(B'), \nu_s(X - B), \nu'_s(X - B') = 0$. Setzen wir $B_0 := B \cup B'$, so folgt $\mu(B_0), \nu_s(X - B_0), \nu'_s(X - B_0) = 0$ und weiter $\nu_{ac}(B_0), \nu'_{ac}(B_0) = 0$, da $\nu_{ac}, \nu'_{ac} \ll \mu$. Für $S \subseteq X$ folgt nun

$$\begin{aligned}\nu_{ac}(S) &= \nu_{ac}(S - B_0) + \nu_s(S - B_0) = \nu(S - B_0) = \\ &= \nu'_{ac}(S - B_0) + \nu'_s(S - B_0) = \nu'_{ac}(S),\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\nu_s(S) &= \nu_{ac}(S \cap B_0) + \nu_s(S \cap B_0) = \nu(S \cap B_0) = \\ &= \nu'_{ac}(S \cap B_0) + \nu'_s(S \cap B_0) = \nu'_s(S),\end{aligned}$$

also $\nu_{ac} = \nu'_{ac}, \nu_s = \nu'_s$.

Nun wenden wir Satz 3.1 auf ν_s an, und bekommen

$$\nu_s = (\nu_s)_{ac} + (\nu_s)_s$$

mit

$$(\nu_s)_{ac} \ll \mu, (\nu_s)_s \perp \mu$$

sowie

$$(\nu_s)_{ac} = D_\mu \nu_s \cdot \mu.$$

Da andererseits $\nu_s = 0 + \nu_s, 0 \ll \mu, \nu_s \perp \mu$ und die Zerlegung eindeutig ist, folgt $(\nu_s)_{ac} = 0$. Dies ergibt

$$D_\mu \nu_s = 0$$

$\mu-$fast überall und somit (3.6).

///

Beweis des Differentiationssatz für Radon-Maße, Satz 3.1:
Da X ein lokalkompakter, separabler metrischer Raum ist, kann X als abzählbare Vereinigung von offenen, relativ kompakten Mengen dargestellt werden. Wir können dann die Einschränkungen von μ, ν auf diese Mengen betrachten, und nehmen daher o.B.d.A. an, daß

$$\mu(X),\ \nu(X) < \infty\,.$$

Wir sahen bereits in Bemerkung 3. vor dem Differentiationssatz, daß $\overline{D}_\mu\nu, \underline{D}_\mu\nu$ und $D_\mu\nu$ borelmeßbar sind. Folgende Behauptung ist fundamental:

Behauptung:
Für $0 < \alpha < \infty$ und jede Borelmenge $A \subseteq X$ gilt:

1. Falls X auch die symmetrische Vitalieigenschaft bezüglich ν besitzt, so gilt

$$A \subseteq [\underline{D}_\mu\nu \le \alpha] \ \Rightarrow\ \nu(A) \le \alpha\mu(A) \tag{3.7}$$

2. sowie
$$A \subseteq [\overline{D}_\mu \nu \geq \alpha] \;\Rightarrow\; \nu(A) \geq \alpha\mu(A)\,. \tag{3.8}$$

Um (3.7) zu beweisen, betrachten wir für eine beliebige offene Menge $U \supseteq A$ und $\alpha < \gamma < \infty$ die Familie der abgeschlossenen Bälle

$$\mathcal{F} = \{\bar{B}_\varrho(a) \mid a \in A,\ \bar{B}_\varrho(a) \subseteq U,\ \nu(\bar{B}_\varrho(a)) \leq \gamma\mu(\bar{B}_\varrho(a))\}.$$

Da $A \subseteq [\underline{D}_\mu \nu \leq \alpha]$ gilt, wird A von $\mathcal{F}$ zentral fein überdeckt. Dann existiert unter Verwendung der symmetrischen Vitalieigenschaft von X bezüglich ν eine abzählbare, paarweise disjunkte Teilfamilie $\{B_j \mid j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$, die A fast überall bezüglich ν überdeckt, d.h.

$$\nu(A - \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = 0\,.$$

Daraus folgt
$$\nu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma\mu(B_j) = \gamma\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) \leq \gamma\mu(U)\,,$$
und (3.7) folgt für $\gamma \downarrow \alpha$ mit (1.7).

Der Beweis von (3.8) verläuft analog unter Verwendung der angenommenen symmetrischen Vitalieigenschaft von X bezüglich μ.

//

Für $\alpha \to \infty$ folgt aus (3.8)
$$\mu([\overline{D}_\mu \nu = \infty]) = 0\,. \tag{3.9}$$
Zunächst zerlegen wir ν in seinen absolutstetigen und singulären Anteil bezüglich μ. Dazu wählen wir eine Borelmenge

$$B \in \mathcal{A} := \{A \subseteq X \text{ Borel} \mid \mu(X - A) = 0\}$$

mit
$$\nu(B) = \inf_{A \in \mathcal{A}} \nu(A)\,.$$
Für $\nu_{ac} := \nu\lfloor B$ und $\nu_s := \nu\lfloor(X - B)$ gilt

$$\nu = \nu_{ac} + \nu_s\,.$$

ν_{ac}, ν_s sind mit Lemma 1.2 und 1.5 Radon-Maße.

Da $\mu(X - B) = 0$ ist, gilt
$$\nu_s \perp \mu\,,$$
also (3.2). Für eine Borelmenge $A \subseteq X$ mit $\mu(A) = 0$ folgt

$$\mu(X - (B - A)) \leq \mu(X - B) + \mu(A) = 0\,,$$

und somit wegen der Minimalität von B

$$\nu(B) = \nu(B - A)$$

sowie
$$\nu_{ac}(A) = \nu(B \cap A) = 0\,,$$
also
$$\nu_{ac} \ll \mu\,.$$
Mit $\alpha \to 0$ in (3.8) sehen wir
$$\mu(B \cap [\,\overline{D}_\mu \nu_s > 0]) = 0\,,$$
und es folgt, da $\mu(X - B) = 0$ ist,
$$\mu([\,\overline{D}_\mu \nu_s > 0]) = 0\,. \tag{3.10}$$
Daraus folgt
$$\overline{D}_\mu \nu = \overline{D}_\mu \nu_{ac}\ ,\ \underline{D}_\mu \nu = \underline{D}_\mu \nu_{ac} \quad \mu - \text{fast überall},$$
sowie
$$D_\mu \nu = D_\mu \nu_{ac} \quad \mu - \text{fast überall},$$
falls eine der Dichten existiert.

Somit verbleibt für (3.3) zu zeigen, daß
$$\begin{gathered} D_\mu \nu_{ac}\ \mu\text{–fast überall existiert,} \\ \nu_{ac} = D_\mu \nu_{ac} \cdot \mu. \end{gathered} \tag{3.11}$$
Zum Beweis der ersten Aussage bemerken wir, da $\nu_{ac} \ll \mu$ ist, besitzt X die symmetrische Vitalieigenschaft bezüglich ν_{ac}, und (3.7) gilt uneingeschränkt für ν_{ac}. Nun betrachten wir für $0 < a < b < \infty$ die Borelmenge
$$A_{a,b} = [\,\underline{D}_\mu \nu_{ac} < a < b < \overline{D}_\mu \nu_{ac}]\,.$$
Aus (3.7) und (3.8) folgt
$$b\mu(A_{a,b}) \le \nu_{ac}(A_{a,b}) \le a\mu(A_{a,b}) \tag{3.12}$$
also
$$\mu(A_{a,b}) = 0\,.$$
Da $[\,\underline{D}_\mu \nu_{ac} < \overline{D}_\mu \nu_{ac}] = \bigcup_{a<b \text{ rational}} A_{a,b}$ ist, folgt
$$\mu([\,\underline{D}_\mu \nu_{ac} < \overline{D}_\mu \nu_{ac}]) = 0\,,$$
und $D_\mu \nu_{ac}$ ist μ–fast überall definiert und borelmeßbar.

Zum Beweis der zweiten Aussage in (3.11) zeigen wir für jede Borelmenge $A \subseteq X$, dass
$$\nu_{ac}(A) = \int_A D_\mu \nu_{ac}\,\mathrm{d}\mu. \tag{3.13}$$
Da μ endlich ist, ist $D_\mu \nu \cdot \mu$ mit Lemma 1.2 borelregulär. Mit (3.13) stimmen die borelregulären Maße ν_{ac} und $D_\mu \nu \cdot \mu$ auf Borelmengen überein und sind daher identisch, d.h. wir erhalten die zweite Aussage in (3.11).

Nun beweisen wir (3.13). Für eine Borelmenge $A \subseteq X$ und $\tau > 1$ setzen wir

$$\begin{aligned} A_- &:= A \cap [\, D_\mu \nu_{ac} = 0], \\ A_\infty &:= A \cap [\, D_\mu \nu_{ac} = \infty], \\ A_j &:= A \cap [\, \tau^{j-1} < D_\mu \nu_{ac} \le \tau^j] \quad \text{für } j \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

und erhalten $\mu-$fast überall, also $\nu_{ac}-$fast überall,

$$A = A_- + A_\infty + \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j.$$

Da $\nu_{ac} \ll \mu$ ist, folgt aus (3.9)

$$\mu([\, \overline{D}_\mu \nu_{ac} = \infty]), \nu_{ac}([\, \overline{D}_\mu \nu_{ac} = \infty]) = 0,$$

also $\mu(A_\infty), \nu_{ac}(A_\infty) = 0$. Mit $\alpha \to 0$ in (3.7) folgt

$$\nu_{ac}([\, \underline{D}_\mu \nu_{ac} = 0]) = 0,$$

also $\nu_{ac}(A_-) = 0$, und trivial gilt

$$\int_{A_-} D_\mu \nu_{ac} \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

da $D_\mu \nu_{ac} = 0$ auf A_- . Weiter folgt aus (3.7)

$$\nu_{ac}(A_j) \le \tau^j \mu(A_j) \le \tau \int_{A_j} D_\mu \nu_{ac} \, d\mu \,,$$

und aus (3.8) folgt

$$\tau^{-1} \int_{A_j} D_\mu \nu_{ac} \, d\mu \le \tau^{j-1} \mu(A_j) \le \nu_{ac}(A_j) \,.$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} \tau^{-1} \int_A D_\mu \nu_{ac} \, d\mu &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau^{-1} \int_{A_j} D_\mu \nu_{ac} \, d\mu \\ &\le \sum_{j=-\infty}^{\infty} \nu_{ac}(A_j) = \nu_{ac}(A) \\ &\le \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau \int_{A_j} D_\mu \nu_{ac} \, d\mu \;=\; \tau \int_A D_\mu \nu_{ac} \, d\mu \,. \end{aligned}$$

Da $\tau > 1$ beliebig war, folgt (3.13).

Falls X die symmetrische Vitalieigenschaft auch bezüglich ν besitzt, so gilt (3.7) uneingeschränkt für ν, und wir bekommen wie in (3.12) für

$$\tilde{A}_{a,b} = [\underline{D}_\mu \nu < a < b < \overline{D}_\mu \nu],$$

dass
$$b\mu(\tilde{A}_{a,b}) \leq \nu(\tilde{A}_{a,b}) \leq a\mu(\tilde{A}_{a,b})$$
also
$$\nu(\tilde{A}_{a,b}) = 0 \ ,$$
schließlich
$$\nu([\underline{D}_\mu\nu < \overline{D}_\mu\nu]) = 0 \,,$$
und $D_\mu\nu$ ist $\nu-$fast überall definiert. Für eine Borelmenge $A \subseteq X$ mit
$$A \subseteq [D_\mu\nu < \infty]$$
und $\mu(A) = 0$ folgt mit (3.7), daß
$$\nu(A) = 0 \,.$$
Setzen wir $Z = [D_\mu\nu = \infty]$, so gilt
$$\nu\lfloor(X - Z) \ll \mu$$
und
$$\nu\lfloor Z \perp \mu \ ,$$
da $\mu(Z) = 0$ ist mit (3.9). Da $\nu = \nu\lfloor(X - Z) + \nu\lfloor Z = \nu_{ac} + \nu_s$ und diese Zerlegung mit dem Argument in Korollar 3.3 ohne Verwendung des Satzes 3.1 eindeutig ist, folgt $\nu_s = \nu\lfloor Z$, und der Satz ist bewiesen.

///

Wir wenden Satz 3.1 nun an, um die Existenz von Lebesguepunkten für integrierbare Funktionen zu zeigen.

Definition 3.3 *Es sei μ ein Radon-Maß auf einem lokalkompakten, separablen metrischen Raum X. Für $f \in L^p_{loc}(\mu)$, $1 \leq p < \infty$ heißt $x \in spt\ \mu \subseteq X$* Lebesguepunkt *von f bezüglich p, falls*
$$\lim_{\varrho \downarrow 0} \mu(B_\varrho(x))^{-1} \int_{B_\varrho(x)} |f - f(x)|^p \, d\mu = 0$$
□

Da X lokalkompakt ist und $x \in spt\,\mu$ gilt
$$0 < \mu(B_\varrho(x)) < \infty$$
für $0 < \varrho < \varrho_x$ klein. Für eine μ-meßbare Menge $E \subseteq X$ gilt $\chi_E \in L^1_{loc}(\mu)$, da X lokalkompakt und μ ein Radon-Maß ist. $x \in spt\,\mu$ ist ein Lebesguepunkt von χ_E genau dann, wenn
$$\lim_{\varrho \downarrow 0} \frac{\mu(B_\varrho(x) \cap E)}{\mu(B_\varrho(x))} = 1 \,,$$
falls $x \in E$, und
$$\lim_{\varrho \downarrow 0} \frac{\mu(B_\varrho(x) \cap E)}{\mu(B_\varrho(x))} = 0 \,,$$
falls $x \in X - E$. Ein Punkt $x \in spt\,\mu$, der die erste Limesrelation erfüllt, heißt ein Punkt mit Dichte 1 für E bezüglich μ. Falls $x \in spt\,\mu$ die zweite Limesrelation erfüllt, so heißt x ein Punkt mit Dichte 0 für E bezüglich μ. Wir beginnen mit einem Korollar zu Satz 3.1.

Korollar 3.4 *μ sei ein Radon-Maß auf einem lokalkompakten, separablen metrischen Raum X, und X besitze die symmetrische Vitalieigenschaft bezüglich μ. Für $f \in L^1_{loc}(\mu)$ gilt dann für $\mu-$fast alle $x \in X$, daß*

$$\lim_{\varrho \downarrow 0} \mu(B_\varrho(x))^{-1} \int_{B_\varrho(x)} f\, d\mu = f(x)\,.$$

Beweis:
O.B.d.A. sei $f \geq 0$, und wir betrachten das Maß $\nu := f\mu$. Da X als lokalkompakter, separabler metrischer Raum $\sigma-$kompakt ist, ist jede $\mu-$meßbare Menge $\sigma-$endlich, und mit Lemma 1.2 ist ν borelregulär. Da $f \in L^1_{loc}(\mu)$, ist ν auf kompakten Mengen endlich, also ein Radon-Maß mit Lemma 1.5.

Nach Satz 3.1 gilt für alle Borelmengen $B \subseteq X$

$$\nu(B) = \int_B D_\mu \nu \; d\mu$$

und daraus folgt für $\mu-$fast alle $x \in X$, daß

$$f(x) = D_\mu \nu(x) = \lim_{\varrho \downarrow 0} \mu(B_\varrho(x))^{-1} \int_{B_\varrho(x)} f \; d\mu\,.$$

///

Satz 3.5 *μ sei ein Radon-Maß auf einem lokalkompakten, separablen metrischen Raum X, und X besitze die symmetrische Vitalieigenschaft bezüglich μ.*

Dann sind für $f \in L^p_{loc}(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, $\mu-$fast alle $x \in X$ Lebesguepunkte von f.

Beweis:
Da μ eine Radon-Maß ist bzw. da X separabel metrisch ist, gilt

$$\mu(X - spt\,\mu) = 0\,,$$

und wir brauchen nur $x \in spt\,\mu$ zu betrachten. Für $r \in \mathbb{R}$ ist $|f-r|^p \in L^1_{loc}(\mu)$ und nach Korollar 3.4 gilt für $\mu-$fast alle $x \in spt\,\mu \subseteq X$

$$\lim_{\varrho \downarrow 0} \mu(B_\varrho(x))^{-1} \int_{B_\varrho(x)} |f-r|^p \; d\mu = |f(x)-r|^p\,.$$

Die Menge dieser x sei L_r, also gilt

$$\mu(X - L_r) = 0 \qquad \forall r \in \mathbb{R}\,.$$

Nun betrachten wir

$$L := \bigcap_{r \in \mathbb{Q}} L_r \subseteq spt\,\mu\,.$$

Dann ist

$$\mu(X - L) = 0\,.$$

Weiter gilt für $x \in L$ und $r \in \mathbb{Q}$:

$$\limsup_{\varrho \downarrow 0} \; \mu(B_\varrho(x))^{-1} \int_{B_\varrho(x)} |f - f(x)|^p \; d\mu \leq$$

$$\leq C \limsup_{\varrho \downarrow 0} \mu(B_\varrho(x))^{-1} \int_{B_\varrho(x)} |f - r|^p \, d\mu + C|r - f(x)|^p \leq$$

$$\leq 2C|f(x) - r|^p \, ,$$

und es folgt, da $r \in \mathbb{Q}$ beliebig war, daß x ein Lebesguepunkt für f bezüglich p ist.

///

Korollar 3.6 *X, μ seien wie in Satz 3.5. Weiter sei E eine μ-meßbare Teilmenge von X.*

Dann sind $\mu-$fast alle Punkte $x \in E$ Punkte mit Dichte 1 für E bezüglich μ, und $\mu-$fast alle Punkte $x \in X - E$ sind Punkte mit Dichte 0 für E bezüglich μ.

///

Bemerkungen:

1. Für nicht notwendigerweise $\mu-$meßbares $E \subseteq X$ mit $\mu(E) < \infty$ wählen wir eine Borelmenge $B \supseteq E$ mit $\mu(B) = \mu(E)$ und sehen für beliebiges $\mu-$meßbares $A \subseteq X$

   $$\mu(E) = \mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B - A) \geq \mu(E \cap A) + \mu(E - A) \geq \mu(E),$$

   also

   $$\mu(E \cap A) = \mu(B \cap A), \tag{3.14}$$

   da $\mu(E - A) \leq \mu(B - A) \leq \mu(B) = \mu(E) < \infty$. Dies ergibt für alle $x \in spt \ \mu$

   $$\lim_{\varrho \downarrow 0} \frac{\mu(B_\varrho(x) \cap E)}{\mu(B_\varrho(x))} = \lim_{\varrho \downarrow 0} \frac{\mu(B_\varrho(x) \cap B)}{\mu(B_\varrho(x))}.$$

   Mit obigem Korollar ist

   $$N := \left\{ x \in B \;\middle|\; \lim_{\varrho \downarrow 0} \frac{\mu(B_\varrho(x) \cap B)}{\mu(B_\varrho(x))} \neq 1 \right\}$$

   eine $\mu-$Nullmenge, also ist auch $E \cap N$ eine $\mu-$Nullmenge, und es gilt für $\mu-$fast alle $x \in E$

   $$\lim_{\varrho \downarrow 0} \frac{\mu(B_\varrho(x) \cap E)}{\mu(B_\varrho(x))} = 1.$$

   Schreiben wir $X = \cup_{l=1}^\infty K_l$ als abzählbare Vereinigung kompakter Mengen $K_l \subseteq X$ und betrachten $E \cap K_l$, so erhalten wir obige Aussage ohne die Bedingung $\mu(E) < \infty$.

   Da i.a. $\mu(B - E) > 0$ möglich ist, kann eine analoge Aussage wie in obigem Korollar für $\mu-$fast alle $x \in X - E$ nicht geschlossen werden. Eine solche Aussage gilt auch nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

2. Wir betrachten X und μ wie oben mit $\mu(X) < \infty$ und einer nicht $\mu-$meßbaren Menge $F \subseteq X$. Z.B. gilt dies für $X = B_1(0)$ und $\mu = \mathcal{L}^n$ das Lebesguemaß, siehe [Sch24] Proposition 4.3. Betrachten wir $\mu-$meßbare Mengen $A_j \subseteq F$ mit $\mu(A_j) \geq$

$\sup_{A\subseteq F,\mu-\text{meßbar}} \mu(A) - 1/j$, so ist $F' := F - \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ auch nicht $\mu-$meßbar und erfüllt $\mu(A) = 0$ für alle $\mu -$ meßbaren $A \subseteq F'$.

Dann ist $E := X - F'$ nicht $\mu-$meßbar. Wir wählen eine Borelmenge $B \supseteq E$ mit $\mu(B) = \mu(E)$. Klarerweise ist $X - B \subseteq F'$ meßbar bezüglich μ , also $\mu(X - B) = 0$ und somit $\mu(X) = \mu(B) = \mu(E)$. Mit (3.14) sehen wir für alle $\mu-$meßbaren $A \subseteq X$

$$\mu(E \cap A) = \mu(X \cap A) = \mu(A)$$

und somit für alle $x \in spt\,\mu$

$$\lim_{\varrho\downarrow 0} \frac{\mu(B_\varrho(x) \cap E)}{\mu(B_\varrho(x))} = 1.$$

Da F' nicht $\mu-$meßbar ist, gilt $\mu(X - E) = \mu(F') > 0$, und somit gilt auf einer Menge von positivem Maß in $X - E$, nämlich für $\mu-$fast alle $x \in X - E = F'$, daß $\lim_{\varrho\downarrow 0} \mu(B_\varrho(x) \cap E)/\mu(B_\varrho(x)) = 1 \neq 0$.

□

Bevor wir ein weiteres Korollar erwähnen, brauchen wir eine weitere Definition.

Definition 3.4 *Es sei μ ein Radon-Maß auf einem lokalkompakten, separablen metrischen Raum X.*

1. *Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ hat den* approximativen Limes *$r \in \mathbb{R}$ bei $x \in spt\,\mu \subseteq X$ bezüglich μ, geschrieben*
$$(\mu)\operatorname*{aplim}_{y\to x} f(y) = r,$$
falls für alle $\epsilon > 0$
$$\lim_{\varrho\downarrow 0} \frac{\mu(B_\varrho(x) \cap [\,|f - r| \geq \epsilon])}{\mu(B_\varrho(x))} = 0\,.$$

2. *$f : X \to \mathbb{R}$ heißt* approximativ stetig *bei $x \in spt\,\mu \subseteq X$ bezüglich μ, falls*
$$(\mu)\operatorname*{aplim}_{y\to x} f(y) = f(x).$$

□

Falls $f \in L^1_{loc}(\mu)$ und $x \in spt\,\mu$ ein Lebesguepunkt bezüglich μ ist, so ist f bei x approximativ stetig bezüglich μ, denn

$$\lim_{\varrho\downarrow 0} \frac{\mu(B_\varrho(x) \cap [\,|f - f(x)| \geq \epsilon])}{\mu(B_\varrho(x))} \leq \lim_{\varrho\downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \mu(B_\varrho(x))^{-1} \int_{B_\varrho(x)} |f - f(x)|\, d\mu = 0\,.$$

Korollar 3.7 *X, μ seien wie in Satz 3.5. Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ μ-meßbar.*
Dann ist f $\mu-$fast überall approximativ stetig bezüglich μ.

Beweis:
Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion

$$f_n := \max(-n, \min(n, f)) \ .$$

Da X lokalkompakt und μ ein Radon-Maß ist, gilt $f_n \in L^1_{loc}(\mu)$. Nach Satz 3.5 und obiger Bemerkung ist f_n fast überall approximativ stetig bezüglich μ, d.h. f_n ist approximativ stetig für alle $x \in C_n \subseteq spt\,\mu$ mit

$$\mu(X - C_n) = 0 \ .$$

Da für $|f(x)| + \epsilon < n$ die Gleichheit

$$[\,|f - f(x)| \geq \epsilon] \ = \ [\,|f_n - f_n(x)| \geq \epsilon]$$

gilt, ist f approximativ stetig bezüglich μ für

$$x \in B_n := [\,|f| < n] \cap C_n \ .$$

Da

$$\mu(X - \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \mu(X - \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n) = 0 \ ,$$

folgt, daß f $\mu-$fast überall approximativ stetig bezüglich μ ist.

///

5 Hausdorff-Maße

Definition 5.1 *Es sei X ein metrischer Raum, $0 \leq s < \infty, 0 < \delta \leq \infty$.*

1. *Für $A \subseteq X$ ist*

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2} \right)^s \;\middle|\; A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ \operatorname{diam} C_j \leq \delta \right\}$$

wobei $\alpha(s) = \pi^{s/2}/\Gamma(s/2+1)$, mit $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, \mathrm{d}x$, $\alpha(0) = 1, (\operatorname{diam} \emptyset)^s := 0$, und $(\operatorname{diam} C)^0 = 1$ für $C \neq \emptyset$.

2. *Das s-dimensionale Hausdorff-Maß auf X ist für $A \subseteq X$ definiert durch*

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

□

Wir brauchen $\delta \to 0$, damit die Überdeckung $\{C_j\}$ der lokalen Geometrie von A folgt. Für $s = n \in \mathbb{N}$ und den Einheitsball $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $\alpha(n) = \omega_n := \mathcal{L}^n(B_1(0))$.

Proposition 5.1 *$\mathcal{H}^s$ ist ein borelreguläres Maß.*

Beweis:
Zuerst ist $\mathcal{H}^s_\delta$ ein Maß, denn sei $A \subseteq \cup_{k=1}^\infty A_k \subseteq X$ und $A_k \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty C_j^k$, $\operatorname{diam} C_j^k \leq \delta$. Dann gilt

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j^k$$

und

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam} C_j^k}{2} \right)^s$$

also

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_k)\ .$$

Daraus folgt

$$\mathcal{H}^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sup_{\delta > 0} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_k)\ ,$$

und $\mathcal{H}^s$ ist auch ein Maß.

Nun beweisen wir mit Satz 1.1, daß $\mathcal{H}^s$ ein Borel-Maß ist. Dazu seien $A, B \subseteq X$, $d(A,B) > 0$ und $\delta < d(A,B)$. Weiter sei

$$A \cup B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ \operatorname{diam} C_j \leq \delta\ .$$

Wir definieren:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &:= \{j \mid C_j \cap A \neq \emptyset\} \\ \mathcal{B} &:= \{j \mid C_j \cap B \neq \emptyset\}\end{aligned}$$

Es gilt

$$A \subseteq \bigcup_{j\in\mathcal{A}} C_j \text{ und } B \subseteq \bigcup_{j\in\mathcal{B}} C_j\ .$$

Da

$$\operatorname{diam} C_j \leq \delta < d(A,B)$$

folgt

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset\,,$$

und somit

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B) &\leq \sum_{j\in\mathcal{A}} \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^s + \sum_{j\in\mathcal{B}} \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^s \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^s\ .\end{aligned}$$

Nehmen wir das Infimum über alle solchen $\{C_j\}$, so ergibt dies

$$\mathcal{H}^s_\delta(A\cup B) \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B)$$

und für $\delta \searrow 0$

$$\mathcal{H}^s(A\cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)\ .$$

Nach Satz 1.1 ist $\mathcal{H}^s$ ein Borel-Maß.

Schließlich zeigen wir, daß $\mathcal{H}^s$ borelregulär ist. Dazu beachten wir, daß

$$\operatorname{diam} C = \operatorname{diam} \overline{C}$$

für alle $C \subseteq X$, also

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^s \;\middle|\; A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ \operatorname{diam} C_j \leq \delta,\ C_j \text{ abgeschlossen}\right\}\ .$$

Für $A \subseteq X$ mit $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ gilt $\mathcal{H}^s(X) = \infty$, und X ist eine Borelmenge, die A umfaßt. Nun gelte $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, also auch $\mathcal{H}^s_\delta(A) < \infty$. Dann existieren für $\delta_k \searrow 0$ abgeschlossene Mengen $C_j^k \subseteq X$ mit diam $C_j^k \leq \delta_k$ und

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j^k$$

und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam} C_j^k}{2}\right)^s \leq H^s_{\delta_k}(A) + \delta_k\ .$$

Wir definieren die Borelmengen

$$B_k := \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j^k \text{ und } B := \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \ .$$

Dies ergibt

$$A \subseteq B_k \text{ und } A \subseteq B \ ,$$

sowie

$$\mathcal{H}^s_{\delta_k}(B) \le \mathcal{H}^s_{\delta_k}(B_k) \le \mathcal{H}^s_{\delta_k}(A) + \delta_k \ ,$$

also für $k \to \infty$

$$\mathcal{H}^s(B) \le \mathcal{H}^s(A) \ ,$$

und somit die Behauptung.

///

Proposition 5.2

1. *$\mathcal{H}^0$ ist das Zählmaß auf X.*
2. *$\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}^1_\delta = \mathcal{L}^1$ auf $\mathbb{R}$ für alle $\delta > 0$.*
3. *$\mathcal{H}^s \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n$ für $s > n$.*
4. *$\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ für $\lambda > 0,\ A \subseteq \mathbb{R}^n$.*
5. *$\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ für jede affine Isometrie $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ A \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Beweis: **i**) Da $\alpha(0) = 1$, gilt $\mathcal{H}^0(\{x\}) = 1$ für $x \in X$. Da alle endlichen Mengen abgeschlossen sind und $\mathcal{H}^0$ ein Borel-Maß ist, folgt

$$\mathcal{H}^0(A) = \#(A)$$

für alle endlichen Mengen und

$$\mathcal{H}^0(A) = \infty$$

für alle unendlichen Mengen.

ii) Für $A \subseteq \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ gilt

$$\mathcal{L}^1(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam} C_j \ \middle| \ A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \right\} \le \mathcal{H}^1_\delta(A) \ .$$

Andererseits sei $I_k := [k\delta, (k+1)\delta],\ k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \le \delta$$

und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \le \operatorname{diam} C_j \ .$$

Dies ergibt für $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$, daß

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (C_j \cap I_k) \; ,$$

also

$$\mathcal{H}_\delta^1(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam} C_j$$

und

$$\mathcal{H}_\delta^1(A) \leq \mathcal{L}^1(A) \; .$$

Es folgt

$$\mathcal{H}_\delta^1 = \mathcal{L}^1$$

und

$$\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1 \; .$$

iii) Es sei $I = [0,1]^n$. I ist die Vereinigung von k^n Würfeln W der Form

$$W = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{j_i - 1}{k}, \frac{j_i}{k} \right]$$

also

$$\operatorname{diam} W \leq \frac{n^{1/2}}{k} \; .$$

Dies ergibt für $n^{1/2}/k < \delta$, daß

$$\mathcal{H}_\delta^s(I) \leq k^n \cdot \alpha(s) \left(\frac{n^{1/2}}{2k} \right)^s = \alpha(s) 2^{-s} n^{s/2} k^{n-s} \to 0$$

für $k \to \infty$, also

$$\mathcal{H}^s(I) = \mathcal{H}_\delta^s(I) = 0 \; .$$

Mit abzählbarer Vereinigung folgt

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0 \; .$$

iv) und **v**) sind trivial.

///

Proposition 5.3 *Es sei $f : X \to Y$ eine Lipschitzabbildung*

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x,y) \quad \forall x, y \in X$$

und für ein $L < \infty$.

Dann gilt für $A \subseteq X$, $0 \leq s < \infty$, daß

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq L^s \mathcal{H}^s(A) \; .$$

Beweis: Es sei $L, \delta > 0$ und $A \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty C_j$, diam $C_j \leq \delta$. Dann gilt

$$f(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty f(C_j), \quad \text{diam } f(C_j) \leq L \text{ diam } C_j \leq L\delta$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_{L\delta}(f(A)) &\leq \sum_{j=1}^\infty \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } f(C_j)}{2} \right)^s \\ &\leq L^s \sum_{j=1}^\infty \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s .\end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\mathcal{H}^s_{L\delta}(f(A)) \leq L^s \mathcal{H}^s_\delta(A)$$

und

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq L^s \mathcal{H}^s(A)$$

für $\delta \searrow 0$.

///

Proposition 5.4 *Es sei $A \subseteq X$, $0 \leq s < t < \infty$. Dann gilt:*

$$\mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$$

und

$$\mathcal{H}^t(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty .$$

Beweis: Es sei $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, $\delta > 0$. Dann existieren $C_j \subseteq X$ mit diam $C_j \leq \delta$ und

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty C_j$$

$$\sum_{j=1}^\infty \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1 \leq \mathcal{H}^s(A) + 1 .$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^t_\delta(A) &\leq \sum_{j=1}^\infty \alpha(t) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^t \\ &\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \left(\frac{\delta}{2} \right)^{t-s} \sum_{j=1}^\infty \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^s \\ &\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} (\mathcal{H}^s(A) + 1) \left(\frac{\delta}{2} \right)^{t-s}\end{aligned}$$

und

$$\mathcal{H}^t(A) = 0$$

für $\delta \searrow 0$.

///

Definition 5.2 *Die* Hausdorff-Dimension *von $A \subseteq X$ ist definiert durch*

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{0 \le s < \infty \mid \mathcal{H}^s(A) = 0\} .$$

□

Falls $\dim_{\mathcal{H}}(A) = s$ ist, so gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^t(A) &= 0 \quad && \text{für } t > s \\ \mathcal{H}^t(A) &= \infty && \text{für } 0 \le t < s \end{aligned}$$

und

$$0 \le \mathcal{H}^s(A) \le \infty .$$

Da $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$ für $s > n$ gemäß Proposition 5.2 **iii**), folgt

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) \le n \quad \text{für } A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Aus Proposition 5.3 folgt

$$\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) \le \dim_{\mathcal{H}}(A)$$

für jede Lipschitzabbildung f.

6 Hausdorff-Dichten

Literatur

[EGa] Evans, L.C., Gariepy, R.F., (1992) Measure Theory and Fine Properties of Functions, CRC Press, Boca Raton - Ann Arbor - London.

[F] Federer, H., (1969) Geometric Measure Theory, Springer Verlag, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153, Berlin - Heidelberg - New York.

[Sch24] Schätzle, R., (2024) Analysis III, Vorlesungsskript Universität Tübingen.

[Sim] Simon, L., (1983) Lectures on Geometric Measure Theory, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis Australian National University, Volume 3.