Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 19.10.23

Harmonische Analysis
WS 2023/24
1.Übung

AUFGABE 1:
Approximieren Sie die Einpunktmasse $\delta_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ durch eine Folge $f_m \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f_m \to \delta_0 \quad \text{schwach}^* \text{ in } C^0_*(\mathbb{R}^n)^*,$$

d.h.

$$\int \varphi f_m \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \to \int \varphi \, \mathrm{d}\delta_0 = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C^0_*(\mathbb{R}^n).$$

AUFGABE 2:
Wie in der Vorlesung setzen wir für $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$

$$\begin{gathered}(\tau_x \mu)(A) := \mu(A - x) \quad \text{für } A \in \mathcal{B}^n, \quad (\tau_x f)(y) := f(y - x) \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^n,\\ (h_\lambda \mu)(A) := \lambda^{-n} \mu(\lambda A) \quad \text{für } A \in \mathcal{B}^n, \quad (h_\lambda f)(y) := f(\lambda y) \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^n,\\ \mu^*(A) := \mu(-A) \quad \text{für } A \in \mathcal{B}^n, \quad f^*(y) := f(-y) \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^n.\end{gathered}$$

Zeigen Sie

$$\begin{gathered}\tau_x(f\mathcal{L}^n) = (\tau_x f)\mathcal{L}^n,\\ h_\lambda(f\mathcal{L}^n) = (h_\lambda f)\mathcal{L}^n,\\ (f\mathcal{L}^n)^* = f^*\mathcal{L}^n.\end{gathered}$$

AUFGABE 3:
Es sei $\mathcal{S}$ der Raum der stark-abfallenden Funktionen bzw. Schwartz-Funktionen f , d.h. $f \in C^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\sup_{|\gamma| \le N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |\partial^\gamma f(x)| < \infty \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, daß $\mathcal{S}$ eine Unteralgebra von $L^1(\mathbb{R}^n)$ mit der Faltung als Multiplikation ist.

AUFGABE 4:
Zeigen Sie, daß der Raum $C^0_b(\mathbb{R}^n)$ der stetigen, beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit der Norm $\| u \|_{C^0_b(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)|$ und punktweiser Multiplikation eine kommutative Banachalgebra mit Einselement ist.

Abgabetermin ist Donnerstag, 26.10.23.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 26.10.23

Harmonische Analysis
WS 2023/24
2.Übung

AUFGABE 5:
Es sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $[\varphi \neq 0] \subseteq B_1(0), \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = 1$ und weiter sei $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. Zeigen Sie für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\varphi_\varepsilon * f \to f \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^n) \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

(Hinweis: Verwenden Sie $\lim_{\delta\to 0} \sup_{|h|\le\delta} \| f(.+h) - f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0$.)

AUFGABE 6:
Zeigen Sie für $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in C_0^\infty(B_1^n(0))$, daß $\varphi * \mu \in C^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\partial^\gamma(\varphi * \mu) = (\partial^\gamma \varphi) * \mu.$$

AUFGABE 7:
Es sei $f \in \mathcal{S}$ eine Schwartz-Funktion, siehe Aufgabe 3. Zeigen Sie

$$\widehat{\Delta f}(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{f}(\xi) \quad \text{und} \quad \widehat{\partial_{kl} f} = \frac{\xi_k \xi_l}{|\xi|^2} \widehat{\Delta f}(\xi) \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

AUFGABE 8:
Zeigen Sie, es existiert kein $C = C(n) < \infty$ mit

$$\| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le C \| \hat{f} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

(Hinweis: Beachten Sie, dass $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^n))$ nicht abgeschlossen in $C^0_*(\mathbb{R}^n)$ ist.)

Abgabetermin ist Donnerstag, 02.11.23.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 02.11.23

Harmonische Analysis
WS 2023/24
3.Übung

AUFGABE 9:
Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ rotationssymmetrisch, d.h. $f(x) = f(y)$ für $|x| = |y|$. Zeigen Sie $\hat{f}$ ist auch rotationssymmetrisch.
AUFGABE 10:
Zeigen Sie für $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ mit $f_1, \ldots, f_n \in L^1(\mathbb{R})$, dass

$$\hat{f}(y_1, \ldots, y_n) = \hat{f}_1(y_1) \cdots \hat{f}_n(y_n).$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Fubini.)
AUFGABE 11:
Geben Sie ein Beispiel von schwach* konvergenten $\mu_k \to \mu, \mu_k, \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ an, d.h.

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\mu_k \to \int \varphi \, \mathrm{d}\mu \quad \text{für alle } \varphi \in C^0_*(\mathbb{R}^n),$$

aber

$$\hat{\mu}_k \not\to \hat{\mu} \quad \text{punktweise auf } \mathbb{R}^n.$$

AUFGABE 12:
Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n), R > 0, x \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$g_R(x) := \int\limits_{B_R(0)} f(y) \exp(-2\pi i \langle x, y \rangle) \, \mathrm{d}y,$$
$$h_R(x) := \int\limits_{B_R(0)} \hat{f}(y) \exp(2\pi i \langle x, y \rangle) \, \mathrm{d}y.$$

Zeigen Sie

$$\| \hat{f} - g_R \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0, \quad \| f - h_R \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

für $R \to \infty$.

Abgabetermin ist Donnerstag, 09.11.23.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 09.11.23

Harmonische Analysis
WS 2023/24
4.Übung

AUFGABE 13: (Überdeckungssatz von Wiener)
Für endlich viele Bälle $B_{\varrho_i}(x_i) \subseteq \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, N$ existiert $S \subseteq \{1, \ldots, N\}$ mit

$$\{B_{\varrho_i}(x_i)\}_{i \in S} \text{ sind paarweise disjunkt,}$$
$$\cup_{i=1}^N B_{\varrho_i}(x_i) \subseteq \cup_{i \in S} B_{3\varrho_i}(x_i).$$

AUFGABE 14:
Geben Sie ein Beispiel einer $\mathcal{L}^1-$meßbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die schwach in $L^1(\mathcal{L}^1)$ ist, d.h.

$$\mathcal{L}^1(|f| > t) \leq Mt^{-1} \quad \forall t > 0$$

für ein $M < \infty$, aber $f \notin L^1(\mathcal{L}^1)$.

AUFGABE 15:
$x \in \mathbb{R}^n$ heißt ein Lebesguepunkt von $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, falls

$$(Nf)(x) := \limsup_{\varrho \to 0} \fint_{B_\varrho(x)} |f - f(x)| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = 0.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen.

1. Für $g \in C_0^0(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $Ng = 0$.
2. $$Nf \leq M(f - g) + |f - g| \quad \forall g \in C_0^0(\mathbb{R}^n),$$
   wobei M die Maximalfunktion bezeichnet.
3. $\mathcal{L}^n-$fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ sind Lebesguepunkte von $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

AUFGABE 16:
Für $A \subseteq \mathbb{R}^n, d \geq 0, \varepsilon > 0$ setzen wir

$$\mathcal{S}_\varepsilon^d(A) := \inf\{\sum_{j=1}^\infty \omega_d \varrho_j^d \mid A \subseteq \cup_{j=1}^\infty B_{\varrho_j}(x_j), 0 < \varrho_j < \varepsilon, x_j \in \mathbb{R}^n \}$$

mit $\omega_d > 0$ geeignet, das $d-$dimensionale sphärische Hausdorff-Maß

$$\mathcal{S}^d(A) := \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{S}_\varepsilon^d(A),$$

und die Hausdorff-Dimension

$$dim_{\mathcal{H}} A := \inf\{\ d \mid \mathcal{S}^d(A) = 0\ \}.$$

Zeigen Sie für $f \in L^1(\mathbb{R}^n), d \geq 0$,

$$A_d := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{\varrho \to 0} \varrho^{-d} \int\limits_{B_\varrho(x)} |f| \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n > 0\ \},$$

daß

$$\dim_{\mathcal{H}} A_d \leq d.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Überdeckungssatz von Vitali.)

Abgabetermin ist Donnerstag, 16.11.23.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 16.11.23

Harmonische Analysis
WS 2023/24
5.Übung

AUFGABE 17:
Zeigen Sie für $f_m \to f$ in $L^1_w(\mathbb{R}^n)$, d.h.

$$|f_m - f|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$

daß

$$f_m \to f \quad \text{im Maß},$$

$$|f_m - f|^p \to 0 \quad \text{in } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ für } 0 < p < 1.$$

AUFGABE 18:
Es sei T linear auf einer dichten Teilmenge $D \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$ in die Menge der meßbaren Funktionen und

$$\mathcal{L}^n(|Tf| > t) \leq \Lambda \parallel f \parallel_{L^1(\mathbb{R}^n)} t^{-1} \quad \forall t > 0, f \in D.$$

Zeigen Sie, daß T eindeutig linear zum schwachen Typ $(1,1)$ erweitert.

AUFGABE 19:
Zeigen Sie für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ folgende Aussagen.

1. $$\mathcal{L}^n(Mf > t) \leq C_n t^{-1} \int\limits_{|f|>t/2} |f| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \quad \forall t > 0.$$

   (Hinweis: Betrachten Sie $\tilde{f} := \chi_{[|f|>t/2]} f$.)

2. Für einen Würfel $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ und $0 < \fint_Q |f| \leq t$ gilt

   $$\mathcal{L}^n(Q \cap [Mf > c_n t]) \geq 2^{-n} t^{-1} \int\limits_{Q \cap [|f|>t]} |f| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

   für ein $c_n > 0$.
   (Hinweis: Führen Sie eine Calderon-Zygmund-Zerlegung von Q für f und $t > 0$ durch und beachten Sie, daß $Mf \geq c_n t$ auf Q_k .)

3. $Mf(x) \geq c_n \parallel f \parallel_{L^1(B^n_1(0))} |x|^{-n}$ für $|x| \geq 1$ und ein $c_n > 0$.

4. Für alle Würfel Q gilt

$$M(f\chi_Q) \in L^1(Q) \Longleftrightarrow |f| \log(1+|f|) \in L^1(Q).$$

AUFGABE 20:

Zeigen Sie mit Aufgabe 19-1. aber ohne Verwendung des Interpolationssatzes von Marcinkiewicz, daß der Maximaloperator M vom starken Typ (p, p) für $1 < p \leq \infty$ ist.

Abgabetermin ist Donnerstag, 23.11.23.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 23.11.23

Harmonische Analysis
WS 2023/24
6.Übung

AUFGABE 21:
Es sei $K_1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ mit $|K_1(x)| \leq \Lambda |x|^{-n}$ und $K_2 \in C^1_{loc}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ mit $|\nabla K_2(x)| \leq \Lambda |x|^{-n-1}$. Zeigen Sie

$$\int\limits_{B_R(0)} |x| \, |K_1(x)| \, \mathrm{d}x \leq C_n \Lambda R \quad \forall R > 0,$$

$$\int\limits_{|x| \geq 2|y|} |K_2(x-y) - K_2(x)| \, \mathrm{d}x \leq C_n \Lambda.$$

AUFGABE 22:
$K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ erfülle die Dini-Bedingung

$$|K(x-y) - K(x)| \leq \omega(2|y|/|x|) \, |x|^{-n} \quad \text{für } 2|y| < |x|$$

mit ω monoton nicht-fallend und

$$\int_0^1 \frac{\omega(r)}{r} \, \mathrm{d}r \leq \Lambda.$$

Zeigen Sie

$$\int\limits_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| \, \mathrm{d}x \leq C_n \Lambda.$$

AUFGABE 23:
Es sei K homogen vom Grad $-n$

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

mit $\Omega : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{C}$ homogen vom Grad 0 und $\Omega \in C^1_{loc}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ und

$$\int\limits_{\partial B_1^n(0)} \Omega \, \mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)} = 0.$$

Zeigen Sie, K ist ein Calderon-Zygmund-Kern, d.h. $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ und

$$\int\limits_{B_R(0)} |x|\ |K(x)|\ \mathrm{d}x \leq \Lambda R \quad \forall R > 0,$$

$$\int\limits_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\ \mathrm{d}x \leq \Lambda,$$

$$\left| \int\limits_{B_R(0) - B_\varrho(0)} K\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n \right| \leq \Lambda \quad \forall\ 0 < \varrho < R < \infty,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{B_R(0) - B_\varepsilon(0)} K\ \mathrm{d}\mathcal{L}^n \text{ existiert } \forall R > 0$$

für ein $0 < \Lambda < \infty$.
(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 21.)

AUFGABE 24:

Die Fundamentallösung des Laplace-Operators auf $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, ist gegeben durch

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n} |x|^{2-n} & \text{für } n \geq 3\ , \\ \dfrac{1}{2\pi} \log |x| & \text{für } n = 2\ . \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß $\partial_{kl}\Gamma$ ein Calderon-Zygmund-Kern ist und weiter

$$\partial_{kl} u = (\partial_{kl}\Gamma)\Delta u + \frac{\delta_{kl}}{n} \Delta u \quad \text{für } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Schließen Sie daraus die L^p- bzw. Calderon-Zygmund-Abschätzungen, d.h.

$$\| D^2 u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p} \| \Delta u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty.$$

(Hinweis: Verwenden Sie die Darstellungsformel $u(x) = \int \Gamma(x-y)\Delta u(y)\ \mathrm{d}y$ für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, Aufgabe 23 und Satz 3.1.)

Abgabetermin ist Donnerstag, 30.11.23.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 30.11.23

Harmonische Analysis
WS 2023/24
7.Übung

AUFGABE 25:
Es sei K ein Calderon-Zygmund-Kern und

$$(Kf)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|y| \geq \varepsilon} K(y) f(x-y) \, \mathrm{d}y \quad \text{für } f \in C_0^1(\mathbb{R}^n).$$

Zeigen Sie K ist homothetie-invariant, d.h.

$$h_\lambda K f = K(h_\lambda f) \quad \text{für alle } \lambda > 0, f \in C_0^1(\mathbb{R}^n),$$

genau dann, wenn K homogen vom Grade $-n$ ist.

AUFGABE 26:
Zeigen Sie für $\nu \in \partial B_1^n(0), n \geq 2$, dass

$$\int\limits_{\partial B_1^n(0)} \log \frac{1}{|\langle \nu, \omega \rangle|} \, \mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)}(\omega) < \infty.$$

AUFGABE 27:
Es sei K homogen vom Grad $-n$,

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n - \{0\},$$

mit $\Omega : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{C}$ homogen vom Grad 0 und

$$|\Omega(\mu) - \Omega(\nu)| \leq \Lambda |\mu - \nu|^\alpha \quad \text{für } \mu, \nu \in \partial B_1(0)$$

und ein $0 < \alpha \leq 1$. Zeigen Sie, daß Ω eine Dini-Bedingung

$$|\Omega(\mu) - \Omega(\nu)| \leq \omega(|\mu - \nu|)$$

mit ω nicht-fallend und

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(r)}{r} \, \mathrm{d}r \leq \Lambda / \alpha$$

erfüllt.

AUFGABE 28:
Es sei $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ homogen vom Grad $-n$,

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

mit $\Omega : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{C}$ homogen vom Grad 0 . Es gelte für $\Omega = \Omega_g + \Omega_u$ zerlegt in geraden und ungeraden Anteil

$$\int\limits_{\partial B_1^n(0)} \Omega \, \mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)} = 0,$$

$$\int\limits_{\partial B_1^n(0)} |\Omega_u| \, \mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)} < \infty,$$

$$\sup_{\nu \in \partial B_1(0)} \int\limits_{\partial B_1^n(0)} |\Omega_g(\omega)| \log \frac{1}{|\langle \nu, \omega \rangle|} \, \mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)}(\omega) < \infty.$$

Zeigen Sie für den zu Ω gehörenden Multiplikator m , definiert durch

$$m(y) := \int\limits_{\partial B_1^n(0)} \Omega_g(\omega) \log \frac{|y|}{|\langle y, \omega \rangle|} \, \mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)}(\omega) +$$

$$- \frac{i\pi}{2} \int\limits_{\partial B_1^n(0)} \Omega_u(\omega) sgn\langle y, \omega \rangle \, \mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)}(\omega),$$

daß m für gerades Ω gerade ist und m für ungerades Ω ungerade ist.

Abgabetermin ist Donnerstag, 07.12.23.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 07.12.23

Harmonische Analysis
WS 2023/24
8.Übung

AUFGABE 29:
Es sei $\Gamma \in C^1_{loc}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ homogen vom Grad $-n+1$ und $K := \nabla\Gamma$. Zeigen Sie, K ist homogen vom Grad $-n$ und erfüllt die Auslöschungsbedingung, d.h.

$$\int\limits_{\partial B_1^n(0)} K \ \mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)} = 0.$$

Schliessen Sie daraus für $\Gamma \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^n - \{0\})$, dass $K = (K_1, \ldots, K_n)$ komponentenweise ein Calderon-Zygmund Kern ist.
(Hinweis: Verwenden Sie den Divergenzsatz und Aufgabe 23. Vgl. Aufgabe 24.)

AUFGABE 30:
Zeigen Sie für $f : \partial B_1^n(0) \to \mathbb{R}$ stetig

$$\int\limits_{\partial B_1^n(0)} f(\omega) \ \mathrm{d}area_{\partial B_1^n(0)}(\omega) = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{\partial B^{n-1}_{\sqrt{1-t^2}}(0)} f(\omega', t)(1-t^2)^{-1/2} \ \mathrm{d}area_{\partial B^{n-1}_{\sqrt{1-t^2}}(0)}(\omega') \ \mathrm{d}t.$$

AUFGABE 31:
Zeigen Sie für die Riesz-Transformation und $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n), p^{-1} + q^{-1} = 1, 1 < p, q < \infty$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (R_j f) \ g \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f \ R_j g \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

AUFGABE 32:
Zeigen Sie für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, daß $\hat{f}(0) = 0$, also $\int f \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = 0$. Zeigen Sie weiter, daß die Hilbert-Transformation $H\chi_{]0,1[} \notin L^\infty(\mathbb{R})$. Schließen Sie daraus, daß die Kerne in den Sätzen 3.1 und 4.1 i.a. und insbesondere die Riesz-Transformation $L^1(\mathbb{R}^n)$ nicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ nicht in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ abbilden.

Abgabetermin ist Donnerstag, 14.12.23.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 14.12.23

Harmonische Analysis
WS 2023/24
9.Übung

AUFGABE 33:
Es seien $u_1, \ldots, u_n, \sigma, f_1, \ldots, f_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$ und

$$\Delta u + \nabla \sigma = f \qquad (\Longleftrightarrow \Delta u_j + \partial_j \sigma = f_j),$$
$$div\ u = \partial_1 u_1 + \ldots + \partial_n u_n = 0.$$

Zeigen Sie
$$\| D^2 u \|_{L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \leq C_{n,p} \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} .$$
(Hinweis: Beachten Sie $\Delta \sigma = div\ f$ und verwenden und adaptieren Sie Korollar 4.4.)

AUFGABE 34:
Zeigen Sie für $u \in C_0^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}), 1 < p < \infty$,

$$\| \nabla u \|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C_p \| \partial_1 u + i \partial_2 u \|_{L^p(\mathbb{R}^2)} .$$

(Hinweis: Zeigen Sie $\partial_j u = -R_j(R_1 - iR_2)(\partial_1 u + i\partial_2 u)$.)

AUFGABE 35:
Zeigen Sie

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \Delta_x \right) \left(\exp(2\pi i \langle y, x \rangle) \exp(-2\pi |y| t) \right) = 0 \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

AUFGABE 36:
Geben Sie eine Funktion $u \in C^0(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}) \cap C^\infty_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ mit

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^{n+1}_+,$$
$$u(x,0) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n,$$

aber $u \not\equiv 0$ an.

Abgabetermin ist Donnerstag, 21.12.23.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 21.12.23

Harmonische Analysis
WS 2023/24
10.Übung

AUFGABE 37: (Poisson-Integral)
Zeigen Sie für das Poisson-Integral u eines Maßes $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, d.h.

$$u(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)\ \mathrm{d}\mu(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\mu}(y) \exp(2\pi i\langle y,x\rangle) \exp(-2\pi|y|t)\ \mathrm{d}y,$$

daß u harmonisch in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ ist und

$$\sup_{t>0} \| u_t \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \| \mu \|,$$
$$u_t \to \mu \quad \text{schwach}^* \text{ in } C^0_*(\mathbb{R}^n),$$

d.h.

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_t(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x \to \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\ \mathrm{d}\mu \quad \forall \varphi \in C^0_*(\mathbb{R}^n).$$

AUFGABE 38:
$u, v \in C^\infty_{loc}(B^2_1(0))$ heißen konjugiert harmonisch, wenn $u + iv : B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Zeigen Sie u, v sind konjugiert harmonisch genau dann, wenn (v, u) Gradient einer harmonische Funktion ist, d.h. wenn eine harmonische Funktion $H \in C^\infty_{loc}(B_1(0))$ mit

$$\Delta H = 0, \partial_1 H = v, \partial_2 H = u \quad \text{in } B_1(0)$$

existiert.

AUFGABE 39:
Zeigen Sie, daß der Poisson-Kern und die konjugierten Poisson-Kerne $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}) = (Q^1, \ldots, Q^n, P)$ die verallgemeinerten Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{n+1} \partial_j u_j = 0,$$
$$\partial_j u_k = \partial_k u_j \quad j, k = 1, \ldots, n+1.$$

in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ erfüllen.
(Hinweis: Beachten Sie $P = 2\partial_{n+1}\Gamma, Q^j = 2\partial_j\Gamma$ für $j = 1, \ldots, n$, wobei Γ die harmonische Fundamentallösung ist.)

AUFGABE 40:

Zeigen Sie für $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$ und die konjugierten Poisson-Kerne

$$Q_t^j(x) := \frac{1}{\pi\omega_{n-1}} \frac{x_j}{|(x,t)|^{n+1}} \quad j = 1, \ldots, n,$$

daß

$$Q_t^j * f \to R_j f \quad \text{stark in } L^p(\mathbb{R}^n) \text{ für } 1 < p < \infty, t \to 0$$

und

$$Q_t^j * f \to R_j f \quad \text{im Mass für } p = 1, t \to 0.$$

Abgabetermin ist Donnerstag, 11.01.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 11.01.24

Harmonische Analysis
WS 2023/24
11.Übung

AUFGABE 41:
Zeigen Sie für $f \in \mathcal{F}C_0^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$, daß

$$\sup_{t>0} \Big(|P_t * f|, \sup_{j=1}^{n} |Q_t^j * f| \Big) \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

(Hinweis: Verwenden Sie Satz 5.4.)

AUFGABE 42:
Eine Funktion $u \in C^0_{loc}(\Omega), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, heißt subharmonisch, wenn für alle Bälle $B_\varrho(x) \subset\subset \Omega$ gilt, daß

$$u(x) \leq \fint_{\partial B_\varrho(x)} u \ \mathrm{d}area_{\partial B_\varrho(x)}.$$

Zeigen Sie, der gleichmäßige Limes subharmonischer Funktionen ist wieder subharmonisch.

AUFGABE 43:
Es sei $u \in C^2_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, harmonisch. Zeigen Sie $|u|^2 \in C^2_{loc}(\Omega)$ und

$$\Delta(|u|^2) \geq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

AUFGABE 44:
Es sei $u \in C^2_{loc}(B_1(0))$ harmonisch. Zeigen Sie

$$|u(0)|^q \leq \fint_{B_1(0)} |u|^q \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n \quad \text{für } q \geq 1.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.)

Abgabetermin ist Donnerstag, 18.01.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 18.01.24

Harmonische Analysis
WS 2023/24
12.Übung

AUFGABE 45:
Zeigen Sie für $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ mit $spt\ \mu \subset\subset \mathbb{R}^n$

$$\limsup_{|(x,t)| \to \infty} |(x,t)|^n |(P_t * \mu)(x)| < \infty$$

insbesondere

$$\lim_{|(x,t)| \to \infty} |(x,t)|^{n-1} |(P_t * \mu)(x)| = 0.$$

Schliessen Sie weiter für $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, daß

$$\lim_{|x| \to \infty} \sup_{t \geq \varepsilon} |(P_t * \mu)(x)| = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

(Hinweis: Verwenden Sie Proposition 5.2 für $|x| \leq M$. Verwenden Sie für $y \in spt\ \mu \subseteq B_R(0), |x| \geq 2R$, daß $|P_t(x-y)| \leq C_n |(x,t)|^{-n}$.)

AUFGABE 46:
Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ zu dem $f_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$$\widehat{f_j} = m_{R_j} \hat{f}$$

existiert, wobei $m_{R_j}(y) = -iy_j/|y|$. Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = 0.$$

(Hinweis: Beachten Sie, daß $\widehat{f_j}$ stetig ist.)

AUFGABE 47:
Zeigen Sie der Hardy-Raum

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) := \{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) \mid R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ für } j = 1, \ldots, n \ \}$$

ist mit der Norm

$$\| f \|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} := \| f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n \| R_j f \|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

ein Banachraum. Zeigen Sie weiter, die Riesz-Transformation

$$R_j : \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$$

ist stetig.
(Hinweis: Verwenden Sie Satz 5.6.)
AUFGABE 48:
Zeigen Sie für $u \in C^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}_+), a > 0$ ist das Flächenintegral $S_a u$ von u , definiert durch

$$(S_a u)(x) := \Bigg(\int\limits_{\Gamma_a(x)} t^{1-n} |\nabla u(y,t)|^2 \, \mathrm{d}(y,t) \Bigg)^{1/2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n,$$

unterhalbstetig auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie weiter, gilt

$$|\nabla u(x,t)| \leq \Lambda(1+t)^{-1-\delta} \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$$

für ein $\delta > 0$, so ist $S_a u$ stetig auf $\mathbb{R}^n$.

Abgabetermin ist Donnerstag, 25.01.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 25.01.24

Harmonische Analysis
WS 2023/24
13.Übung

AUFGABE 49:
Für $u \in C^2_{loc}(\Omega), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n - \{0\}$ offen, ist die Kelvin-Transformierte v von u definiert durch
$$v(x) := |x|^{2-n} u(\frac{x}{|x|^2}) \quad \text{für } \frac{x}{|x|^2} \in \Omega.$$
Zeigen Sie, daß
$$\Delta v(x) = |x|^{-2-n} \Delta u(\frac{x}{|x|^2}).$$
Insbesondere ist u genau dann harmonisch, wenn v harmonisch ist.

AUFGABE 50:
Es sei $\varphi \in C^0(\partial B_1(0))$. Zeigen Sie, es existiert genau ein $u \in C^0(\overline{B_1(0)}) \cap C^2_{loc}(B_1(0))$ des Dirichletproblems
$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B_1(0),$$
$$u = \varphi \quad \text{auf } \partial B_1(0).$$
(Hinweis: Transformieren Sie $B_1(0)$ mit der stereographischen Projektion $\Phi : \mathbb{R}^n - \{-e_n\} \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n - \{-e_n\}$, definiert durch
$$\Phi(x) := -e_n + 2\frac{x + e_n}{|x + e_n|^2},$$
auf $\mathbb{R}^n_+$ und verwenden Sie die Kelvin-Transformierte aus Aufgabe 49, das Poisson-Integral aus Satz 5.1 und das Maximumprinzip in Proposition 5.4. Verwenden Sie für die Stetigkeit bei $-e_n \cong \infty$ für $\varphi \in C^0_0(\partial B_1(0) - \{-e_n\})$ Aufgabe 45.)

AUFGABE 51:
Es sei $\Phi : \mathbb{R}^n - \{-e_n\} \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n - \{-e_n\}$ definiert durch
$$\Phi(x) := -e_n + 2\frac{x + e_n}{|x + e_n|^2}.$$
Zeigen Sie
$$|x| = 1, x \neq -e_n \Longleftrightarrow \Phi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$$
und
$$\Phi : B_1(0) \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times]0, \infty[.$$
Zeigen Sie weiter, $v \in C^2_{loc}(\mathbb{R}^n_+)$ ist harmonisch genau dann, wenn $\Big(x \mapsto |x + e_n|^{2-n}(v \circ \Phi)(x)\Big) \in C^2_{loc}(B_1(0))$ harmonisch ist.

(Hinweis: Verwenden Sie die Kelvin-Transformierte aus Aufgabe 49.)

AUFGABE 52:

Mit lokalen Maximumabschätzungen für elliptische Differentialoperatoren in Nicht-Divergenzform, siehe Theorem 9.20 im Buch von Gilbarg und Trudinger, gilt für harmonische Funktionen in $B_1(0)$

$$\| u \|_{L^\infty(B_{1/2}(0))} \leq C_{n,p} \| u \|_{L^p(B_1(0))} \quad \forall p > 0.$$

Zeigen Sie für u harmonisch in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ mit $\mathcal{M}_0 u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p > 0$, daß

$$\| u(.,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_n t^{-n/p} \| \mathcal{M}_0 u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall t > 0.$$

Abgabetermin ist Donnerstag, 01.02.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 01.02.24

Harmonische Analysis
WS 2023/24
14.Übung

AUFGABE 53:
Es sei $u \in C^2_{loc}(\Omega), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, mit

$$\Delta u \leq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen.

1. Ist $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n, \Delta u < 0$ in $\Omega, u \in C^0(\overline{\Omega})$ und

$$u \geq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

so gilt $u \geq 0$ in Ω .
(Hinweis: Betrachten Sie im Widerspruchsfall $x_0 \in \overline{\Omega}$ mit $u(x_0) = \min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) < 0$ und schließen Sie $x_0 \in \Omega$.)

2. Ist $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n, u \in C^0(\overline{\Omega})$ und

$$u \geq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

so gilt $u \geq 0$ in Ω .
(Hinweis: Zeigen Sie mit vorigem Punkt $u(x) + \varepsilon(R^2 - |x|^2) \geq 0$ für $x \in \Omega \subseteq B_R(0)$ und alle $\varepsilon > 0$.)

3. Ist

$$\liminf_{y \to \partial\Omega \cup \{\infty\}, y \in \Omega} u(y) := \inf_{x \in \partial\Omega \cup \{\infty\}} \liminf_{y \to x, y \in \Omega} u(y) \geq 0,$$

so gilt

$$u \geq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

(Hinweis: Setzen Sie $\Omega_\delta := \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > \delta, |x| < \delta^{-1} \}$ und wählen Sie $\delta > 0$ klein mit $u \geq -\varepsilon$ auf $\partial\Omega_\delta$ und wenden Sie den vorigen Punkt auf $v := u + \varepsilon$ in Ω_δ an.)

AUFGABE 54:
Die Carleson-Funktion bezüglich Zylindern ist definiert durch

$$(\mathcal{C}^* \mu)(x) := \sup_{\varrho > 0} \frac{|\mu|(B^n_\varrho(x) \times]0, \varrho[)}{\omega_n \varrho^n}.$$

Zeigen Sie
$$\mathcal{C}\mu \leq \mathcal{C}^*\mu \leq 2^n \mathcal{C}\mu.$$

AUFGABE 55:
Zeigen Sie für $g, h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$
$$\| gh \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \leq 2 \| g \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \| h \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + 2 \| g \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \| h \|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} .$$

AUFGABE 56:
Es sei $\{g^B\}_B$ eine Familie von Funktionen auf beliebigen Bällen $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft
$$g^{B^*} - g^B \equiv const \quad \text{auf } B, \text{falls } B \subseteq B^*.$$
Zeigen Sie, es existiert eine bis auf eine additive Konstante eindeutige Funktion g auf $\mathbb{R}^n$ mit
$$g - g^B \equiv const \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Abgabetermin ist Donnerstag, 08.02.24.

Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle 08.02.24

Harmonische Analysis
WS 2023/24
15.Übung

AUFGABE 57:
Es sei $u \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n), u \not\equiv const$. Zeigen Sie

$$\exp(\sigma|u|/ \parallel u \parallel_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

für $0 < \sigma \leq \sigma_n$. Geben Sie ein Beispiel an, daß dies nicht für alle σ gilt.
(Hinweis: Verwenden Sie den Satz von John-Nirenberg.)

AUFGABE 58:
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen und $g_m, g \in L^p(\Omega)$ für ein $1 \leq p, q \leq \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1$. Weiter konvergiere $g_m \to g$ schwach bzw. schwach* in $L^p_0(\Omega)$, d.h.

$$\int\limits_\Omega f g_m \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n \to \int\limits_\Omega fg \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n \quad \forall f \in L^q_0(\Omega).$$

Zeigen Sie

$$g_m - g_{m,\Omega} \to g - g_\Omega \quad \text{schwach bzw. schwach}^* \text{ in } L^p(\Omega),$$

d.h.

$$\int\limits_\Omega f(g_m - g_{m,\Omega}) \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n \to \int\limits_\Omega f(g - g_\Omega) \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n \quad \forall f \in L^q(\Omega).$$

AUFGABE 59:
Es seien g_m, g beschränkt in $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ und

$$g_m \to g \quad \text{punktweise } \mathcal{L}^n - \text{fast überall}.$$

Zeigen Sie

$$g_m \to g \quad \text{stark in } L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ für alle } 1 \leq p < \infty.$$

AUFGABE 60:
Es sei $K \in L^1(\mathbb{R}^n) \cup L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\int\limits_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(y)| \,\mathrm{d}x < \infty \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |K(x-y) - K(-y)| \,\mathrm{d}y < \infty.$$

Keine Abgabe.