Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle
Dr. N. Jork

25.04.25

Einführung in Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen
SS 2025
1.Übung

AUFGABE 1:
Geben Sie zu folgenden Funktionen f die Menge in $\mathbb{C}$ an, auf der f holomorph ist, und berechnen Sie die Ableitung.

$$f(z) := z^2, \quad f(z) := \exp(1/z),$$
$$f(z) := \bar{z}, \quad f(z) := |z|.$$

AUFGABE 2:
Es sei $f = u + iv : U \to \mathbb{C}, U \subseteq \mathbb{C}$ offen, holomorph, $u = Re(f), v = Im(f)$. Zeigen Sie u, v sind harmonisch, d.h.

$$\Delta u = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u = 0, \quad \Delta v = \partial_{xx} v + \partial_{yy} v = 0.$$

(Hinweis: Verwenden Sie die Cauchy-Riemann-Gleichungen.)

AUFGABE 3:
Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen explizit.

1. $y' = 5y + t$.
2. $y' = \alpha y/t, \alpha \neq 0$.
3. $y' = 2ty^2$.
4. $y' = y + ty^5$. (Bernoullische Differentialgleichung)
   (Hinweis: Setzen Sie $v = y^{-4}$.)

AUFGABE 4:
Es seien $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, y :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ stetig, und y sei in $]-\varepsilon, \varepsilon[- \{0\}$ differenzierbar mit

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für } t \in]-\varepsilon, \varepsilon[- \{0\}.$$

Zeigen Sie, y ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(., y) \quad \text{auf }]-\varepsilon, \varepsilon[,$$

d.h. y ist differenzierbar bei $t = 0$ und

$$y'(0) = f(0, y(0)).$$

Abgabetermin ist Freitag, 02.05.25.