

Analysis IV

Einführung in Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen

Reiner Schätzle
Sommersemester 2025
Universität Tübingen

Inhaltsverzeichnis

I	Funktionentheorie	1
1	Holomorphe Funktionen	1
II	Gewöhnliche Differentialgleichungen	4
4	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	4
III	Appendix	7
A	Wegunabhängigkeit von Wegintegralen	7

Teil I

Funktionentheorie

1 Holomorphe Funktionen

Definition 1.1 Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, heißt komplex differenzierbar oder holomorph in $z_0 \in U$, wenn

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

existiert, und in diesem Fall heißt $f'(z_0)$ die komplexe Ableitung von f an der Stelle z_0 . f heißt holomorph in U , wenn f in allen $z \in U$ holomorph ist.

□

Beispiel:

Die konstante und identische Funktion f , d.h. $f(z) := a \in \mathbb{C}$ und $f(z) := z$, sind holomorph. Da endliche Summen, Produkte und Quotienten holomorpher Funktionen wieder holomorph sind, sind Polynome $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $p(z) := a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und rationale Funktionen p/q für Polynome p, q auf $[q \neq 0]$ holomorph.

Weiter sind Summen von Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ innerhalb des Konvergenzradius holomorph. Z.B. ist $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, und $\exp' = \exp$.

□

Proposition 1.1 Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, ist holomorph in $z_0 \in U$ genau dann, wenn f als Abbildung $U \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ in z_0 reell differenzierbar ist und

$$\partial_y f = i \partial_x f$$

in z_0 erfüllt. Die letzte Gleichung bedeutet, daß der Realteil $u = \operatorname{Re}(f)$ und der Imaginärteil $v = \operatorname{Im}(f)$ die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$\partial_x u = \partial_y v \quad \text{und} \quad \partial_y u = -\partial_x v$$

erfüllen.

Beweis:

Ist f holomorph in z_0 , so gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h|}{|h|} = 0,$$

und f ist in z_0 reell differenzierbar mit reeller Ableitung $Df(z_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$Df(z_0)h = f'(z_0)h.$$

Da $f'(z_0) \in \mathbb{C}$, $e_1 = 1$ und $e_2 = i$ mit $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, folgt

$$\partial_y f(z_0) = Df(z_0)e_2 = f'(z_0) \cdot i = i f'(z_0)1 = i \cdot Df(z_0)e_1 = i \partial_x f(z_0).$$

Schreiben wir $f := u + iv$ mit $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$, so folgt

$$\partial_y u + i\partial_y v = \partial_y f = i\partial_x f = i(\partial_x u + i\partial_x v) = -\partial_x v + i\partial_x u \quad \text{in } z_0,$$

also

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v \quad \text{in } z_0.$$

Sei umgekehrt f reell differenzierbar in z_0 und die Cauchy-Riemann-Gleichungen in z_0 erfüllt, so folgt wie oben $\partial_y f(z_0) = i\partial_x f(z_0)$, also

$$Df(z_0)(\alpha + i\beta) = \partial_x f(z_0)\alpha + \partial_y f(z_0)\beta = \partial_x f(z_0)\alpha + i\partial_x f(z_0)\beta = \partial_x f(z_0)(\alpha + i\beta).$$

Damit rechnen wir

$$\begin{aligned} \limsup_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \partial_x f(z_0) \right| &= \limsup_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0) - \partial_x f(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} \right| = \\ &= \limsup_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - Df(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0, \end{aligned}$$

also

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \partial_x f(z_0) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C},$$

und f ist holomorph in z_0 mit komplexer Ableitung $f'(z_0) = \partial_x f(z_0) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

///

Bemerkung:

Für die Jacobi-Determinante von f sehen wir mit den Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$J_f = \det(Df) = \det \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \partial_x u \partial_y v - \partial_y u \partial_x v = (\partial_x u)^2 + (\partial_x v)^2 = |f'|^2. \quad (1.1)$$

□

Definition 1.2 Für eine stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, mit $f = u + iv$, $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$, definieren wir das komplexe Wegintegral entlang eines stückweise stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ durch

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f \, dz &= \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) := \\ &:= \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy) = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt, \end{aligned}$$

also das Wegintegral über das komplexe Vektorfeld

$$(f, if)^T = (u + iv, -v + iu)^T = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}.$$

□

Proposition 1.2 Für holomorphes $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, erfüllt das komplexe Vektorfeld (f, if) das Integrabilitätskriterium

$$\partial_y f = \partial_x (if).$$

Beweis:

Dies folgt sofort aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen aus Proposition 1.1.

///

Satz 1.1 (Cauchyscher Integralsatz) Für holomorphes $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, ist das komplexe Wegintegral von f wegunabhängig, d.h.

$$\int_{\gamma} f \, dz = 0$$

für alle stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Wege γ in U .

Teil II

Gewöhnliche Differentialgleichungen

4 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Definition 4.1 Eine gewöhnliche Differentialgleichung oder ein gewöhnliches Differentialsystem erster Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$y' = f(., y) \quad (4.1)$$

mit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Eine Lösung von (4.1) ist eine differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem nicht-degenerierten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für alle } t \in I,$$

insbesondere $(t, y(t)) \in \Omega$ für $t \in I$. Für $n = 1$ heißt (4.1) eine skalare Differentialgleichung.

Für $(t_0, y_0) \in \Omega$ heißt y eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(., y),$$

$$y(t_0) = y_0,$$

wenn $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung (4.1) ist und $t_0 \in I$ und $y(t_0) = y_0$.

Entsprechend heißt die Gleichung

$$y^{(k)} = f(., y, y', \dots, y^{(k-1)})$$

eine Differentialgleichung k -ter Ordnung, der Anfangsbedingungen der Form

$$y^{(l)}(t_0) = y_0^l \quad \text{für } l = 0, \dots, k-1$$

hinzugefügt werden können.

□

Bemerkungen:

1. Obige Differentialgleichungen heißen explizite Differentialgleichungen im Gegensatz zu impliziten Differentialgleichungen

$$f(., y, y') = 0.$$

2. Jede Differentialgleichung k -ter Ordnung kann durch Einführen weiterer Variablen $z_l := y^{(l)} \in \mathbb{R}^n, l = 0, \dots, k-1$ in eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$z'_{k-1} = f(., z_0, z_1, \dots, z_{k-1}),$$

$$z'_{k-2} = z_{k-1},$$

$$\dots$$

$$z'_0 = z_1,$$

äquivalent umformuliert werden.

3. Eine Differentialgleichung mit Parameter ist

$$y' = f(., y, \lambda).$$

Dies kann durch Einführen von $z = (y, \lambda)$ in

$$\begin{aligned} y' &= f(., y, \lambda), \\ \lambda' &= 0, \end{aligned}$$

äquivalent umformuliert werden.

□

Beispiele:

1. Die Differentialgleichung

$$y' = y$$

hat $y(t) = \alpha e^t$ als Lösung. Tatsächlich sind dies alle Lösungen, denn für eine Lösung y setzen wir $\varphi(t) := e^{-t}y(t)$ und rechnen

$$\varphi'(t) = -e^{-t}y(t) + e^{-t}y'(t) = 0,$$

also $\varphi \equiv \alpha$ und $y(t) = \alpha e^t$.

2. Für eine Lösung des lineare Anfangswertproblem erster Ordnung

$$y' = ay + b, \quad y(0) = y_0,$$

sehen wir

$$\begin{aligned} \left(y(t) \exp\left(-\int_0^t a(s) \, ds\right) \right)' &= (y'(t) - a(t)y(t)) \exp\left(-\int_0^t a(s) \, ds\right) = \\ &= b(t) \exp\left(-\int_0^t a(s) \, ds\right), \end{aligned}$$

also

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_0^t a(s) \, ds\right) + \int_0^t b(s) \exp\left(\int_s^t a(\tau) \, d\tau\right) \, ds. \quad (4.2)$$

Dies ist tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems, wie man durch Differenzieren verifizieren kann.

3. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f(t)g(y)$$

kann für $g \neq 0$ durch Separation der Variablen

$$y'(t)/g(y(t)) = f(t)$$

wie folgt gelöst werden. Wir wählen F, G mit

$$G' = 1/g, \quad F' = f$$

und sehen

$$\frac{d}{dt}G(y(t)) = y'(t)/g(y(t)) = f(t) = F'(t),$$

also

$$G(y(t)) = F(t) + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Für $g > 0$ sehen wir $G' = 1/g > 0$, und G ist streng monoton wachsend, hat also insbesondere eine Inverse, und die Lösungen der Differentialgleichung sind gegeben durch

$$y(t) = G^{-1}(F(t) + c).$$

4. Die Differentialgleichung

$$y'' = -y$$

hat $y(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t$ als Lösung.

Teil III

Appendix

A Wegunabhängigkeit von Wegintegralen

In diesem Anhang geben wir einen Beweis für die Wegunabhängigkeit von Wegintegralen in einfach zusammenhängenden Gebieten für Vektorfelder, die das Integrabilitätskriterium erfüllen und nur differenzierbar statt stetig differenzierbar sind. Dies wird zum Beweis des Cauchy-Integralsatz, Satz 1.1, verwendet.

Lemma A.1 *Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, differenzierbar und erfülle das Integrabilitätskriterium*

$$\partial_i f_j = \partial_j f_i \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n. \quad (\text{A.1})$$

Dann ist das Wegintegral von f entlang zweier in U homotoper bzw. frei homotoper geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Wege identisch.

Beweis:

Für zwei stückweise stetig differenzierbare, in U homotope Wege $\gamma_j, j = 0, 1$, ist der geschlossene Weg $\gamma_0 \oplus (-\gamma_1)$ nullhomotop in U . Da

$$\int_{\gamma_0} f \, dx - \int_{\gamma_1} f \, dx = \int_{\gamma_0 \oplus (-\gamma_1)} f \, dx$$

und das Integral über konstante Wege verschwindet, genügt es stückweise stetig differenzierbare, geschlossene, in U frei homotope, Wege $\gamma_j, j = 0, 1$, zu betrachten.

Zuerst betrachten wir eine zweifach differenzierbare freie Homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ mit

$$H(0, s) = H(1, s) \quad \text{für } 0 \leq s \leq 1, \quad (\text{A.2})$$

und zeigen

$$\int_{H(.,0)} f \, dx = \int_{H(.,1)} f \, dx. \quad (\text{A.3})$$

Setzen wir $g : I := [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, g_t(t, s) := f(H(t, s))\partial_t H(t, s), g_s(t, s) := f(H(t, s))\partial_s H(t, s), y = (t, s)$, so gilt

$$\int_{H(.,0)} f \, dx = \int_{[(0,0),(1,0)]} g \, dy, \quad \int_{H(.,1)} f \, dx = \int_{[(0,1),(1,1)]} g \, dy,$$

und mit (A.2)

$$\int_{[(0,0),(0,1)]} g \, dy = \int_{[(1,0),(1,1)]} g \, dy.$$

Daher müssen wir zeigen

$$\int_{\partial I} g \, dy = 0. \quad (\text{A.4})$$

g ist differenzierbar und

$$\partial_s g_t = \sum_{i,j=1}^n ((\partial_j f_i) \circ H) \partial_t H_i \partial_s H_j + \sum_{i=1}^n (f_i \circ H) \partial_{st} H_i = \partial_t g_s$$

mit (A.1), also erfüllt g das Integrabilitätskriterium in $\mathbb{R}^2$.

Angenommen (A.4) gilt nicht, also $\eta := |\int_{\partial I} g \, dy| > 0$. Durch halbieren der Seiten des Quadrates I erhalten wir Quadrate $J_1, \dots, J_4$ mit Seitenlänge $1/2$ und

$$\int_{\partial I} g \, dy = \int_{\partial J_1} g \, dy + \int_{\partial J_2} g \, dy + \int_{\partial J_3} g \, dy + \int_{\partial J_4} g \, dy.$$

Also gilt für eines dieser Quadrate $I_1 := J_j$ für ein $j \in \{1, \dots, 4\}$, daß $|\int_{\partial I_1} g \, dy| \geq \eta/4$. Durch Anwenden von obigem Argument auf I_1 erhalten wir sukzessive eine Folge von Quadraten $I_k \subseteq I_{k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit Seitenlänge 2^{-k} und

$$\left| \int_{\partial I_k} g \, dy \right| \geq 4^{-k} \eta. \quad (\text{A.5})$$

Wählen wir $y_k \in I_k$ beliebig, so gilt $|y_{k+1} - y_k| \leq \text{diam } I_k = 2^{-k} \sqrt{2}$, da $y_{k+1} \in I_{k+1} \subseteq I_k$. Dies ergibt $|y_{k+N} - y_k| \leq \sum_{l=1}^N |y_{k+l} - y_{k+l-1}| \leq 2^{1-k} \sqrt{2}$, und $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge, also konvergent, z.B. $y_k \rightarrow y_0$. Da $y_l \in I_l \subseteq I_k$ für $l \geq k$ und I_k abgeschlossen ist, folgt $y_0 = \lim_{l \rightarrow \infty} y_l \in I_k$, also $y_0 \in \bigcap_{k=0}^{\infty} I_k$.

Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit

$$|g(y) - g(y_0) - g'(y_0)(y - y_0)| < \varepsilon |y - y_0| \quad \text{für } |y - y_0| < \delta.$$

Für $2^{-k} \sqrt{2} = \text{diam } I_k < \delta$ gilt $I_k \subseteq B_\delta(y_0)$, da $y_0 \in I_k$, also mit [Sch-a] Proposition 15.3

$$\left| \int_{\partial I_k} \left(g(y) - g(y_0) - g'(y_0)(y - y_0) \right) dy \right| \leq \varepsilon \sup_{y \in I_k} |y - y_0| L(\partial I_k) \leq 4^{1-k} \sqrt{2} \varepsilon.$$

Da g das Integrabilitätskriterium erfüllt, ist $g'(y_0)$ symmetrisch, und die affine Funktion $y \mapsto g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0)$ hat mit

$$y \mapsto \langle g(y_0), y \rangle + \frac{1}{2} y^T g'(y_0) y$$

eine Stammfunktion, also gilt

$$\int_{\partial I_k} \left(y \mapsto g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) \right) dy = 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0,$$

und

$$\left| \int_{\partial I_k} g \, dy \right| \leq 4^{1-k} \sqrt{2} \varepsilon.$$

Für $4\sqrt{2} \varepsilon < \eta$ widerspricht dies (A.5), und wir erhalten (A.4), also (A.3).

Nun betrachten wir zwei stückweise stetig differenzierbaren, geschlossene, in U frei homotope Wege $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow U, j = 0, 1$. Es existiert also eine freie Homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ mit

$$\begin{aligned} H(t, j) &= \gamma_j(t) \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1, j = 0, 1, \\ H(0, s) &= H(1, s) \quad \text{für } 0 \leq s \leq 1. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Da $H([0, 1] \times [0, 1]) \subseteq U$ kompakt ist, existiert $\delta > 0$ mit

$$B_\delta(H(t, s)) \subseteq U \quad \text{für } 0 \leq t, s \leq 1. \tag{A.7}$$

Wir setzen $H(t, s) = H(t, 1)$ für $s \geq 1$ und $H(t, s) = H(t, 0)$ für $s \leq 0$ und weiter $H(t, s) = H(1, s)$ für $t \geq 1$ und $H(t, s) = H(0, s)$ für $t \leq 0$. Damit ist H stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$ fortgesetzt.

Wie am Beginn des Beweises von [Sch-a] Proposition 15.6 sehen wir für $H_{t,h}(t, s) := (1/h) \int_t^{t+h} H(\tau, s) d\tau = (1/h) \int_0^h H(t + \tau, s) d\tau$, daß $H_{t,h}$ und seine partielle Ableitung $\partial_t H_{t,h}$ stetig sind und $H_{t,h} \rightarrow H$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen für $h \rightarrow 0$. Fahren wir sukzessive fort mit

$$\begin{aligned} H_*(t, s) &:= \frac{1}{h_1 h_2} \int_s^{s+h_2} \int_t^{t+h_1} H(\tau, \sigma) d\tau d\sigma, \\ H_1(t, s) &:= \frac{1}{\tilde{h}_1 \tilde{h}_2} \int_s^{s+\tilde{h}_2} \int_t^{t+\tilde{h}_1} H_*(\tau, \sigma) d\tau d\sigma, \end{aligned}$$

so ist $H_1 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zweifach stetig differenzierbar und

$$|H(t, s) - H_1(t, s)| < \delta/3 \quad \text{für } 0 \leq t, s \leq 1 \tag{A.8}$$

für geeignete $h_1, h_2, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 > 0$. Setzen wir $H_2(t, s) = H_1(t, s) - t(H_1(1, s) - H_1(0, s))$, so ist H_2 zweifach stetig differenzierbar mit

$$H_2(0, s) = H_1(0, s) = H_2(1, s) \quad \text{für } 0 \leq s \leq 1 \tag{A.9}$$

und mit (A.6), (A.8)

$$\begin{aligned} |H_1(t, s) - H_2(t, s)| &= t|H_1(1, s) - H_1(0, s)| \leq \\ &\leq |H_1(1, s) - H(1, s)| + |H(0, s) - H_1(0, s)| < 2\delta/3 \quad \text{für } 0 \leq t, s \leq 1, \end{aligned}$$

also

$$|H(t, s) - H_2(t, s)| < \delta \quad \text{für } 0 \leq t, s \leq 1. \tag{A.10}$$

Mit (A.7) folgt $H_2([0, 1] \times [0, 1]) \subseteq U$. Mit (A.3) und (A.9) erhalten wir

$$\int_{H_2(.,0)} f dx = \int_{H_2(.,1)} f dx. \tag{A.11}$$

Mit [Sch-a] Proposition 15.6 kann γ_0 durch zweifach stetig differenzierbare, geschlossene Wege $\bar{\gamma}_k$ mit gleichmäßig beschränktem Gradienten approximiert werden. Mit [Sch-a] Proposition 15.5 gilt

$$\int_{\bar{\gamma}_k} f \, dx \rightarrow \int_{\gamma_0} f \, dx \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \quad (\text{A.12})$$

Setzen wir $\bar{H}_k(t, s) := (1 - s)\bar{\gamma}_k(t) + sH_2(t, 0)$, so ist $\bar{H}_k$ zweifach differenzierbar, da $\bar{\gamma}_k$ zweifach differenzierbar ist, $\bar{H}_k(0, s) = \bar{H}_k(1, s)$ und mit (A.6) und (A.10)

$$|\bar{H}_k(t, s) - H(t, 0)| \leq s|H_2(t, 0) - H(t, 0)| + (1 - s)|\bar{\gamma}_k(t) - \gamma_0(t)| < \delta \quad \text{für } 0 \leq t, s \leq 1$$

und k groß genug, also $\bar{H}_k([0, 1] \times [0, 1]) \subseteq U$ mit (A.7). Da $\bar{H}_k(t, 0) = \bar{\gamma}_k(t)$, $\bar{H}_k(t, 1) = H_2(t, 0)$ für $0 \leq t \leq 1$, folgt mit (A.3)

$$\int_{\bar{\gamma}_k} f \, dx = \int_{\bar{H}_k(., 0)} f \, dx = \int_{\bar{H}_k(., 1)} f \, dx = \int_{H_2(., 0)} f \, dx$$

und weiter mit (A.12)

$$\int_{\gamma_j} f \, dx = \int_{H_2(., j)} f \, dx$$

zuerst für $j = 0$ und genauso für $j = 1$.

Mit (A.11) erhalten wir

$$\int_{\gamma_0} f \, dx = \int_{\gamma_1} f \, dx,$$

und das Lemma ist bewiesen.

///

Literatur

- [Ah] Ahlfors, L.V., (1979) Complex Analysis, McGraw-Hill, New York.
- [Re] Reid, W.T., (1971) Ordinary differential equations, Wiley, New York.
- [Ru] Rudin, W.T., (1966) Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York.
- [Sch-a] Schätzle, R., (2013) Analysis I+II, Vorlesungsskript Universität Tübingen.
- [Sch-b] Schätzle, R., (2024) Analysis III, Vorlesungsskript Universität Tübingen.