Kurzbeschreibung der Vorträge zum Proseminar

Markov-Ketten

Sommersemester 2025

Stand: 7. Januar 2025

Prof. Dr. Martin Möhle

1. Vortrag:

Thema:

Wahrscheinlichkeitsräume, bedingte Wahrscheinlichkeit, Bayessche Formel und Unabhängigkeit von Ereignissen

Literatur:

Brémaud [4]
Klenke [9]

Inhalt:

a) Definition eines Messraumes $(\Omega, \mathcal{F})$ und eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, insbesondere einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ und eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P, Stetigkeit von P von oben und unten (mit Beweis)

b) Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$, Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und Bayes'sche Regel (mit Beweis und mindestens einem Beispiel) (siehe Brémaud, Seiten 9 bis 11 oder Klenke, Seite 174)

d) Unabhängigkeit von zwei Ereignissen, endlich vielen Ereignissen und von beliebig vielen Ereignissen (siehe Brémaud, Seiten 7 bis 9 oder Klenke, Seite 51)

Ergänzende Literatur:

Zu den Begriffen Stetigkeit von unten bzw. oben: z.B.: Klenke, Seite 16-17

Weitere Details zu den behandelten Begriffen findet man im Buch von Bauer, z.B. Seiten 2 bis 10

Hinweise:

Im Vortrag sollten die Begriffe präzise (ohne Einführung bzw. Verwendung von Zufallsvariablen) definiert werden. Präzise heißt nicht unbedingt ausführlich. Man sollte sich also knapp halten und Dinge nicht unnötig wiederholen. Dieser Ratschlag gilt für alle Vorträge

2. Vortrag:

Thema:

Zufallsvariable, Verteilung einer Zufallsvariablen, Erwartungswert und Varianz, Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Literatur:

Bauer [1], 1.2
Bauer [2]
Brémaud [4], Seiten 7-8
Klenke [9], Seite 43, Seiten 103 bis 104

Inhalt:

a) Definition einer Zufallsvariablen als messbare Abbildung $X : \Omega \to \Omega'$, wobei $(\Omega, \mathcal{F})$ und $(\Omega', \mathcal{F}')$ zwei Messräume sind.

b) Verteilung P_X von X: Definition und Nachweis, dass P_X ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

c) Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

d) Definition des Erwartungswertes $\mathrm{E}(X) := \int X \,\mathrm{d}P$ mit Hilfe des Lebesgue-Integrals. Dabei knapp aber präzise auf die Definition (und Existenz) des Lebesgue-Integrals $\int X \,\mathrm{d}P$ eingehen.

e) Varianz von X (Definition und Interpretation), Formel $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$

3. Vortrag:

Thema:

Markov-Ketten, Übergangswahrscheinlichkeiten, stochastische Matrizen und endlichdimensionale Verteilungen

Literatur:

Brémaud [4] Chung [5], §I.2
Fritz, Huppert und Willems [7]

Inhalt:

a) Definition einer Markov-Kette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und der Markov-Eigenschaft, zeitlich homogene (stationäre) Markov-Kette

b) Zustandsraum S

c) (1-Schritt-)Übergangswahrscheinlichkeiten π_{ij}, Übergangsmatrix $\Pi = (\pi_{ij})_{i,j \in S}$

d) Stochastische Matrix (siehe z.B. Fritz, Huppert, Willems, Definition 1.2)

e) Endlichdimensionale Verteilungen einer Markov-Kette

f) Beispiele, etwa die (symmetrische und asymmetrische) Irrfahrt, weitere Beispiele findet man auch in Brémaud ab Seite 59)

Ergänzende Literatur:

Weiterführende Aussagen über stochastische Matrizen, z.B. über deren Eigenwerte und der Konvergenz der n-ten Potenzen stochastischer Matrizen, findet man im Buch von Fritz, Huppert und Willems [7]

4. Vortrag:

Thema:

Eindeutigkeitssatz für Markov-Ketten

Literatur:

Bauer [1]
Brémaud [4]
Chung [5], §I.2

Inhalt:

a) Definition einer Familie $(P_J)_{J \in H(I)}$ konsistenter (projektiver) Wahrscheinlichkeitsmaße, Kolmogoroffscher Fortsetzungssatz (ohne Beweis), projektiver Limes

b) Nachweis, dass die Wahrscheinlichkeitsstruktur eines stochastischen Prozesses $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch seine endlichdimensionalen Verteilungen eindeutig bestimmt ist.

c) Nachweis, dass die Verteilung einer Markov-Kette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ vollständig bestimmt ist, wenn man die Startverteilung $\pi^{(0)} := P_{X_0}$ und die Übergangsmatrix Π kennt (siehe z.B. Brémaud, Seite 57, Theorem 1.1 oder

Hinweise: Zur Definition der Konsistenz einer Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen siehe z.B. Bauer [1], Seite 300, Definition 35.2. Der Kolmogoroffsche Fortsetzungssatz (auch Konsistenzsatz von Daniell und Kolmogoroff genannt) soll sauber formuliert, aber nicht bewiesen werden. Man findet diesen Satz z.B. im Buch von Bauer [1], Seite 301, Theorem 35.3.

5. Vortrag:

Thema:

Existenzsatz für Markov-Ketten

Literatur:

Chung [5]

Inhalt:

a) Nachweis, dass zu jedem Wahrscheinlichkeitsvektor $\pi^{(0)} = (\pi_i^{(0)})_{i \in S}$ und jeder stochastischen Matrix $\Pi = (\pi_{ij})_{i,j \in S}$ eine Markov-Kette $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ existiert, so dass $\pi^{(0)}$ die Startverteilung von X ist, d.h. $\pi_i^{(0)} = P(X_0 = i)$ für alle $i \in S$, und Π die Übergangsmatrix von X ist (siehe Chung, Seite 7, Theorem 1).

b) Beispiel für eine Markov-Kette mit abzählbar unendlichem Zustandsraum, z.B. das Beispiel auf Seite 10 in Chung (Markov-Kette mit unabhängigen Zuwächsen). Weitere Beispiele nur, falls genügend Zeit vorhanden ist.

Hinweise: Der Beweis der Existenzaussage in Teil a) gelingt durch Konstruktion des kanonischen Prozesses (siehe Beweis in Chung auf den Seiten 7 und 8). Der Kolmogoroffsche Fortsetzungssatz wurde bereits in Vortrag 4 behandelt und darf bzw. soll ohne Beweis verwendet werden.

6. Vortrag:

Thema:

Mehrschrittübergangswahrscheinlichkeiten
und Chapman-Kolmogoroff-Formeln

Literatur:

Chung [5]

Inhalt:

a) n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten $\pi_{ij}^{(n)} := P(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$, siehe Chung, Seite 8, Gleichung (5).

b) Chapman-Kolmogoroff-Formel mit Beweis (siehe Chung, Seite 9), Kolmogoroffsche Vorwärts- und Rückwärtsgleichungen

c) Nachweis, dass die Matrix $(\pi_{ij}^{(n)})_{i,j \in S}$ gleich der n-ten Potenz Π^n der Übergangsmatrix ist, siehe Chung, Seite 9.

Hinweise:

Im Gegensatz zur Vorgehensweise in Chung soll Formel (5) auf Seite 8 in Chung als Definition für die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten verwendet werden und dann die Chapman-Kolmogoroff-Formel (6) bewiesen werden.

7. Vortrag:

Thema:

Erreichbare, kommunizierende und absorbierende Zustände sowie irreduzible Markov-Ketten

Literatur:

Brémaud [4]
Chung [5]
Norris [10]

Inhalt:

a) Definition der Begriffe „Zustand j ist vom Zustand i aus erreichbar" ($i \to j$) und „Zustände i und j sind kommunizierend" ($i \leftrightarrow j$).

b) Nachweis, dass $\leftrightarrow$ eine Äquivalenzrelation auf S ist.

c) Einführung der Klassen $C(i)$ kommunizierender Zustände

d) Definition einer irreduziblen Markov-Kette

e) Definition eines absorbierenden Zustandes i.

f) Beispiel(e)

Hinweise: Die meisten der oben genannten Begriffe findet man in allen gebräuchlichen Büchern über Markov-Ketten. Man schaue sich insbesondere Brémaud (Seiten 71 bis 72), Chung (Seite 11) und Norris (Seite 11) an und stelle den Vortrag entsprechend zusammen. Dort findet man auch zahlreiche Beispiele.

Ergänzende Literatur:

Weitere Beispiele endlicher Markov-Ketten findet man auch im Buch Kemeny und Snell ab Seite 27

8. Vortrag:

Thema:

Periode und das Frobenius-Lemma

Literatur:

Brémaud [4]
Chung [5]
Woess [11]

Inhalt:

a) Definition der Periode $\lambda(i)$ eines Zustandes $i \in S$ (siehe z.B. Brémaud, Seite 74 oder Chung, Seite 12 oder Woess, Seite 36, Definition 2.19).

b) Nachweis der Klasseneigenschaft der Periode (siehe z.B. Brémaud, Seite 74, Theorem 2 oder Chung, Seite 12, Theorem 2).

c) Frobenius-Lemma (mit Beweis): Seien $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. Setze $\lambda := \mathrm{ggT}(n_1, \ldots, n_k)$. Dann gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq m_0$ Zahlen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}_0$ existieren mit $m\lambda = \sum_{j=1}^{k} a_j n_j$.

d) Nachweis von $\pi_{ii}^{(m\lambda(i))} > 0$ für alle hinreichend großen m. Im Fall $\pi_{ji}^{(l)} > 0$ auch Nachweis von $\pi_{ji}^{(l+m\lambda(i))} > 0$ für alle hinreichend großen m (siehe Chung, Seite 12, Theorem 3)

e) Aufteilung von $C(i)$ in Restklassen $C_r(i)$, $r \in \{0, 1, \ldots, \lambda(i) - 1\}$, modulo $\lambda(i)$ (vgl. Chung, Seite 13, Theorem 4).

f) Beispiel(e): Des Spielers Ruin und/oder andere geeignete Beispiele. Diverse Beispiele findet man auf den Seiten 23 bis 26 in Chung.

Hinweise: Im Gegensatz zur Notation in Chung verwenden wir $\lambda(i)$ (statt d_i) als Notation für die Periode eines Zustandes $i \in S$. In Chung steht „by an elementary result from number theory“. Damit ist das Frobenius-Lemma gemeint. Ein Beweis des Frobenius-Lemmas steht (implizit) auf Seite 37 in Woess [11].

9. Vortrag:

Thema:

Rekurrenz und Transienz (Teil 1)

Literatur:

Brémaud [4]
Chung [5]
Feller [6]
Woess [11]

Inhalt:

a) Zeit τ_{ij}, welche die Markov-Kette von i nach j benötigt. Verteilung $f_{ij}^{(n)}$ von τ_{ij} (siehe Chung, Seite 16).

b) Definition der Rekurrenz eines Zustandes i mit Hilfe von $f_{ii}^* := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_{ii}^{(n)}$.

c) Nachweis der Formel $\pi_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} \pi_{jj}^{(n-k)}$.

   (siehe z.B. Chung, Seite 21, Theorem 2 oder Feller, Volume 1, Seite 388, Gleichung (5.3))

d) Einführung der erzeugenden Funktionen $\Pi_{ij}(s) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \pi_{ij}^{(n)} s^n$ und $F_{ij}(s) := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_{ij}^{(n)} s^n$ und Herleitung der Formel $\Pi_{ij}(s) - \delta_{ij} = F_{ij}(s)\Pi_{jj}(s)$, $i, j \in S$. Insbesondere $\Pi_{ii}(s) = 1/(1 - F_{ii}(s))$.

e) Rekurrenzkriterium: Ein Zustand i ist genau dann rekurrent, wenn $\Pi_{ii}^* := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \pi_{ii}^{(n)} = \infty$. Zum Beweis darf das Abelsche Lemma der Analysis (ohne Beweis) verwendet werden. (siehe z.B. Chung, Seite 22, Theorem 4 oder Feller, Seite 389, Theorem (i))

Ergänzende Literatur:

Zur Definition von Rekurrenz und Transienz siehe auch Breiman [3], Seite 139, Definition 7.24.

Zum Abelschen Lemma (bzw. Abelschen Theorem) siehe z.B. Brémaud, Seite 419, Theorem 1.2.

Zu d): Die erzeugenden Funktionen Π_{ij} und F_{ij} werden (mit anderer Notation) insbesondere auch in Woess [11] ab Seite 17 (Abschnitt D) verwendet.

10. Vortrag:

Thema:

Rekurrenz und Transienz (Teil 2)

Literatur:

Breiman [3]
Chung [5]
Feller [6]
Woess [11]

Inhalt:

a) Nachweis, dass Rekurrenz und Transienz Klasseneigenschaften sind.

   (siehe z.B. Chung, Seite 19, Corollary 2 oder Feller, Seite 391, Theorem 1)

b) Nachweis, dass die Periode $\lambda(i)$ eines Zustandes $i \in S$ gleich dem g.g.T. aller Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $f_{ii}^{(n)} > 0$ ist.

   (siehe z.B. Chung, Seite 27, Lemma)

c) Beispiel: Irrfahrt in $\mathbb{Z}$. Rekurrenz der symmetrischen Irrfahrt und Transienz der asymmetrischen Irrfahrt, Berechnung der (im Vortrag 9 eingeführten) Funktion $s \mapsto \Pi_{00}(s)$ und von Π_{00}^*

   (siehe z.B. Chung, Seite 23, Example 1 oder Woess, Seite 46, Example 3.5)

d) Definition der Nullrekurrenz eines Zustandes i mit Hilfe des Erwartungswertes $\mu_i := \mathrm{E}(\tau_{ii})$ der Rückkehrzeit τ_{ii}.

   (siehe z.B. Breiman, Seite 140, Definition 7.26 oder Feller, Seite 388, Definition 2)

e) Beispiel: Nullrekurrenz der symmetrischen Irrfahrt: Berechnung von $F'_{00}(1)$, wobei $F_{ij}(s)$ (wie) in Vortrag 9 definiert ist.

11. Vortrag:

Thema:

Asymptotik der Mehrschrittübergangswahrscheinlichkeiten

Literatur:

Chung [5]
Feller [6]

Inhalt:

a) Beweis der Formel $\lim_{n\to\infty} \pi_{ii}^{(n)} = 1/\mu_i$ ($= 0$, wenn i nullrekurrent) für jeden rekurrenten aperiodischen Zustand.

   (siehe z.B. Chung, Seite 27, Theorem 1 oder Feller, Seite 393, Theorem)

b) Beweis der Formeln $f_{ij}^* = 1$ und $\Pi_{ij}^* = \infty$ falls i und j kommunizierend sind, d.h. falls $i \leftrightarrow j$.

c) Verallgemeinerung von Teil a): $\lim_{n\to\infty} \pi_{ij}^{(n)} = 1/\mu_j$ ($= 0$, wenn j nullrekurrent) für irreduzible, aperiodische und rekurrente Markov-Ketten.

d) Verallgemeinerung auf den Fall irreduzibler rekurrenter Markov-Ketten mit Periode λ und $j \in C_r(i)$: $\lim_{n\to\infty} \pi_{ij}^{(n\lambda+r)} = \lambda/\mu_j$.

e) Nullrekurrenzkriterium: i nullrekurrent genau dann wenn $\Pi_{ii}^* := \sum_n \pi_{ii}^{(n)} = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \pi_{ii}^{(n)} = 0$.

f) Nachweis, dass Nullrekurrenz und positive Rekurrenz Klasseneigenschaften sind

   (siehe z.B. Chung, Seite 30, Theorem 2)

Ergänzende Literatur:

Den Originalbeweis zu a) bzw. d) findet man in

Erdös, P., Feller, W. and Pollard, H. (1949) A property of power series with positive coefficients. *Bull. Amer. Math. Soc.* **55**, 201–204.

12. Vortrag:

Thema:

Stationäre Verteilung und Zerlegungssatz

Literatur:

Feller [6]

Inhalt:

a) Definition einer stationären Wahrscheinlichkeitsverteilung $\varrho = (\varrho_i)_{i \in S}$.

(siehe z.B. Feller, Definition auf Seite 394)

b) Stationäre Verteilung für irreduzible Markov-Ketten: Existenz und Eindeutigkeit (mit Formel $\varrho_i = 1/\mu_i$) im (aperiodisch und) positiv rekurrenten Fall. Nicht-Existenz im nullrekurrenten oder transienten Fall.

(siehe z.B. Feller, Theorem auf Seite 393, insbesondere Formel (7.4))

c) Einige Aussagen für endliche Markov-Ketten, z.B. dass solche Markov-Ketten keine nullrekurrenten Zustände besitzen und dass irreduzible endliche Markov-Ketten positiv rekurrent sind.

(siehe z.B. Feller, Seite 392, Theorem 4)

d) Zerlegungssatz für Markov-Ketten: Zerlegung des Zustandsraums S in die Menge R der rekurrenten und die Menge T der transienten Zustände. Zerlegung von R in Klassen kommunizierender Zustände. Beispielhafte Beschreibung der Übergangsmatrix Π bei geeigneter Anordnung der Zustände.

(siehe z.B. Feller, Seite 392, Theorem 3)

Ergänzende Literatur:

Endliche Markov-Ketten werden insbesondere im Buch von Kemeny und Snell [8] betrachtet.

13. Vortrag:

Thema:

Ergodensatz für Markov-Ketten

Literatur:

Norris [10], Abschnitt 1.10, Seiten 52 bis 55

Inhalt:

a) Definition der fast sicheren Konvergenz einer Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen gegen eine Zufallsvariable X, Kurzbezeichnung: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} X$

b) Starkes Gesetz der großen Zahlen für iid (unabhängige und identisch verteilte) Folgen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller integrierbarer Zufallsvariablen (ohne Beweis)

c) Ergodensätze für irreduzible Markov-Ketten $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$: Fast sichere Konvergenz der relativen Anzahl $V_i(n)/n$ der Besuche im Zustand $i \in S$ vor der Zeit n. Fast sichere Konvergenz von $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$ für positiv rekurrente Markov-Ketten und beschränkte Funktionen $f : S \to \mathbb{R}$.

Hinweis:

Der Vortrag soll insbesondere (unter Verwendung des starken Gesetzes der großen Zahlen) präzise Beweise der beiden in c) genannten Konvergenzaussagen vorstellen.

Ergänzende Literatur:

Brémaud [4], Kap. 3, Abschnitte 4.1 und 4.2
Chung [5], §15 (Seiten 85 bis 93)
Woess [11], Seiten 68 bis 74, insbesondere Seite 69, 3.55

Literaturverzeichnis

[1] Bauer, H.: Probability Theory. De Gruyter (1996)

[2] Bauer, H.: Measure and Integration Theory. De Gruyter (2002)

[3] Breiman, L.: Probability. SIAM (1992)

[4] Brémaud, P.: Markov Chains. Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and Queues. Springer (1999)

[5] Chung, K.-L.: Markov Chains with Stationary Transition Probabilities. Springer (1960)

[6] Feller, W.: An Introduction to Probability and Its Applications I, Wiley (1968)

[7] Fritz, F.-J., Huppert, B. und Willems, W.: Stochastische Matritzen. Springer (1979)

[8] Kemeny, J. G. and Snell, J. L.: Finite Markov Chains. Springer (1976)

[9] Klenke, A.: Wahrscheinlichkeitstheorie. 3. Auflage, Springer, (2013)

[10] Norris, J. R.: Markov Chains. Cambridge (1998)

[11] Woess, W.: Denumerable Markov Chains. EMS (2009)