Übungen zur Vorlesung

Algebraische Geometrie und Torische Varietäten

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Sommersemester 2024

Blatt 10

Abgabe: 03.07.2024, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Es sei X eine Prävarietät mit irreduziblen Komponenten $X_1, \ldots, X_r$. Zeige:

(i) Für $x \in X_i \cap X_j$ mit $i \neq j$ ist der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ kein normaler Ring.

(ii) Falls X normal ist, sind $X_1, \ldots, X_r$ genau die Zusammenhangskomponenten von X.

Aufgabe 2. Beweise die Aussage aus Beispiel 6.1.16: Betrachte die algebraischen Mengen

$$X \ := \ V(z_1 z_2 - z_3 z_4) \ \subseteq \ \mathbb{K}^4, \qquad Y \ := \ V(z_1, z_3) \ \subseteq \ X$$

und zeige, dass Y nicht als Nullstellenmenge einer Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ realisiert werden kann.

Aufgabe 3. Es seien X eine irreduzible normale Varietät, $Y \subseteq X$ ein Primdivisor und $f \in \mathcal{O}_{X,Y}$. Weiter seien $U \subseteq X$ eine affine offene Menge mit $U \cap Y \neq \emptyset$ und $g \in \mathcal{O}(U)$ mit $I_U(Y \cap U) = \langle g \rangle$. Zeige: Es gilt $\mathrm{ord}_Y(f) = \max(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ ; \ g^n \mid f)$.

Aufgabe 4. Es seien X eine irreduzible Prävarietät und $Z \subseteq Y \subseteq X$ irreduzible abgeschlossene Teilmengen. Beweise folgende Aussagen:

(i) Man hat kanonische Inklusionen $\mathcal{O}_{X,Z} \subseteq \mathcal{O}_{X,Y} \subseteq \mathcal{O}_{X,X} = \mathbb{K}(X)$.

(ii) Es gilt $\mathcal{O}_{X,Z} = \bigcap_{Z \subseteq Y'} \mathcal{O}_{X,Y'}$ wobei $Y' \subseteq X$ alle irreduziblen abgeschlossenen Mengen durchläuft.