Übungen zur Vorlesung

Algebraische Geometrie und Torische Varietäten

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Sommersemester 2024

Blatt 9

Abgabe: 26.06.2024, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Es seien X und X' irreduzible Varietäten. Beweise die beiden folgenden Aussagen:

(i) Ist X vollständig und $X \subseteq X'$ eine offene Inklusion, so gilt bereits $X = X'$.

(ii) Ist $\emptyset \neq X \subseteq X'$ eine offene Inklusion mit $X \neq X'$, so ist X keine vollständige Varietät.

Gelten die beiden Aussagen noch, falls X' eine Prävarietät, d.h. nicht notwendig separiert, ist?

Aufgabe 2. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_k \in V$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Familie $(v_1, \ldots, v_k)$ ist linear abhängig.

(ii) Es gilt $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = 0 \in \bigwedge^k V$.

Aufgabe 3. Es seien $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^n$. Zeige:

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \det(v_1, \ldots, v_n)\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n.$$

Aufgabe 4. Es sei $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) \neq 2$ und $V = \mathbb{K}^4$. Weiter bezeichne $e_i \in \mathbb{K}^4$ den i-ten Einheitsvektor und es sei $\omega \in \bigwedge^2 V$ gegeben mit der Entwicklung

$$\omega \quad = \sum_{1 \le i < j \le 4} a_{ij} e_i \wedge e_j.$$

Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Es gilt $\omega = v_1 \wedge v_2$ mit $v_1, v_2 \in V$.

(ii) Es gilt $\omega \wedge \omega = 0 \in \bigwedge^4 V$.

(iii) Es gilt $a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0$.

Folgere weiterhin, dass $G(2,4) \cong V_{\mathbb{P}_5}(T_0T_1 + T_2T_3 + T_4T_5)$ gilt.