Übungen zur Vorlesung

Algebraische Geometrie und Torische Varietäten

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Sommersemester 2024

Blatt 8

Abgabe: 19.06.2024, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Es sei $F\colon V' \to V$ eine injektive lineare Abbildung endlichdimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorräume. Zeige folgende Aussage: Ist Σ ein Fächer in V, so ist $\Sigma' := \{F^{-1}(\sigma);\ \sigma \in \Sigma\}$ ein Fächer in V'.

Aufgabe 2. Bestimme den von den Konvergenzkegeln $\sigma(\overline{X_A} \cap U_i)$ erzeugten Fächer $\Sigma(\overline{X_A})$ aus Satz 4.4.21 explizit für die Matrizen

$$A \ = \ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad\qquad A \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Zeige: Die Aufblasung $\mathrm{Bl}(n)$ von $\mathbb{K}^n$ im Nullpunkt wird zu einer torischen Varietät $(\mathrm{Bl}(n), \mathbb{T}^n, \mathbf{1})$ durch

$$t \cdot (z, [w]) \ := \ ((t_1 z_1, \ldots, t_n z_n), [t_1 w_1, \ldots, t_n w_n]), \qquad \mathbf{1} \ := \ ((1, \ldots, 1), [1, \ldots, 1]).$$

Bestimme die Konvergenzfächer für $\mathrm{Bl}(2)$ und $\mathrm{Bl}(3)$. Stelle eine Vermutung für den allgemeinen Fall $\mathrm{Bl}(n)$ auf.

Aufgabe 4. Es sei $Y := V(T_1T_2 - T_3^2) \subseteq \mathbb{K}^3$. Zeige: Es gilt $Y^{\mathrm{sing}} = \{0\}$. Untersuche die eigentliche Transformierte $\widetilde{Y} \subseteq \mathrm{Bl}(3)$ von Y auf Singularitäten.