Übungen zur Vorlesung

Algebraische Geometrie und Torische Varietäten

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Sommersemester 2024

Blatt 7

Abgabe: 12.06.2024, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Es seien $0 \neq \mu, \nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Das Binom $T^\nu - T^\mu \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ ist prim.

(ii) T^ν, T^μ sind teilerfremd und $(\nu_1 - \mu_1, \ldots, \nu_n - \mu_n)$ sind teilerfremd.

Aufgabe 2. Es seien $0 \neq \mu, \nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ mit $T^\nu - T^\mu \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ prim und $X := V(T^\nu - T^\mu)$. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $0 \in X$ ist ein glatter Punkt.

(ii) Es gilt $X \cong \mathbb{K}^{n-1}$.

Aufgabe 3. Es seien $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{Z})$ und $\overline{X_A} \subseteq \mathbb{P}_m$ wie in Konstruktion 4.2.13. Zeige: Der affine Kegel über X ist gegeben durch $X_{\overline{A}} \subseteq \mathbb{K}^{m+1}$, wobei

$$\overline{A} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(m+1, n+1; \mathbb{Z}).$$

Weiter lässt sich der torische Morphismus $(\pi, \widetilde{\pi})$ aus Bemerkung 4.2.12 zu einem torischen Morphismus von $(X_{\overline{A}}, \mathbb{T}^{k+1}, \mathbf{1}_{n+1})$ auf $(\overline{X_A}, \mathbb{T}^k, [\mathbf{1}_{n+1}])$ einschränken.

Aufgabe 4. Bestimme Erzeugende für den Dualkegel des von folgenden Vektoren in $\mathbb{Q}^3$ erzeugten Kegels:

$$v_1 := (1,0,0), \qquad v_2 := (0,1,0), \qquad v_3 := (1,0,1), \qquad v_4 := (0,1,1).$$