Übungen zur Vorlesung

Algebraische Geometrie und Torische Varietäten

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Sommersemester 2024

Blatt 6

Abgabe: 05.06.2024, 14:00 Uhr (Postfach im C-Bau, 3. Stock)

Aufgabe 1. Es sei X Prävarietät. Zeige: Besitzen je zwei Punkte von X eine gemeinsame affine offene Umgebung, so ist X separiert. Kombiniere dies mit Aufgabe 4 von Blatt 2 zu einem Beweis der Separiertheit von $\mathbb{P}_n$.

Aufgabe 2. Es sei X eine Quadrik vom Rang 4 in $\mathbb{P}_3$. Zeige: Es gilt $X \cong \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$.
Hinweis: Betrachte die Segre-Einbettung.

Aufgabe 3. Bestimme sämtliche Bahnen der beiden folgenden affinen torischen Varietäten:

(i) $V(T_0T_1 - T_2^2) \subseteq \mathbb{K}^3$ (ii) $V(T_0T_1 - T_2T_3) \subseteq \mathbb{K}^4$

Aufgabe 4. Es seien (X, T, x_0) und (X', T', x_0') (affine) torische Varietäten. Zeige:

(i) Die algebraische Gruppe $T \times T'$ ist ein algebraischer Torus.

(ii) Durch $(t, t') \cdot (x, x') := (t \cdot x, t' \cdot x')$ wird eine algebraische Operation von $T \times T'$ auf $X \times X'$ definiert.

(iii) Das Tripel $(X \times X', T \times T', (x_0, x_0'))$ ist eine (affine) torische Varietät.

(iv) Zusammen mit den kanonischen Projektionen auf X, X' und T, T' bildet das Tripel $(X \times X', T \times T', (x_0, x_0'))$ ein Produkt in der Kategorie der (affinen) torischen Varietäten.