KONVEXE POLYEDER:
ELEMENTARE GRUNDLAGEN

JÜRGEN HAUSEN UND PAUL WEISS

Entwurf, Stand 26. Juni 2024

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlegende Konzepte 3

1.1. Lineare Algebra 3

Linearkombinationen, lineare Hülle, lineare Unterräume, Durchschnitte, Summen, Bilder, Urbilder, Linearformen, Dualraum

1.2. Affine Hülle und affine Unterräume 7

Affinkombinationen, affine Unterräume, affine Hülle, Durchschnitt, Summe, affine Abbildungen, Bild, Urbild, Affinformen

1.3. Positive Hülle und konvexe Kegel 11

Positivkombinationen, konvexe Kegel, positive Hülle, Durchschnitt, Summe, Bild, Urbild, Positivort von Linearformen, Dualkegel

1.4. Konvexe Hülle, konvexe Mengen und Polyeder 15

Konvexkombinationen, konvexe Hülle, konvexe Mengen, Durchschnitt, Summe, Bild, Urbild, Positivort von Affinformen, konvexe Polyeder

2. Polyedrische konvexe Kegel 19

2.1. Polyedrische Kegel 1 19

Endlich erzeugte Kegel, polyedrische Kegel, Charakterisierung als Bilder bzw. Urbilder von Orthanten, Satz von Hahn-Banach, Dualitätssatz

2.2. Polyedrische Kegel 2 23

Fourier-Motzkin-Elimination, Äquivalenz von endlich erzeugt und polyedrisch für konvexe Kegel

2.3. Seiten polyedrischer Kegel 27

Seiten polyedrischer Kegel, Verbandsstruktur auf der Menge aller Seiten eines polyedrischen Kegels

2.4. Das relative Innere 31

Relatives Inneres eines polyedrischen Kegels, verschiedene Charakterisierungen und Existenz innerer Punkte

2.5. Spitze Kegel 35

Spitze Kegel, Extremalstrahlen, minimale Seite, Projektion auf einen spitzen Kegel

2.6. Die Seiten des Dualkegels 39

Korrespondenz der Seitenverbände eines polyedrischen Kegels und seines Dualkegels, Existenz von Seiten

2.7. Simpliziale Kegel 43

Simpliziale Kegel, Seiten simplizialer Kegel, Überdeckung eines spitzen Kegels durch simpliziale Teilkegel

3. Konvexe Polyeder und Polytope 47

3.1. Polytope und Polyeder 1 47

Polytope, Parallelotope, Kreuzpolytope, Polyeder, Beschränktheit, Rezessionskegel

3.2. Polytope und Polyeder 2 51

Homogenisierungskegel eines nichtleeren Polyeders, Polytope sind nichtleere beschränkte Polyeder

3.3. Polytope und Polyeder 3 55

Polyeder als Summen von Polytopen und polyedrischen konvexen Kegeln, Seitenverband eines Polyeders

Literatur 59

1. Grundlegende Konzepte

1.1. **Lineare Algebra.**

Im gesamten Text steht $\mathbb{K}$ für einen Unterkörper des Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, beispielsweise für den Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Für $\xi \in \mathbb{K}$ setzen wir

$$\mathbb{K}_{\geq \xi} \ := \ \{a \in \mathbb{K};\ a \geq \xi\}, \qquad \mathbb{K}_{> \xi} \ := \ \{a \in \mathbb{K};\ a > \xi\}.$$

Insbesondere bezeichnen dann $\mathbb{K}_{\geq 0}$ die Menge aller nicht negativen Zahlen aus $\mathbb{K}$ und $\mathbb{K}_{>0}$ die Menge aller strikt positiven Zahlen aus $\mathbb{K}$.

Weiter setzen wir von allen im Text auftauchenden $\mathbb{K}$-Vektorräumen voraus, dass sie endlichdimensional sind.

Erinnerung 1.1.1. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Eine *Linearkombination über* S ist ein Vektor $v \in V$ der Form

$$v \ = \ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i, \quad v_1, \ldots, v_r \in S, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}.$$

Die *lineare Hülle über* S ist die Menge $\mathrm{Lin}(S) \subseteq V$ aller Linearkombinationen über S. Man setzt $\mathrm{Lin}(\emptyset) := \{0_V\}$.

Erinnerung 1.1.2. Eine nichtleere Teilmenge V_0 eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V heißt *Untervektorraum* (auch *linearer Unterraum*, in Zeichen $V_0 \subseteq_{\mathrm{lin}} V$), falls für alle $v_1, v_2 \in V_0$ jede Linearkombination $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ in V_0 liegt.

Aufgabe 1.1.3. Es sei V_0 eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$. Was bedeutet "*für je zwei* $v_1, v_2 \in V_0$ *liegt jede Linearkombination* $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ *in* V_0" geometrisch? Veranschauliche die Situation anhand geeigneter Beispiele.

Definition 1.1.4. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $S_1, \ldots, S_r \subseteq V$ nichtleere Teilmengen. Die *Summe* über $S_1, \ldots, S_r$ ist

$$S_1 + \ldots + S_r \ := \ \{v_1 + \ldots + v_r;\ v_1 \in S_1, \ldots, v_r \in S_r\} \ \subseteq \ V.$$

Satz 1.1.5. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Ist $(V_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Untervektorräumen von V, so ist auch der Durchschnitt ein Untervektorraum:*

$$\bigcap_{i \in I} V_i \ \subseteq_{\mathrm{lin}} \ V.$$

(ii) *Für jede Teilmenge $S \subseteq V$ ist $\mathrm{Lin}(S) \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $S \subseteq \mathrm{Lin}(S)$. Genauer gilt*

$$\mathrm{Lin}(S) \ = \ \bigcap_{\substack{V_0 \subseteq_{\mathrm{lin}} V \\ S \subseteq V_0}} V_0,$$

d.h., $\mathrm{Lin}(S)$ ist der bezüglich Inklusion kleinste Untervektorraum von V, der S enthält.

(iii) *Sind $V_1, \ldots, V_r \subseteq V$ Untervektorräume, so ist die Summe $V_1 + \ldots + V_r \subseteq V$ ebenfalls ein Untervektorraum.*

(iv) *Ist $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$-Vektorräumen, so gilt stets*

$$V_0 \subseteq_{\mathrm{lin}} V \ \Rightarrow \ \varphi(V_0) \subseteq_{\mathrm{lin}} W, \qquad W_0 \subseteq_{\mathrm{lin}} W \ \Rightarrow \ \varphi^{-1}(W_0) \subseteq_{\mathrm{lin}} V.$$

Erinnerung 1.1.6. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine *Linearform* auf V ist eine lineare Abbildung $V \to \mathbb{K}$. Der *Dualraum* von V ist

$$V^* \ := \ \mathrm{LF}(V) \ := \ \mathrm{Hom}(V,\mathbb{K}) \ = \ \{u\colon V \to \mathbb{K};\ u \text{ ist linear}\}.$$

Zusammen mit der punktweisen Addition und der punktweisen Skalarmultiplikation wird V^* zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum: Man definiert

$$(u+u')(v) \ := \ u(v)+u'(v), \qquad (au)(v) \ := \ au(v).$$

Ist eine Basis $\mathcal{B} = (v_1,\ldots,v_n)$ für V gegeben, so ist die zugehörige *duale Basis* $\mathcal{B}^* = (v_1^*,\ldots,v_n^*)$ für V^* definiert durch

$$v_i^*\colon V \ \to \ \mathbb{K}, \qquad v_j \ \mapsto \ \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \ne j, \end{cases}$$

d.h., man schreibt die Werte der v_i^* auf $v_1,\ldots,v_n$ vor. Für jede Linearform $u = a_1v_1^* + \ldots + a_nv_n^* \in V^*$ und jedes $v = b_1v_1 + \ldots + b_nv_n \in V$ hat man

$$u(v) \ = \ \left(\sum_i a_iv_i^*\right)\left(\sum_j b_jv_j\right) \ = \ \sum_{i,j} a_ib_jv_i^*(v_j) \ = \ a_1b_1 + \ldots + a_nb_n.$$

Der Wert von u auf v ist somit das Standarskalarprodukt ihrer Koordinatenvektoren bezüglich $\mathcal{B}^*$ und $\mathcal{B}$. Man verwendet auch die Schreibweisen

$$U := V^*, \qquad u_i := v_i^*, \qquad \langle u,v\rangle := u(v).$$

Details und Beweise zu Dualraum sowie dualen Basen sind im Skriptum zur Linearen Algebra 1 zu finden; siehe [1, Abschnitt 4.4].

Bemerkung 1.1.7. Wir betrachten $\mathbb{K}^n$ mit der Standardbasis $(e_1,\ldots,e_n)$. Jeder Vektor $x \in \mathbb{K}^n$ definiert eine Linearform

$$\mathbb{K}^n \ \to \ \mathbb{K}, \qquad y \ \mapsto \ x(y) := x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Wir dürfen $(\mathbb{K}^n)^*$ auf diese Weise mit $\mathbb{K}^n$ identifizieren. Die zu $(e_1,\ldots,e_n)$ duale Basis ist dann gegeben als

$$(e^1,\ldots,e^n) \ := \ ((1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ (0,\ldots,0,1)).$$

Bemerkung 1.1.8. Es seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und U sein Dualraum. Dann definiert die Vorschrift

$$V \ \mapsto \ U^*, \qquad v \ \mapsto \ [g_v\colon U \to \mathbb{K},\ u \mapsto \langle u,v\rangle]$$

einen Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Auf diese Weise identifiziert man V mit $U^* = (V^*)^*$. Für $u \in U$ und $v \in V$ schreibt man auch

$$v(u) \ := \ \langle u,v\rangle \ := \ u(v).$$

Konstruktion 1.1.9. Es seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und U sein Dualraum. Jede Linearform $0_U \ne u \in U$ definiert eine *lineare Hyperebene* in V:

$$N(u) \ := \ u^\perp \ := \ \mathrm{Kern}(u) \ = \ \{v \in V;\ u(v) = 0\} \ \subseteq \ V.$$

Dabei ist $N(u) \subseteq V$ ein Untervektorraum der Dimension $n-1$. Allgemeiner definiert man die *Nullstellenmenge* von $R \subseteq U$ als

$$N(R) \ := \ \bigcap_{u\in R} N(u) \ = \ \{v \in V;\ u(v) = 0 \text{ für alle } u \in R\} \ \subseteq_{\mathrm{lin}} \ V.$$

Falls $R = \{u_1,\ldots,u_m\}$ gilt mit Linearformen $u_1,\ldots,u_m \in U$, so schreiben wir auch $N(u_1,\ldots,u_m)$ anstelle von $N(R)$.

Bemerkung 1.1.10. Es seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, U sein Dualraum und $V_0 \subseteq V$ ein Untervektorraum.

(i) Nach dem Basisergänzungssatz gibt es eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ für V, sodass $V_0 = \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_k)$ für ein $1 \le k \le n$ gilt.

(ii) Es bezeichne $(u_1, \ldots, u_n)$ die duale Basis zu $(v_1, \ldots, v_n)$. Dann ist der lineare Unterraum $V_0 \subseteq V$ gegeben durch

$$V_0 \;=\; N(u_{k+1}, \ldots, u_n) \;=\; \{v \in V;\; u_j(v) = 0,\; j = k+1, \ldots, n\} \;\subseteq\; V.$$

(iii) Jede Linearform u_0 auf V_0 erlaubt eine Fortsetzung zu einer Linearform u auf V, beispielsweise durch

$$u \;:=\; \langle u_0, v_1 \rangle u_1 + \ldots + \langle u_0, v_k \rangle u_k \;\in\; U.$$

1.2. **Affine Hülle und affine Unterräume.**

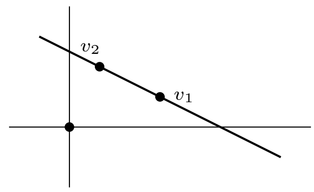
Definition 1.2.1. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Eine *Affinkombination über S* ist ein Vektor $v \in V$ der Form

$$v \ = \ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i, \quad v_1, \ldots, v_r \in S, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_r = 1.$$

Die *affine Hülle über S* ist die Menge $\mathrm{Aff}(S) \subseteq V$ aller Affinkombinationen über S. Man setzt $\mathrm{Aff}(\emptyset) := \emptyset$.

Definition 1.2.2. Eine Teilmenge A eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V heißt *affiner Unterraum* (in Zeichen $A \subseteq_{\mathrm{aff}} V$), falls für je zwei $v_1, v_2 \in A$ jede Affinkombination $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ in A liegt.

Aufgabe 1.2.3. Es sei A eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$. Was bedeutet "*für je zwei $v_1, v_2 \in A$ liegt jede Affinkombination $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ in A*" geometrisch?



Veranschauliche die Begriffe Affinkombination, affine Hülle und affiner Unterraum anhand geeigneter Beispiele bzw. Nicht-Beispiele.

Beispiel 1.2.4. Die affine Hülle über die Standardeinheitsvektoren $e_1, \ldots, e_{n+1}$ in $\mathbb{K}^{n+1}$ ist der affine Unterraum

$$\mathrm{Aff}(e_1, \ldots, e_{n+1}) \ = \ \{x \in \mathbb{K}^{n+1};\ x_1 + \ldots + x_{n+1} = 1\} \ \subseteq \ \mathbb{K}^{n+1}.$$

Lemma 1.2.5. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann gilt $S \subseteq \mathrm{Aff}(S) \subseteq_{\mathrm{aff}} V$.*

Beweis. Für jedes $v \in S$ liegt die Affinkombination $1 \cdot v$ in $\mathrm{Aff}(S)$. Folglich haben wir $S \subseteq \mathrm{Aff}(S)$. Für den Nachweis von $\mathrm{Aff}(S) \subseteq_{\mathrm{aff}} V$ seien $v, v' \in \mathrm{Aff}(S)$ und $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ mit $\lambda + \lambda' = 1$ gegeben. Dann erhalten wir

$$\lambda v + \lambda' v' \ = \ \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \lambda' \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j v'_j \ = \ \sum_{i=1}^{n} \lambda \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda' \lambda'_j v'_j \ \in \ \mathrm{Aff}(S),$$

wobei $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ sowie $v' = \lambda'_1 v'_1 + \ldots + \lambda'_m v'_m$ Darstellungen als Affinkombinationen über S sind und die Koeffizienten $\lambda\lambda_1, \ldots, \lambda\lambda_n, \lambda'\lambda'_1, \ldots, \lambda'\lambda'_m$ sich offensichtlich zu 1 aufsummieren. □

Lemma 1.2.6. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $A \subseteq V$ ein affiner Unterraum. Dann gilt $\mathrm{Aff}(A) = A$.*

Beweis. Die Inklusion "$A \subseteq \mathrm{Aff}(A)$" ergibt sich direkt aus Lemma 1.2.5. Nehmen wir an, es gelte $\mathrm{Aff}(A) \not\subseteq A$. Dann gibt es Affinkombinationen

$$v \ = \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \ \in \ \mathrm{Aff}(A) \setminus A, \qquad \lambda_i \neq 0, \ i = 1, \ldots, n.$$

Es sei v eine solche Affinkombination mit minimaler Länge n. Nach Definition eines affinen Unterraumes gilt $n \geq 3$, und wir dürfen $\lambda_1 \neq 1$ annehmen. Es folgt

$$v' \ := \ \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} v_i \ \in \ A, \qquad\qquad v \ = \ \lambda_1 v_1 + (1 - \lambda_1) v' \ \in \ A,$$

wobei $v' \in \mathrm{Aff}(A)$, somit $v' \in A$ nach Wahl von v und $v \in A$ nach Definition eines affinen Unterraumes gilt. Widerspruch. Also gilt $\mathrm{Aff}(A) \subseteq A$. □

Satz 1.2.7. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie affiner Unterräume von V, so ist auch der Durchschnitt ein affiner Unterraum:*

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq_{\mathrm{aff}} V.$$

(ii) *Für jede Teilmenge $S \subseteq V$ ist $\mathrm{Aff}(S) \subseteq V$ ein affiner Unterraum mit $S \subseteq \mathrm{Aff}(S)$. Genauer gilt*

$$\mathrm{Aff}(S) = \bigcap_{\substack{A \subseteq_{\mathrm{aff}} V \\ S \subseteq A}} A,$$

d.h., $\mathrm{Aff}(S)$ ist der bezüglich Inklusion kleinste affine Unterraum von V, der S enthält.

(iii) *Sind $A_1, \ldots, A_r \subseteq V$ affine Unterräume, so ist die Summe $A_1 + \ldots + A_r$ ebenfalls ein affiner Unterraum von V.*

Beweis. Aussage (i) ist offensichtlich. Zu (ii). Nach Lemma 1.2.5 ist $\mathrm{Aff}(S) \subseteq V$ ein affiner Unterraum mit $S \subseteq \mathrm{Aff}(S)$. Das beweist die erste Aussage. Weiter erhalten wir damit die Inklusion "$\supseteq$" aus der Behauptung: Es gilt

$$\mathrm{Aff}(S) \supseteq \mathrm{Aff}(S) \cap \bigcap_{\substack{A \subseteq_{\mathrm{aff}} V \\ S \subseteq A}} A = \bigcap_{\substack{A \subseteq_{\mathrm{aff}} V \\ S \subseteq A}} A.$$

Für den Nachweis der Inklusion "$\subseteq$" aus der Behauptung sei $A \subseteq_{\mathrm{aff}} V$ mit $S \subseteq A$ gegeben. Lemma 1.2.6 liefert $A = \mathrm{Aff}(A)$. Insbesondere liegt jede Affinkombination über S in A. Wir schließen $\mathrm{Aff}(S) \subseteq A$.

Wir zeigen (iii). Es sei eine Affinkombination $\lambda v + \lambda' v'$ mit $v, v' \in A_1 + \ldots + A_r$ gegeben. Dann gibt es Darstellungen

$$v = v_1 + \ldots + v_r, \quad v' = v_1' + \ldots + v_r', \quad v_i, v_i' \in A_i, \ i = 1, \ldots, r.$$

Insbesondere ist jedes $\lambda v_i + \lambda' v_i'$ eine Affinkombination über A_i und liegt somit in A_i. Es folgt

$$\lambda v + \lambda' v' = (\lambda v_1 + \lambda' v_1') + \ldots + (\lambda v_r + \lambda' v_r') \in A_1 + \ldots + A_r.$$

□

Definition 1.2.8. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Für $S \neq \emptyset$ definiert man die *Verschiebung* von S um $w \in V$ als

$$w + S := \{w\} + S = \{w + v; \ v \in S\} \subseteq V.$$

Die zu S gehörige *Differenzenmenge* ist $D(S) := S - S := \{0\}$ für $S = \emptyset$, und für $S \neq \emptyset$ setzt man

$$D(S) := S - S := \{s' - s; \ s, s' \in S\} \subseteq V.$$

Satz 1.2.9. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

(i) *Es seien $w \in V$ und $V_0 \subseteq_{\text{lin}} V$. Dann ist $A := w + V_0$ ein affiner Unterraum von V, und es gilt $D(A) = V_0$.*
(ii) *Es sei $A \subseteq_{\text{aff}} V$. Dann ist $D(A) \subseteq V$ ein Untervektorraum, und es gilt $A = w + D(A)$ für jedes $w \in A$.*

Beweis. Zu (i). Es seien $v, v' \in A$ und $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ mit $\lambda + \lambda' = 1$ gegeben. Dann haben wir $v = v_0 + w$ und $v' = v_0' + w$ mit $v_0, v_0' \in V_0$. Es folgt

$$\lambda v + \lambda' v' \;=\; \lambda(v_0 + w) + \lambda'(v_0' + w) \;=\; \lambda v_0 + \lambda' v_0' + w \;\in\; A.$$

Somit ist $A = V_0 + w$ ein affiner Unterraum von V. Weiter ist die Differenzenmenge von A gegeben durch

$$D(A) \;=\; \{(v_0' + w) - (v_0 + w);\ v_0', v_0 \in V_0\} \;=\; \{v_0' - v_0;\ v_0', v_0 \in V_0\} \;=\; V_0.$$

Zu (ii). Nach Definition ist $D(A)$ nicht leer. Es seien $v_1, v_2 \in D(A)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ gegeben. Dann gilt $v_i = w_i' - w_i$ mit $w_i', w_i \in A$. Es folgt

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \;=\; (\lambda_1 w_1' + \lambda_2 w_2' + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) w_1) \;-\; ((1 - \lambda_2) w_1 + \lambda_2 w_2)\,.$$

Somit ist $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ eine Differenz von Affinkombinationen über A und liegt gemäß Lemma 1.2.6 in $D(A)$. Das beweist $D(A) \subseteq_{\text{lin}} V$. Für jedes $w \in A$ erhalten wir

$$A \;=\; w + \{v' - w;\ v' \in A\} \;=\; w + \{v'' - v;\ v'', v \in A\} \;=\; w + D(A),$$

wobei wir für "$\supseteq$" in der zweiten Gleichung eine gegebene Differenz $v'' - v$ mit $v'', v \in A$ als $v' - w$ mit $v' := v'' + w - v \in A$ schreiben. □

Definition 1.2.10. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $A \subseteq V$ ein affiner Unterraum. Die *Dimension von A* ist

$$\dim(A) \;:=\; \begin{cases} \dim_{\mathbb{K}}(D(A)), & \text{falls } A \neq \emptyset, \\ -1, & \text{falls } A = \emptyset. \end{cases}$$

Bemerkung 1.2.11. Die nulldimensionalen affinen Unterräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes sind genau seine einpunktigen Teilmengen.

Aufgabe 1.2.12. Veranschauliche die Differenzenmenge $D(A)$ und die Dimension $\dim(A)$ anhand geeigneter Beispiele affiner Unterräume $A \subseteq \mathbb{R}^n$ für $n = 1, 2, 3$.

Definition 1.2.13. Eine Abbildung $F\colon V \to W$ zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W heißt *affin*, falls es eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ und einen Vektor $\beta \in W$ gibt, sodass $F(v) = \varphi(v) + \beta$ für alle $v \in V$ gilt; wir schreiben dann auch $F = \varphi + \beta$.

Bemerkung 1.2.14. Es seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ ist eine affine Abbildung. Eine affine Abbildung $\psi\colon V \to W$ ist genau dann linear, wenn $\psi(0) = 0$ gilt.

Lemma 1.2.15. *Es sei $F\colon V \to W$ eine affine Abbildung zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W. Ist $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$ eine Affinkombination über V, so gilt*

$$F(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r) \;=\; \lambda_1 F(v_1) + \ldots + \lambda_r F(v_r).$$

Beweis. Wir haben $F = \varphi + \beta$ mit einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \to W$ und einem Vektor $\beta \in W$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} F(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r) &= \varphi(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r) + \beta \\ &= \lambda_1 \varphi(v_1) + \ldots + \lambda_r \varphi(v_r) + (\lambda_1 + \ldots + \lambda_r)\beta \\ &= \lambda_1(\varphi(v_1) + \beta) + \ldots + \lambda_r(\varphi(v_r) + \beta) \\ &= \lambda_1 F(v_1) + \ldots + \lambda_r F(v_r). \end{aligned}$$

□

Satz 1.2.16. *Es sei $F\colon V \to W$ eine affine Abbildung zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W.*

(i) *Gilt $A \subseteq_{\mathrm{aff}} V$, so gilt $F(A) \subseteq_{\mathrm{aff}} W$.*
(ii) *Gilt $B \subseteq_{\mathrm{aff}} W$, so gilt $F^{-1}(B) \subseteq_{\mathrm{aff}} V$.*

Beweis. Wir zeigen $F(A) \subseteq_{\mathrm{aff}} W$. Es sei eine Affinkombination $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ über $F(A)$ gegeben. Wegen $w_1, w_2 \in F(A)$ gibt es $v_1, v_2 \in A$ mit $F(v_i) = w_i$. Wegen $A \subseteq_{\mathrm{aff}} V$ gilt $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in A$. Mit Lemma 1.2.15 folgt

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \ = \ F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \ \in \ F(A).$$

Wir zeigen $F^{-1}(B) \subseteq_{\mathrm{aff}} V$. Es sei eine Affinkombination $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ über $F^{-1}(B)$ gegeben. Dann haben wir $w_i := F(v_i) \in B$. Wegen $B \subseteq_{\mathrm{aff}} W$ gilt $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in B$. Mit Lemma 1.2.15 sehen wir dann, dass $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ in $F^{-1}(B)$ liegt:

$$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \ = \ \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \ \in \ B.$$

□

Konstruktion 1.2.17. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine *Affinform* auf V ist eine affine Abbildung $V \to \mathbb{K}$, d.h., eine Abbildung der Gestalt

$$f\colon V \ \to \ \mathbb{K}, \qquad v \ \mapsto \ u(v) + b, \qquad u \in \mathrm{LF}(V), \ b \in \mathbb{K},$$

Punktweise Addition und Skalarmultiplikation machen aus der Menge aller Affinformen auf V den $\mathbb{K}$-Vektorraum

$$\mathrm{AF}(V) \ = \ \{f\colon V \to \mathbb{K};\ f \text{ ist Affinform}\}.$$

Jede nicht-konstante Affinform $f \in \mathrm{AF}(V)$ definiert eine *affine Hyperebene* in V:

$$N(f) \ := \ \{v \in V;\ f(v) = 0\} \ = \ f^{-1}(0) \ \subseteq_{\mathrm{aff}} \ V.$$

Ist allgemeiner eine Teilmenge $R \subseteq \mathrm{AF}(V)$ gegeben, so ist die zugehörige *Nullstellenmenge* gegeben als

$$N(R) \ := \ \{v \in V;\ f(v) = 0 \text{ für alle } f \in R\} \ = \ \bigcap_{f \in R} N(f) \ \subseteq_{\mathrm{aff}} \ V.$$

Gilt $R = \{f_1, \ldots, f_m\}$ mit Affinformen $f_1, \ldots, f_m \in \mathrm{AF}(V)$, so schreiben wir auch $N(f_1, \ldots, f_m)$ anstelle von $N(R)$.

Bemerkung 1.2.18. Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist jeder affine Unterraum $A \subseteq V$ ist von der Gestalt $A = N(f_1, \ldots, f_m)$ mit Affinformen $f_1, \ldots, f_m$ auf V.

1.3. **Positive Hülle und konvexe Kegel.**

Definition 1.3.1. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Eine *Positivkombination über* S ist ein Vektor $v \in V$ der Form

$$v \;=\; \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i, \quad v_1, \ldots, v_r \in S, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}_{\geq 0}.$$

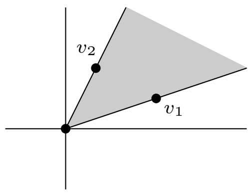
Die *positive Hülle über* S ist die Menge $\mathrm{Pos}(S) \subseteq V$ aller Positivkombinationen über S. Man setzt

$$\mathrm{Pos}(\emptyset) \;:=\; \{0_V\}, \qquad \mathrm{Pos}(v_1, \ldots, v_n) \;:=\; \mathrm{Pos}(S), \quad \text{falls } S = \{v_1, \ldots, v_n\}.$$

Definition 1.3.2. Eine Teilmenge σ eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V heißt *konvexer Kegel* (in Zeichen $\sigma \subseteq_{\mathrm{pos}} V$), falls $\sigma \neq \emptyset$ gilt und für je zwei $v_1, v_2 \in \sigma$ jede Positivkombination $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ in σ liegt.

Bemerkung 1.3.3. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma \subseteq V$ ein konvexer Kegel. Dann gibt es ein $v \in \sigma$, und damit haben wir $0 = 0 \cdot v + 0 \cdot v \in \sigma$.

Aufgabe 1.3.4. Es sei σ eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$. Was bedeutet "*für je zwei $v_1, v_2 \in \sigma$ liegt jede Positivkombination $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ in σ*" geometrisch?



Veranschauliche die Begriffe Positivkombination, positive Hülle und konvexer Kegel anhand geeigneter Beispiele bzw. Nicht-Beispiele.

Beispiel 1.3.5. Der *positive Orthant* $\delta^n := \mathbb{K}^n_{\geq 0} := (\mathbb{K}_{\geq 0})^n \subseteq \mathbb{K}^n$ ist ein konvexer Kegel in $\mathbb{K}^n$. Mit den Standardeinheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\delta^n \;=\; \mathrm{Pos}(e_1, \ldots, e_n).$$

Bemerkung 1.3.6. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann ist jede Positivkombination über S auch eine Linearkombination über S. Insbesondere sind lineare Unterräume stets konvexe Kegel.

Lemma 1.3.7. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma \subseteq V$ ein konvexer Kegel. Dann gilt $\mathrm{Pos}(S) \subseteq \sigma$ für jede Teilmenge $S \subseteq \sigma$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jede Positivkombination $v = \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_r v_r$ über S in σ liegt. Wir verwenden Induktion über r. Für $r \leq 2$ gilt $v \in \sigma$ nach Definition 1.3.2. Zum Induktionsschritt: Die Induktionsannahme liefert $v' := \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_r v_r \in \sigma$. Mit Definition 1.3.2 erhalten wir dann $v = \lambda_1 v_1 + v' \in \sigma$. □

Satz 1.3.8. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Ist $(\sigma_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie konvexer Kegel in V, so ist auch der Durchschnitt ein konvexer Kegel:*

$$\bigcap_{i \in I} \sigma_i \;\subseteq_{\mathrm{pos}}\; V.$$

(ii) *Für jede Teilmenge* $S \subseteq V$ *ist* $\mathrm{Pos}(S) \subseteq V$ *ein konvexer Kegel mit* $S \subseteq \mathrm{Pos}(S)$. *Genauer gilt*

$$\mathrm{Pos}(S) \;=\; \bigcap_{\substack{\sigma \subseteq_{\mathrm{pos}} V \\ S \subseteq \sigma}} \sigma,$$

d.h., $\mathrm{Pos}(S)$ *ist der bezüglich Inklusion kleinste konvexe Kegel in* V*, der* S *enthält.*

(iii) *Sind* $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \subseteq V$ *konvexe Kegel, so ist die Summe* $\sigma_1 + \ldots + \sigma_r \subseteq V$ *ebenfalls ein konvexer Kegel.*

(iv) *Ist* $\varphi\colon V \to W$ *eine lineare Abbildung von* $\mathbb{K}$*-Vektorräumen* V *und* W*, so gilt stets*

$$\sigma \subseteq_{\mathrm{pos}} V \;\Rightarrow\; \varphi(\sigma) \subseteq_{\mathrm{pos}} W, \qquad \tau \subseteq_{\mathrm{pos}} W \;\Rightarrow\; \varphi^{-1}(\tau) \subseteq_{\mathrm{pos}} V.$$

Beweis. Aussage (i) ist offensichtlich. Zu (ii). Für jedes $v \in S$ ist $v = 1 \cdot v$ eine Positivkombination, das bedeutet $v \in \mathrm{Pos}(S)$, und wir erhalten $S \subseteq \mathrm{Pos}(S)$. Sind weiter $v, v' \in \mathrm{Pos}(S)$ gegeben, so haben wir

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r, \quad v' = \lambda_1' v_1' + \ldots + \lambda_s' v_s', \quad v_i, v_j' \in S,\ \lambda_i, \lambda_j' \in \mathbb{K}_{\ge 0}.$$

Damit sehen wir, dass jede Positivkombination $\lambda v + \lambda' v'$ auch eine Positivkombination über den obigen Vektoren $v_i, v_j' \in S$ und somit in $\mathrm{Pos}(S)$ enthalten ist. Also ist $\mathrm{Pos}(S)$ ein konvexer Kegel. Mit Lemma 1.3.7 erhalten wir weiter

$$\mathrm{Pos}(S) \;\subseteq\; \bigcap_{\substack{\sigma \subseteq_{\mathrm{pos}} V \\ S \subseteq \sigma}} \sigma \;=\; \mathrm{Pos}(S) \cap \bigcap_{\substack{\sigma \subseteq_{\mathrm{pos}} V \\ S \subseteq \sigma}} \sigma \;\subseteq\; \mathrm{Pos}(S).$$

Zu (iii). Die Summe $\sigma_1 + \ldots + \sigma_r$ ist offensichtlich nicht leer. Es sei nun $\lambda v + \lambda' v'$ eine Positivkombination über σ. Dann haben wir $v = v_1 + \ldots + v_r$ und $v' = v_1' + \ldots + v_r'$ mit $v_i, v_i' \in \sigma_i$ und erhalten

$$\lambda v + \lambda' v' \;=\; (\lambda v_1 + \lambda' v_1') + \ldots + (\lambda v_r + \lambda' v_r') \;\in\; \sigma_1 + \ldots + \sigma_r.$$

Wir zeigen (iv). Wegen $\sigma \neq \emptyset$ gilt $\varphi(\sigma) \neq \emptyset$. Ist $\lambda w + \lambda' w'$ eine Positivkombination über $\varphi(\sigma)$, so wählen wir $v, v' \in \sigma$ mit $\varphi(v) = w$ und $\varphi(v') = w'$. Dann gilt $\lambda v + \lambda' v' \in \sigma$, und es folgt

$$\lambda w + \lambda' w' \;=\; \varphi(\lambda v + \lambda' v') \;\in\; \varphi(\sigma).$$

Also ist $\varphi(\sigma) \subseteq W$ ein konvexer Kegel. Zu $\varphi^{-1}(\tau) \subseteq V$. Mit $\varphi(0) = 0$ und $0 \in \tau$ erhalten wir $\varphi^{-1}(\tau) \neq \emptyset$. Ist $\lambda v + \lambda' v'$ eine Positivkombination über $\varphi^{-1}(\tau)$, so sehen wir $\lambda v + \lambda' v' \in \varphi^{-1}(\tau)$ mit

$$\varphi(\lambda v + \lambda' v') \;=\; \lambda \varphi(v) + \lambda' \varphi(v') \;\in\; \tau.$$

$\square$

Bemerkung 1.3.9. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für jeden konvexen Kegel $\sigma \subseteq V$ haben wir $\mathrm{Lin}(\sigma) = D(\sigma) \subseteq_{\mathrm{lin}} V$, wobei $D(\sigma) = \sigma - \sigma \subseteq V$ die Differenzenmenge bezeichnet; siehe Definition 1.2.8.

Definition 1.3.10. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die *Dimension* eines konvexen Kegels $\sigma \subseteq V$ ist $\dim(\sigma) := \dim(\mathrm{Lin}(\sigma))$.

Aufgabe 1.3.11. Veranschauliche den Dimensionsbegriff für konvexe Kegel anhand geeigneter Beispiele in $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$.

Konstruktion 1.3.12. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und U sein Dualraum. Der durch eine Linearform $u \in U$ definierte *lineare Halbraum* in V ist die Teilmenge

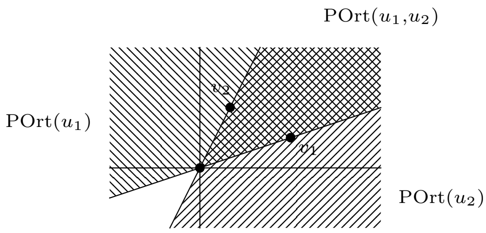
$$\mathrm{POrt}(u) \ := \ \{v \in V;\ \langle u, v\rangle \geq 0\} \ \subseteq \ V.$$

Dabei haben wir stets $N(u) \subseteq \mathrm{POrt}(u)$. Für eine beliebige Teilmenge $R \subseteq U$ ist der zugehörige *Positivort* in V definiert als

$$\mathrm{POrt}(R) \ := \ \{v \in V;\ \langle u, v\rangle \geq 0 \text{ für alle } u \in R\} \ = \ \bigcap_{u \in R} \mathrm{POrt}(u) \ \subseteq \ V.$$

Ist R eine endliche Menge, etwa $R = \{u_1, \ldots, u_m\}$, so notiert man den Positivort von R auch als $\mathrm{POrt}(u_1, \ldots, u_m)$.

Aufgabe 1.3.13. Veranschauliche die Begriffe des linearen Halbraumes und des Positivortes anhand geeigneter Beispiele im $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$.



Beispiel 1.3.14. Der positive Orthant $\delta^n = \mathbb{K}^n_{\geq 0} \subseteq \mathbb{K}^n$ lässt sich als Positivort darstellen: Mit der zu $(e_1, \ldots, e_n)$ dualen Basis $(e^1, \ldots, e^n)$ haben wir

$$\delta^n \ = \ \mathrm{POrt}(e^1, \ldots, e^n).$$

Satz 1.3.15. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, U sein Dualraum und $R, R' \subseteq U$ beliebige Teilmengen. Dann gilt*

(i) $\mathrm{POrt}(R) \subseteq V$ *ist ein konvexer Kegel.*
(ii) $R' \subseteq R \ \Rightarrow\ \mathrm{POrt}(R') \supseteq \mathrm{POrt}(R)$.

Beweis. Zu (i). Wegen $0 \in \mathrm{POrt}(R)$ ist $\mathrm{POrt}(R)$ nicht leer. Es sei nun $\lambda v + \lambda' v'$ eine Positivkombination über $\mathrm{POrt}(R)$. Dann haben wir $u(v) \geq 0$ und $u(v') \geq 0$ für alle $u \in R$. Damit sehen wir $\lambda v + \lambda' v' \in \mathrm{POrt}(R)$: Für jedes $u \in R$ gilt

$$u(\lambda v + \lambda' v') \ = \ \lambda u(v) + \lambda' u(v') \ \geq \ 0.$$

Wir zeigen (ii). Gilt $R' \subseteq R$, so erfüllt jedes $v \in \mathrm{POrt}(R)$ insbesondere die Bedingung $u(v) \geq 0$ für alle $u \in R'$, und wir erhalten $v \in \mathrm{POrt}(R')$. $\square$

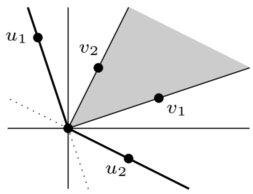
Definition 1.3.16. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und U sein Dualraum. Der *Dualkegel* eines konvexen Kegels $\sigma \subseteq V$ ist der konvexe Kegel

$$\sigma^\vee \ := \ \{u \in U;\ \langle u, v\rangle \geq 0 \text{ für alle } v \in \sigma\} \ = \ \mathrm{POrt}(\sigma) \ \subseteq \ U.$$

Aufgabe 1.3.17. Bestimme den Dualkegel $\sigma^\vee$ für einfache Beispiele konvexer Kegel $\sigma \subseteq \mathbb{R}^2$, etwa

$$\sigma \;=\; \{0\},\ \operatorname{Pos}(e_1),\ \operatorname{Pos}(3e_1+e_2,\, e_1+2e_2).$$

Wie kann man den Dualkegel $\sigma^\vee$ eines zweidimensionalen konvexen Kegels $\sigma \subseteq \mathbb{R}^2$ geometrisch konstruieren?



Beispiel 1.3.18. Mit der Identifikation $(\mathbb{K}^n)^* = \mathbb{K}^n$ aus Bemerkung 1.1.7 und $\gamma^n := \operatorname{Pos}(e^1,\dots,e^n)$ erhalten wir für den Orthanten

$$(\delta^n)^\vee \;=\; \operatorname{Pos}(e_1,\dots,e_n)^\vee \;=\; \operatorname{Pos}(e^1,\dots,e^n) \;=\; \gamma^n.$$

Satz 1.3.19. *Es seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, U sein Dualraum, $\sigma,\tau \subseteq V$ konvexe Kegel und $\sigma^\vee,\tau^\vee \subseteq U$ die zugehörigen Dualkegel. Dann gilt*

$$\tau \subseteq \sigma \;\Rightarrow\; \tau^\vee \supseteq \sigma^\vee, \qquad\qquad \sigma \;\subseteq\; \sigma^{\vee\vee}.$$

Beweis. Zur ersten Aussage. Gilt $u \in \sigma^\vee$, so haben wir $u|_\sigma \ge 0$, folglich $u|_\tau \ge 0$ und somit $u \in \tau^\vee$. Wir zeigen die zweite Aussage. Gilt $v \in \sigma$, so gilt $v(u) = u(v) \ge 0$ für alle $u \in \sigma^\vee$ und somit $v \in \sigma^{\vee\vee}$. $\square$

1.4. **Konvexe Hülle, konvexe Mengen und Polyeder.**

Definition 1.4.1. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Eine *Konvexkombination über S* ist ein Vektor $v \in V$ der Form

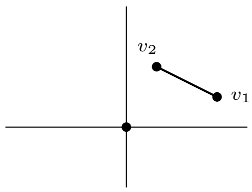
$$v \; = \; \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i, \quad v_1, \ldots, v_r \in S, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}_{\geq 0}, \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_r = 1.$$

Die *konvexe Hülle über S* ist die Menge $\operatorname{Konv}(S) \subseteq V$ aller Konvexkombinationen über S. Man setzt

$$\operatorname{Konv}(\emptyset) \; := \; \emptyset, \qquad \operatorname{Konv}(v_1, \ldots, v_n) \; := \; \operatorname{Konv}(S), \quad \text{falls } S = \{v_1, \ldots, v_n\}.$$

Definition 1.4.2. Eine Teilmenge $\mathcal{A}$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V nennt man *konvex* (in Zeichen $\mathcal{A} \subseteq_{\mathrm{konv}} V$), falls für je zwei $v_1, v_2 \in \mathcal{A}$ jede Konvexkombination $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ in $\mathcal{A}$ liegt.

Aufgabe 1.4.3. Es sei $\mathcal{A}$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$. Was bedeutet "*für je zwei $v_1, v_2 \in \mathcal{A}$ liegt jede Konvexkombination $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ in $\mathcal{A}$*" geometrisch?



Veranschauliche die Begriffe Konvexkombination, konvexe Hülle und konvexe Menge anhand geeigneter Beispiele bzw. Nicht-Beispiele.

Beispiel 1.4.4. Das *Standardsimplex* $\mathcal{S}^n \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ ist die konvexe Hülle über die Standardeinheitsvektoren $e_1, \ldots, e_{n+1} \in \mathbb{K}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^n \; &= \; \operatorname{Konv}(e_1, \ldots, e_{n+1}) \\ &= \; \{x \in \mathbb{K}^{n+1}; \; 0 \leq x_1, \ldots, x_{n+1} \leq 1, \; x_1 + \ldots + x_{n+1} = 1\}. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.4.5. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann ist jede Konvexkombination über S auch Linear-, Affin- und Positivkombination über S. Insbesondere sind lineare Unterräume, affine Unterräume und konvexe Kegel stets konvexe Mengen.

Lemma 1.4.6. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann gilt $S \subseteq \operatorname{Konv}(S) \subseteq_{\mathrm{konv}} V$.*

Beweis. Für jedes $v \in S$ liegt die Konvexkombination $1 \cdot v$ in $\operatorname{Konv}(S)$. Folglich gilt $S \subseteq \operatorname{Konv}(S)$. Für den Nachweis von $\operatorname{Konv}(S) \subseteq_{\mathrm{konv}} V$ seien $v, v' \in \operatorname{Konv}(S)$ und $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}_{\geq 0}$ mit $\lambda + \lambda' = 1$ gegeben. Dann erhalten wir

$$\lambda v + \lambda' v' \; = \; \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \lambda' \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j v'_j \; = \; \sum_{i=1}^{n} \lambda \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda' \lambda'_j v'_j \; \in \; \operatorname{Konv}(S),$$

wobei $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ sowie $v' = \lambda'_1 v'_1 + \ldots + \lambda'_m v'_m$ Darstellungen als Konvexkombinationen über S sind, die Koeffizienten $\lambda\lambda_1, \ldots, \lambda\lambda_n, \lambda'\lambda'_1, \ldots, \lambda'\lambda'_m$ alle nicht negativ sind und sich insgesamt zu 1 aufsummieren. $\square$

Lemma 1.4.7. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{A} \subseteq V$ eine konvexe Menge. Dann gilt* $\mathrm{Konv}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Beweis. Die Inklusion "$\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Konv}(A)$" ergibt sich direkt aus Lemma 1.4.6. Nehmen wir an, es gelte $\mathrm{Konv}(A) \not\subseteq \mathcal{A}$. Dann gibt es Konvexkombinationen

$$v \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \;\in\; \mathrm{Konv}(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}, \qquad \lambda_i \neq 0,\; i = 1, \ldots, n.$$

Es sei v eine solche Konvexkombination mit minimaler Länge n. Nach Definition eine konvexen Menge gilt $n \geq 3$, und wir dürfen $\lambda_1 \neq 1$ annehmen. Es folgt

$$v' \;:=\; \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} v_i \;\in\; \mathcal{A}, \qquad\qquad v \;=\; \lambda_1 v_1 + (1-\lambda_1)v' \;\in\; \mathcal{A},$$

wobei $v' \in \mathrm{Konv}(\mathcal{A})$, somit $v' \in \mathcal{A}$ nach Wahl von v und $v \in \mathcal{A}$ nach Definition einer konvexen Menge gilt. Widerspruch. Also gilt $\mathrm{Konv}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$. □

Satz 1.4.8. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Ist $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie konvexer Mengen in V, so ist auch der Durchschnitt eine konvexe Menge:*

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \;\subseteq_{\mathrm{konv}}\; V.$$

(ii) *Für jede Teilmenge $S \subseteq V$ ist* $\mathrm{Konv}(S) \subseteq V$ *eine konvexe Menge mit* $S \subseteq \mathrm{Konv}(S)$. *Genauer gilt*

$$\mathrm{Konv}(S) \;=\; \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \subseteq_{\mathrm{konv}} V \\ S \subseteq \mathcal{A}}} \mathcal{A},$$

d.h., $\mathrm{Konv}(S)$ *ist die bezüglich Inklusion kleinste konvexe Menge in V, die S enthält.*

(iii) *Sind $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_r \subseteq V$ konvexe Mengen, so ist die Summe $\mathcal{A}_1 + \ldots + \mathcal{A}_r \subseteq V$ ebenfalls eine konvexe Menge.*

(iv) *Ist $F \colon V \to W$ eine affine Abbildung zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W, so gilt stets*

$$\mathcal{A} \subseteq_{\mathrm{konv}} V \;\Rightarrow\; F(\mathcal{A}) \subseteq_{\mathrm{konv}} W, \qquad \mathcal{B} \subseteq_{\mathrm{konv}} W \;\Rightarrow\; F^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq_{\mathrm{konv}} V.$$

Beweis. Aussage (i) ist offensichtlich. Zu (ii). Nach Lemma 1.4.6 ist $\mathrm{Konv}(S) \subseteq V$ eine konvexe Menge mit $S \subseteq \mathrm{Konv}(S)$. Das beweist die erste Aussage. Weiter erhalten wir damit die Inklusion "$\supseteq$" aus der Behauptung: Es gilt

$$\mathrm{Konv}(S) \;\supseteq\; \mathrm{Konv}(S) \cap \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \subseteq_{\mathrm{konv}} V \\ S \subseteq \mathcal{A}}} \mathcal{A} \;=\; \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \subseteq_{\mathrm{konv}} V \\ S \subseteq \mathcal{A}}} \mathcal{A}.$$

Für den Nachweis der Inklusion "$\subseteq$" aus der Behauptung sei $\mathcal{A} \subseteq_{\mathrm{konv}} V$ mit $S \subseteq \mathcal{A}$ gegeben. Lemma 1.4.7 liefert $\mathcal{A} = \mathrm{Konv}(\mathcal{A})$. Insbesondere liegt jede Konvexkombination über S in $\mathcal{A}$. Wir schließen $\mathrm{Konv}(S) \subseteq \mathcal{A}$.

Wir zeigen (iii). Es sei eine Konvekombination $\lambda v + \lambda' v'$ mit $v, v' \in \mathcal{A}_1 + \ldots + \mathcal{A}_r$ gegeben. Dann gibt es Darstellungen

$$v = v_1 + \ldots + v_r, \quad v' = v_1' + \ldots + v_r', \quad v_i, v_i' \in \mathcal{A}_i,\; i = 1, \ldots, r.$$

Insbesondere ist jedes $\lambda v_i + \lambda' v_i'$ eine Konvexkombination über $\mathcal{A}_i$ und liegt somit in $\mathcal{A}_i$. Es folgt

$$\lambda v + \lambda' v' \;=\; (\lambda v_1 + \lambda' v_1') + \ldots + (\lambda v_r + \lambda' v_r') \;\in\; \mathcal{A}_1 + \ldots + \mathcal{A}_r.$$

Zu (iv). Wir zeigen $F(\mathcal{A}) \subseteq_{\mathrm{konv}} W$. Es sei eine Konvexkombination $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ über $F(\mathcal{A})$ gegeben. Wegen $w_1, w_2 \in F(\mathcal{A})$ gibt es $v_1, v_2 \in \mathcal{A}$ mit $F(v_i) = w_i$. Da $\mathcal{A}$ konvex ist, gilt $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \mathcal{A}$. Mit Lemma 1.2.15 folgt

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \ = \ F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \ \in \ F(\mathcal{A}).$$

Wir zeigen $F^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq_{\mathrm{konv}} V$. Es sei eine Konvexkombination $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ über $F^{-1}(\mathcal{B})$ gegeben. Dann haben wir $w_i := F(v_i) \in \mathcal{B}$. Da $\mathcal{B}$ konvex ist, gilt $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in \mathcal{B}$. Mit Lemma 1.2.15 sehen wir dann, dass $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ in $F^{-1}(\mathcal{B})$ liegt:

$$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \ = \ \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \ \in \ \mathcal{B}.$$

□

Konstruktion 1.4.9. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Jede nicht-konstante Affinform $f \in \mathrm{AF}(V)$ definiert einen *affinen Halbraum* $\mathrm{POrt}(f)$ in V:

$$\mathrm{POrt}(f) \ := \ \{v \in V;\ f(v) \ge 0\} \ \subseteq \ V.$$

Ist allgemeiner eine Teilmenge $R \subseteq \mathrm{AF}(V)$ gegeben, so definieren wir den zugehörigen *Positivort* als

$$\mathrm{POrt}(R) \ := \ \{v \in V;\ f(v) \ge 0 \text{ für alle } f \in R\} \ = \ \bigcap_{f \in R} \mathrm{POrt}(f) \ \subseteq \ V.$$

Gilt $R = \{f_1, \ldots, f_m\}$ mit Affinformen $f_1, \ldots, f_m \in \mathrm{AF}(V)$, so schreiben wir auch $N(f_1, \ldots, f_m)$ bzw. $\mathrm{POrt}(f_1, \ldots, f_m)$ anstelle von $N(R)$ bzw. $\mathrm{POrt}(R)$.

Bemerkung 1.4.10. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $R \subseteq \mathrm{AF}(V)$. Für die Menge $-R \subseteq \mathrm{AF}(V)$ und die Nullstellenmenge $N(R) \subseteq V$ gilt

$$N(R) \ = \ \mathrm{POrt}(R) \cap \mathrm{POrt}(-R) \ \subseteq \ \mathrm{POrt}(R).$$

Aufgabe 1.4.11. Veranschauliche anhand geeigneter Beispiele in $\mathbb{R}^n$, $n \le 3$, den affinen Halbraum $\mathrm{POrt}(f)$ einer Affinform $f \in \mathrm{AF}(\mathbb{R}^n)$.

Präsentiere Beispiele für den Positivort $\mathrm{POrt}(f_1, \ldots, f_m)$ mehrerer Affinformen $f_1, \ldots, f_m \in \mathrm{AF}(\mathbb{R}^n)$.

Definition 1.4.12. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq V$ heißt *konvexes Polyeder*, falls $\mathcal{B} = \mathrm{POrt}(f_1, \ldots, f_m)$ mit $f_1, \ldots, f_m \in \mathrm{AF}(V)$ gilt.

Satz 1.4.13. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist jedes konvexe Polyeder $\mathcal{B} \subseteq V$ eine konvexe Menge in V.*

Beweis. Es sei $\mathcal{B} = \mathrm{POrt}(f_1, \ldots, f_m)$ mit $f_1, \ldots, f_m \in \mathrm{AF}(V)$. Ist $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ eine Konvexkombination über B, so erhalten wir

$$f_j(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \ = \ \lambda_1 f_j(v_1) + \lambda_1 f_j(v_2) \ \ge \ 0$$

für $j = 1, \ldots, m$; siehe Lemma 1.2.15. Das bedeutet $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \mathrm{POrt}(f_1, \ldots, f_m)$ Folglich ist $\mathcal{B} = \mathrm{POrt}(f_1, \ldots, f_m)$ konvex. □

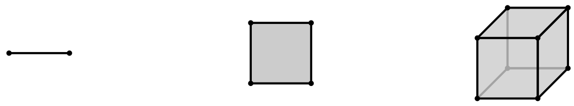
Bemerkung 1.4.14. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist jeder Untervektorraum $V_0 \subseteq V$ und jeder affine Unterraum $A \subseteq V$ ein konvexes Polyeder.

Definition 1.4.15. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{A} \subseteq V$ eine konvexe Menge. Die *Dimension* von $\mathcal{A}$ ist die Dimension ihrer affinen Hülle:

$$\dim(\mathcal{A}) \ := \ \dim(\mathrm{Aff}(\mathcal{A})).$$

Beispiel 1.4.16. Es bezeichne $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis des $\mathbb{K}^n$. Der *n-dimensionale Standard-Würfel in* $\mathbb{K}^n$ ist definiert als

$$W_n \ := \ \mathrm{Konv}(\varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_n e_n; \ \varepsilon_i \in \{1, -1\}) \ \subseteq \ \mathbb{K}^n.$$

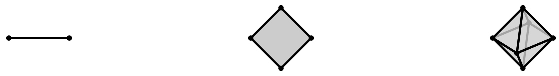


Der n-dimensionale Standard-Würfel in $\mathbb{K}^n$ ist ein konvexes Polyeder: Mit der zu $(e_1, \ldots, e_n)$ dualen Basis $(e^1, \ldots, e^n)$ haben wir

$$W_n \ = \ \mathrm{POrt}(\pm e^1 + 1, \ldots, \pm e^n + 1) \ \subseteq \ \mathbb{K}^n.$$

Beispiel 1.4.17. Es bezeichne $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis des $\mathbb{K}^n$. Das *n-dimensionale Standard-Kreuzpolytop in* $\mathbb{K}^n$ ist definiert als

$$K_n \ = \ \mathrm{Konv}(\pm e_1, \ldots, \pm e_n) \ \subseteq \ \mathbb{K}^n.$$



Das n-dimensionale Standard-Kreuzpolytop in $\mathbb{K}^n$ ist ein konvexes Polyeder: Mit der zu $(e_1, \ldots, e_n)$ dualen Basis $(e^1, \ldots, e^n)$ haben wir

$$K_n \ := \ \mathrm{POrt}(\varepsilon_1 e^1 + \ldots + \varepsilon_n e^n + 1; \ \varepsilon_i \in \{1, -1\}) \ \subseteq \ \mathbb{K}^n.$$

2. Polyedrische konvexe Kegel

2.1. **Polyedrische Kegel 1.**

Definition 2.1.1. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein *endlich erzeugter konvexer Kegel* in V ist eine Teilmenge der Form $\sigma = \operatorname{Pos}(v_1, \ldots, v_r) \subseteq V$ mit $v_1, \ldots, v_r \in V$.

Aufgabe 2.1.2. Präsentiere Beispiele endlich erzeugter konvexer Kegel in $\mathbb{R}^n$, $n \le 3$. Gibt es auch nicht endlich erzeugte konvexe Kegel in $\mathbb{R}^n$?

Beispiel 2.1.3. Der positive Orthant $\delta^n = \mathbb{K}^n_{\ge 0} \subseteq \mathbb{K}^n$ ist ein endlich erzeugter konvexer Kegel: Wir haben

$$\delta^n \; = \; \operatorname{Pos}(e_1, \ldots, e_n).$$

Bemerkung 2.1.4. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V'$ eine lineare Abbildung und $v_1, \ldots, v_r \in V$. Dann haben wir

$$\varphi(\operatorname{Pos}(v_1, \ldots, v_r)) \; = \; \operatorname{Pos}(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_r)).$$

Insbesondere sind Bilder endlich erzeugter konvexer Kegel unter linearen Abbildungen endlich erzeugte konvexe Kegel.

Satz 2.1.5. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $S \subseteq V$ eine Teilmenge und $r \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gibt Vektoren $v_1, \ldots, v_r \in V$ mit $S = \operatorname{Pos}(v_1, \ldots, v_r)$.*
(ii) *Es gibt eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{K}^r \to V$ mit $S = \varphi(\delta^r)$.*

Insbesondere sind die endlich erzeugten konvexen Kegel genau die Bilder positiver Orthanten unter linearen Abbildungen.

Beweis. Die Implikation "(ii)⇒(i)" ergibt sich direkt aus Bemerkung 2.1.4. Für den Nachweis von "(i)⇒(ii)" betrachten wir die durch

$$\varphi\colon \mathbb{K}^r \; \to \; V, \qquad e_i \; \mapsto \; v_i$$

definierte lineare Abbildung. Bemerkung 2.1.4 liefert dann die gewünschte Darstellung $S = \operatorname{Pos}(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_r)) = \varphi(\delta^r)$. □

Definition 2.1.6. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und U sein Dualraum. Ein *polyedrischer konvexer Kegel* in V ist eine Teilmenge der Form $\sigma = \operatorname{POrt}(u_1, \ldots, u_s) \subseteq V$ mit $u_1, \ldots, u_s \in U$.

Bemerkung 2.1.7. Nach Satz 1.3.15 sind polyedrische konvexe Kegel stets konvexe Kegel im Sinne von Definition 1.3.2. Weiter ist jeder polyedrische konvexe Kegel ein konvexes Polyeder im Sinne von Definition 1.4.12.

Aufgabe 2.1.8. Präsentiere Beispiele polyedrischer konvexer Kegel in $\mathbb{R}^n$, $n \le 3$. Gibt es auch nicht-polyedrische konvexe Kegel in $\mathbb{R}^n$?

Bemerkung 2.1.9. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Jeder lineare Unterraum $V_0 \subseteq V$ ist ein endlich erzeugter und polyedrischer konvexer Kegel: Es gilt

$$V_0 \; = \; \operatorname{Pos}(\pm v_1, \ldots, \pm v_k) \; = \; \operatorname{POrt}(\pm u_{k+1}, \ldots, \pm u_n),$$

wobei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis für V ist mit $V_0 = \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_k)$ und $(u_1, \ldots, u_n)$ die zugehörige duale Basis in $U = V^*$ bezeichnet.

Beispiel 2.1.10. Der positive Orthant $\delta^n = \mathbb{K}^n_{\ge 0} \subseteq \mathbb{K}^n$ ist ein polyedrischer konvexer Kegel: Wir haben

$$\delta^n \; = \; \operatorname{POrt}(e^1, \ldots, e^n).$$

Erinnerung 2.1.11. Es seien V, V' zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, U, U' ihre Dualräume und $\varphi\colon V \to V'$ eine lineare Abbildung. Die zugehörige *duale Abbildung* ist

$$\varphi^*\colon U' \;\to\; U, \qquad u' \;\mapsto\; \varphi^*(u') \;:=\; u' \circ \varphi.$$

Dabei ist jedes $\varphi^*(u')$ als Komposition linearer Abbildungen linear. Weiter ist $\varphi^*\colon U' \to U$ eine lineare Abbildung, siehe [1, Satz 4.4.6].

Bemerkung 2.1.12. Es seien V, V' zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, U, U' ihre Dualräume und $\varphi\colon V \to V'$ eine lineare Abbildung. Sind $u'_1, \ldots, u'_s \in U'$ gegeben, so gilt

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\mathrm{POrt}(u'_1, \ldots, u'_s)) &= \{v \in V;\ u'_1(\varphi(v)) \geq 0, \ldots, u'_s(\varphi(v)) \geq 0\} \\ &= \mathrm{POrt}(\varphi^*(u'_1), \ldots, \varphi^*(u'_s)).\end{aligned}$$

Insbesondere sehen wir damit, dass Urbilder polyedrischer konvexer Kegel unter linearen Abbildungen polyedrische konvexe Kegel sind.

Satz 2.1.13. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, U sein Dualraum, $S \subseteq V$ eine Teilmenge und $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gibt Linearformen $u_1, \ldots, u_s \in U$ mit $S = \mathrm{POrt}(u_1, \ldots, u_s)$.*
(ii) *Es gibt eine lineare Abbildung $\psi\colon V \to \mathbb{K}^s$ mit $S = \psi^{-1}(\delta^s)$.*

Insbesondere sind die polyedrischen konvexen Kegel genau die Urbilder positiver Orthanten unter linearen Abbildungen.

Beweis. Die Implikation "(ii)⇒(i)" ergibt sich direkt aus Bemerkung 2.1.12. Für den Nachweis von "(i)⇒(ii)" betrachten wir die lineare Abbildung

$$\psi\colon V \;\to\; \mathbb{K}^m, \qquad v \;\mapsto\; (u_1(v), \ldots, u_s(v)).$$

Für $v \in V$ haben wir genau dann $\psi(v) \in \delta^s$, wenn $u_i(v) \geq 0$ für $i = 1, \ldots, s$ gilt. Das bedeutet $S = \mathrm{POrt}(u_1, \ldots, u_s) = \psi^{-1}(\delta^s)$. □

Erinnerung 2.1.14. Es sei $\sigma \subseteq V$ ein konvexer Kegel. Der zugehörige *duale Kegel*, auch *Dualkegel* genannt, ist der konvexe Kegel

$$\sigma^\vee \;:=\; \{u \in U;\ u|_\sigma \geq 0\} \;\subseteq\; U.$$

Der Übergang zum Dualkegel ist inklusionsumkehrend, d.h., sind $\sigma \subseteq V$ und $\tau \subseteq V$ konvexe Kegel, so gilt

$$\tau \subseteq \sigma \quad\Rightarrow\quad \tau^\vee \supseteq \sigma^\vee.$$

Satz 2.1.15 (Hahn-Banach)**.** *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Dualraum U und $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel mit Dualkegel $\sigma^\vee \subseteq U$. Dann gibt es zu jedem $v \in V \setminus \sigma$ eine Linearform $u \in \sigma^\vee$ mit $u(v) < 0$.*

Beweis. Die Aussage gilt offensichtlich, falls σ ein positiver Orthant ist. Für den allgemeinen Fall wählen wir eine lineare Abbildung $\psi\colon V \to \mathbb{K}^s$ mit $\sigma = \psi^{-1}(\delta^s)$. Dann gilt $\psi(v) \notin \delta^s$. Folglich gibt es eine Linearform u' auf $\mathbb{K}^s$, die keine negativen Werte auf δ^s annimmt und $u'(\psi(v)) < 0$ erfüllt. Die zurückgeholte Linearform $u := u' \circ \psi$ besitzt also die gewünschten Eigenschaften. □

Erinnerung 2.1.16. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und U sein Dualraum. Für $u \in U$ und $v \in V$ schreiben wir

$$v(u) \;:=\; \langle u, v\rangle \;:=\; u(v).$$

Die erste Gleichung erlaubt es uns, V als den Dualraum von U anzusehen, d.h., wir haben $(V^*)^* = V$.

Satz 2.1.17 (Dualitätssatz)**.** *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Dann gilt*

$$(\sigma^\vee)^\vee \quad = \quad \sigma.$$

Beweis. Satz 1.3.19 liefert $(\sigma^\vee)^\vee \supseteq \sigma$. Der Nachweis der Inklusion $(\sigma^\vee)^\vee \subseteq \sigma$ erfolgt indirekt: Nehmen wir an, es existiere ein $v \in (\sigma^\vee)^\vee$ mit $v \notin \sigma$. Dann gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein Element $u \in \sigma^\vee$ mit $u(v) < 0$. Mit anderen Worten, es gilt $v(u) < 0$ und somit $v \notin (\sigma^\vee)^\vee$, Widerspruch. □

Satz 2.1.18. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Dualraum U. Weiter seien Elemente $v_1, \ldots, v_r \in V$ gegeben. Dann gilt*

$$\mathrm{Pos}(v_1, \ldots, v_r)^\vee \;=\; \mathrm{POrt}(v_1, \ldots, v_r).$$

Insbesondere ist der Dualkegel eines endlich erzeugten konvexen Kegels stets ein polyedrischer konvexer Kegel.

Beweis. Wir setzen $\sigma := \mathrm{Pos}(v_1, \ldots, v_r) \subseteq V$. Dann ist der Dualkegel von σ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\sigma^\vee &= \{u \in U;\; u(v) \geq 0 \text{ für alle } v \in \sigma\} \\
&= \{u \in U;\; u(v_i) \geq 0,\; i = 1, \ldots, r\} \\
&= \{u \in U;\; v_i(u) \geq 0,\; i = 1, \ldots, r\} \\
&= \mathrm{POrt}(v_1, \ldots, v_n).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2.1.19. Nutze Satz 2.1.18 zur expliziten Bestimmung der Dualkegel für geeignete Beispiele endlich erzeugter konvexer Kegel in $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$.

2.2. **Polyedrische Kegel 2.**

Satz 2.2.1. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und U sein Dualraum. Für jede Teilmenge $\sigma \subseteq V$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gibt Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ mit $\sigma = \mathrm{Pos}(v_1, \ldots, v_n)$.*
(ii) *Es gibt Linearformen $u_1, \ldots, u_m \in U$ mit $\sigma = \mathrm{POrt}(u_1, \ldots, u_m)$.*

Insbesondere sind die endlich erzeugten konvexen Kegel genau die polyedrischen konvexen Kegel.

Lemma 2.2.2. *Es seien $\varphi\colon V \to V'$ ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen, $u_1, \ldots, u_n$ Linearformen auf V und $\sigma = \mathrm{POrt}(u_1, \ldots, u_n) \subseteq V$. Dann gilt*

$$\varphi(\sigma) \;=\; \mathrm{POrt}(u_1', \ldots, u_n') \;\subseteq\; V', \qquad u_i' := u_i \circ \varphi^{-1},\ i = 1, \ldots, n.$$

Beweis. Die Mitgliedschaft eines Vektors $v' \in V'$ im Bild $\varphi(\sigma) \subseteq V'$ von $\sigma \subseteq V$ lässt sich wie folgt charakterisieren:

$$\begin{aligned} v' \in \varphi(\sigma) \quad &\Longleftrightarrow \quad \varphi^{-1}(v') \in \sigma \\ &\Longleftrightarrow \quad u_i(\varphi^{-1}(v')) \geq 0,\ i = 1, \ldots, n \\ &\Longleftrightarrow \quad u_i \circ \varphi^{-1}(v') \geq 0,\ i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.2.3. *Es sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis für $\mathbb{K}^n$ und es sei $u_i \in \mathbb{K}^n$ die i-te Zeile der Matrix $[v_1, \ldots, v_n]^{-1}$, wobei $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt*

$$\mathrm{Pos}(v_1, \ldots, v_n) \;=\; \mathrm{POrt}(u_1, \ldots, u_n).$$

Beweis. Wir betrachten den Isomorphismus $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $x \mapsto P \cdot x$, wobei wir $P := [v_1, \ldots, v_n]$ setzen. Mit $u_i := e^i \circ \varphi^{-1}$ gilt

$$\mathrm{Pos}(v_1, \ldots, v_n) \;=\; \varphi(\delta_n) \;=\; \varphi(\mathrm{POrt}(e^1, \ldots, e^n)) \;=\; \mathrm{POrt}(u_1, \ldots, u_n),$$

siehe Lemma 2.2.2. Nach Definition von φ ist dabei $u_i = e^i \circ \varphi^{-1}$ die i-te Zeile der Matrix $[v_1, \ldots, v_n]^{-1}$. □

Lemma 2.2.4 (Fourier-Motzkin-Elimination)**.** *Es seien B eine endliche Menge von Linearformen $u = (u_1, \ldots, u_n)$ auf $\mathbb{K}^n$ und $\sigma := \mathrm{POrt}(B) \subseteq \mathbb{K}^n$. Wir betrachten*

$$\begin{aligned} B_n \;&:=\; \{u \in B;\ u_n = 0\} \cup \{u_n^+ u^- - u_n^- u^+;\ u^+, u^- \in B,\ u_n^+ > 0,\ u_n^- < 0\}, \\ \tilde{B}_n \;&:=\; \{(u_1, \ldots, u_{n-1});\ u \in B_n\} \end{aligned}$$

und die Projektion $\pi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{n-1}$, $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto (v_1, \ldots, v_{n-1})$ auf die ersten $n-1$ Koordinaten. Dann gilt

$$\mathrm{POrt}(B_n) = \sigma + \mathbb{K}e_n \subseteq \mathbb{K}^n, \qquad \mathrm{POrt}(\tilde{B}_n) = \pi(\sigma) \subseteq \mathbb{K}^{n-1}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die zweite Gleichung aus der ersten folgt. Nach Konstruktion haben wir $B_n = \pi^*(\tilde{B}_n)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \mathrm{POrt}(\tilde{B}_n) \;&=\; \pi(\pi^{-1}(\mathrm{POrt}(\tilde{B}_n)) \;=\; \pi(\mathrm{POrt}(\pi^*(\tilde{B}_n))) \\ &=\; \pi(\mathrm{POrt}(B_n)) \;=\; \pi(\sigma + \mathbb{K}e_n) \;=\; \pi(\sigma). \end{aligned}$$

Wir zeigen "$\supseteq$" für die erste Gleichung. Jedes $u \in B_n$ ist eine Positivkombination von Linearformen aus B und es gilt $u_n = 0$. Auswerten auf $v + \alpha e_n \in \sigma + \mathbb{K}e_n$ liefert daher

$$u(v + \alpha e_n) \;=\; u(v) + \alpha u_n \;=\; u(v) \;\geq\; 0.$$

Zur Inklusion "$\subseteq$" der ersten Gleichung. Es sei $v \in V$ ein Vektor mit $u(v) \geq 0$ für alle $u \in B_n$. Dann erhalten wir

$$u_n^+ u^-(v) \quad \geq \quad u_n^- u^+(v)$$

für je zwei Linearformen $u^+, u^- \in B$ mit $u_n^+ > 0$ und $u_n^+ < 0$. Diese Bedingung lässt sich äquivalent umformulieren zu

$$\frac{u^-(v)}{u_n^-} \quad \leq \quad \frac{u^+(v)}{u_n^+}$$

für je zwei Linearformen $u^+, u^- \in B$ mit $u_n^+ > 0$ und $u_n^+ < 0$. Wir wählen nun ein $\alpha \in \mathbb{K}$ mit

$$\max\left(\frac{u^-(v)}{u_n^-};\ u^- \in B,\ u_n^- < 0\right) \ \leq\ \alpha\ \leq\ \min\left(\frac{u^+(v)}{u_n^+};\ u^+ \in B,\ u_n^+ > 0\right)$$

und betrachten $v' := v - \alpha e_n$. Dieser Vektor erfüllt $u(v') \geq 0$ für alle $u \in B$ mit $u_n = 0$. Für $u^+, u^- \in B$ mit $u_n^+ > 0$ bzw. $u_n^- < 0$ erhalten wir weiter

$$u^-(v') \ = \ u^-(v) - u_n^- \alpha \ \geq \ 0, \qquad u^+(v') \ = \ u^+(v) - u_n^+ \alpha \ \geq \ 0.$$

Wir haben also gesehen, dass $u(v') \geq 0$ für alle $u \in B$ gilt. Mit anderen Worten, es gilt $v' \in \sigma$. Somit ist $v = v' + \alpha e_n$ ein Element aus $\sigma + \mathbb{K}e_n$. □

Erinnerung 2.2.5. Es sei $P \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ vom Rang m mit $n \geq m$. Dann gibt es invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{Mat}(m, m; \mathbb{K})$ und $T \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$, sodass

$$S \cdot A \cdot T \ = \ [E_m, 0],$$

wobei die Blockmatrix $[E_m, 0]$ aus der Einheitsmatrix $E_m \in \mathrm{Mat}(m, m; \mathbb{K})$ und der Nullmatrix $0 \in \mathrm{Mat}(m, n-m; \mathbb{K})$ zusammengesetzt ist; siehe [1, Satz 5.1.13].

Beweis von Satz 2.2.1. Wir zeigen "(i)$\Rightarrow$(ii)". Nach Satz 2.1.5 dürfen wir annehmen, dass $\sigma = \varphi(\delta^n)$ mit einer linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to V$ gilt. Bemerkung 2.1.9 liefert Linearformen $u_1, \ldots, u_k$ auf V mit

$$\mathrm{Bild}(\varphi) \ = \ \mathrm{POrt}(u_1, \ldots, u_k).$$

Nach Bemerkung 1.1.10 (iii) genügt es daher, den Fall zu behandeln, dass $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to V$ surjektiv ist. Weiter können wir annehmen, dass $V = \mathbb{K}^m$ mit $m \leq n$ gilt. Gemäß Erinnerung 2.2.5 gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"', "\cong"] & \mathbb{K}^m \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\beta"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

wobei $\pi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die Projektion auf die ersten m Koordinaten bezeichnet. Im Fall $m = n$ liefert Lemma 2.2.2 die gewünschte Darstellung von $\sigma = \varphi(\delta^n)$. Gilt $m < n$, so schreiben wir

$$\pi \ = \ \pi_m \circ \ldots \circ \pi_{n-2} \circ \pi_{n-1},$$

wobei $\pi_l\colon \mathbb{K}^{l+1} \to \mathbb{K}^l$ die Projektion auf die ersten l Koordinaten darstellt. In jedem Schritt liefert uns Lemma 2.2.4 eine Darstellung des Bildes von δ^n als Positivort endlich vieler Linearformen.

Wir zeigen "(ii)$\Rightarrow$(i)". Es sei $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Nach Satz 2.1.18 gilt $\sigma = \tau^\vee$ mit einem endlich erzeugten konvexen Kegel $\tau \subseteq U$. Wie eben gezeigt, ist τ polyedrisch. Der Dualitätssatz 2.1.17 liefert $\sigma^\vee = (\tau^\vee)^\vee = \tau$. Somit ist $\sigma^\vee \subseteq U$ endlich erzeugt und polyedrisch. Wenden wir die obigen Argumente auf $\sigma^\vee$ an, so erhalten wir insbesondere, dass $\sigma = (\sigma^\vee)^\vee$ endlich erzeugt ist. □

Folgerung 2.2.6. *Endliche Summen sowie endliche Durchschnitte polyedrischer konvexer Kegel sind polyedrische konvexe Kegel.*

Folgerung 2.2.7. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Dualraum U. Weiter seien Elemente $u_1, \ldots, u_m \in U$ gegeben. Dann gilt*

$$\mathrm{POrt}(u_1, \ldots, u_m)^\vee \;=\; \mathrm{Pos}(u_1, \ldots, u_m).$$

Insbesondere ist der Dualkegel eines polyedrischen konvexen Kegels stets ein endlich erzeugter konvexer Kegel.

Beweis. Nach Satz 2.2.1 ist $\mathrm{Pos}(u_1, \ldots, u_m)$ polyedrisch und gemäß Satz 2.1.18 gilt $\mathrm{Pos}(u_1, \ldots, u_m)^\vee = \mathrm{POrt}(u_1, \ldots, u_m)$. Dualisieren dieser Gleichung und der Dualitätssatz 2.1.17 liefern die Behauptung. $\square$

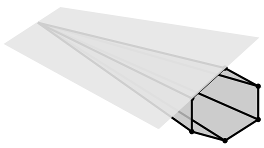
2.3. **Seiten polyedrischer Kegel.**

Definition 2.3.1. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Man nennt $\tau \subseteq \sigma$ eine *Seite* von σ (in Zeichen $\tau \preccurlyeq \sigma$), falls es ein $u \in \sigma^\vee$ gibt, sodass

$$\tau \;=\; u^\perp \cap \sigma.$$

Dabei heißt $u \in \sigma^\vee$ auch eine *ausschneidende Linearform* für $\tau \preccurlyeq \sigma$. Wir nennen eine Seite $\tau \preccurlyeq \sigma$ *echt* (in Zeichen $\tau \prec \sigma$), wenn $\tau \neq \sigma$ gilt. Die Menge aller Seiten von σ wird mit $\mathrm{Seiten}(\sigma)$ bezeichnet.

Aufgabe 2.3.2. Veranschauliche den Seitenbegriff anhand geeigneter Beispiele polyedrischer konvexer Kegel in $\mathbb{R}^n$ für $n \leq 3$.



Beispiel 2.3.3. Wir betrachten den positiven Orthanten $\delta^n = \mathrm{Pos}(e_1, \ldots, e_n)$ in $\mathbb{K}^n_{\geq 0}$. Jede Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ definiert eine Seite

$$\delta^n_I \;:=\; \mathrm{Pos}(e_i;\; i \in I) \;\preccurlyeq\; \delta^n.$$

Bezeichnet $(e^1, \ldots, e^n)$ die zu $(e_1, \ldots, e_n)$ duale Basis, so erhalten wir ausschneidende Linearformen u_I für die Seiten $\delta^n_I \preccurlyeq \delta^n$ durch

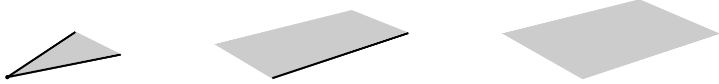
$$u_I \;:=\; \varepsilon_1 e^1 + \ldots + \varepsilon_n e^n, \qquad \varepsilon_i \;:=\; \begin{cases} 0, & 1 \leq i \leq n,\; i \in I, \\ 1, & 1 \leq i \leq n,\; i \notin I. \end{cases}$$

Bemerkung 2.3.4. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die eindimensionalen polyedrischen konvexen Kegel in V sind genau

- Die *Strahlen*, d.h., die Kegel der Form $\varrho = \mathrm{Pos}(v)$ mit $0 \neq v \in V$. Die Seiten eines Strahls ϱ sind $\{0\}$ und ϱ.
- Die *Geraden*, d.h., die Kegel der Form $G = \mathrm{Lin}(v)$ mit $0 \neq v \in V$. Jede Gerade G besitzt G als einzige Seite.

Weiter gibt es genau drei Typen von zweidimensionalen polyedrischen konvexen Kegeln in V:

- Die *spitzen* Kegel $\tau = \mathrm{Pos}(v_1, v_2)$ mit (v_1, v_2) linear unabhängig in V. Die Seiten eines solchen Kegels sind $\{0\}$, $\varrho_i = \mathrm{Pos}(v_i)$, $i = 1, 2$ und τ selbst.
- Die *Halbebenen*, d.h., die Kegel $H = G + \varrho$, wobei G eine Gerade und ϱ ein Strahl ist. Die Seiten von H sind G und H.
- Die *Ebenen*, d.h., die Kegel $E = \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$ mit (v_1, v_2) linear unabhängig in V. Die einzige Seite einer Ebene E ist E selbst.



Lemma 2.3.5. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $v_1, \ldots, v_r \in V$ und $\sigma = \mathrm{Pos}(v_1, \ldots, v_r)$. Für jede Linearform $u \in \sigma^\vee$ gilt dann*

$$u^\perp \cap \sigma \;=\; \mathrm{Pos}(v_i;\; u(v_i) = 0).$$

Beweis. Die Inklusion "$\supseteq$" liegt offensichtlich vor. Zum Nachweis von "$\subseteq$" sei ein Element $v \in u^\perp \cap \sigma$ gegeben. Wegen $v \in \sigma$ haben wir eine Darstellung

$$v \;=\; \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}_{\geq 0}.$$

Mit $v \in u^\perp$ erhalten wir weiter

$$0 \;=\; u(v) \;=\; \alpha_1 u(v_1) + \ldots + \alpha_r u(v_r).$$

Mit $\alpha_i \geq 0$ und $u(v_i) \geq 0$ folgt $\alpha_j = 0$ für alle j mit $u(v_j) > 0$. Das bedeutet $v \in \mathrm{Pos}(v_i;\; u(v_i) = 0)$. □

Satz 2.3.6. *Ein polyedrischer konvexer Kegel besitzt nur endlich viele Seiten, und jede dieser Seiten ist ein polyedrischer konvexer Kegel.*

Beweis. Es sei $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann haben wir $\sigma = \mathrm{Pos}(v_1, \ldots, v_r)$ mit $v_1, \ldots, v_r \in V$ endlich erzeugt. Nach Lemma 2.3.5 ist jede Seite $\tau \preccurlyeq \sigma$ von der Form $\tau = \mathrm{Pos}(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ mit $k \leq r$ und $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq r$. Insbesondere besitzt σ nur endlich viele $\tau \preccurlyeq \sigma$, und jedes dieser τ ist ein endlich erzeugter, mithin polyedrischer, konvexer Kegel. □

Lemma 2.3.7. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Sind $\varrho \preccurlyeq \sigma$ und $\tau \preccurlyeq \sigma$ Seiten mit $\varrho \subseteq \tau$, so gilt $\varrho \preccurlyeq \tau$.*

Beweis. Es sei $u \in \sigma^\vee$ mit $\varrho = u^\perp \cap \sigma$. Wegen $\sigma^\vee \subseteq \tau^\vee$ ist u auch ausschneidende Linearform für $\varrho \subseteq \tau$. □

Satz 2.3.8. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma, \tau \subseteq V$ polyedrische konvexe Kegel. Dann gilt:*

(i) $(\sigma \cap \tau)^\vee = \sigma^\vee + \tau^\vee$.
(ii) $(\sigma + \tau)^\vee = \sigma^\vee \cap \tau^\vee$.

Beweis. Zu (i). Die Inklusion "$\supseteq$" ist leicht einzusehen: Ist $u \in \sigma^\vee$ und $u' \in \tau^\vee$, so gilt offensichtlich

$$u|_{\sigma\cap\tau} \;\geq\; 0, \qquad u'|_{\sigma\cap\tau} \;\geq\; 0.$$

Für den Nachweis der Inklusion "$\subseteq$" verwenden wir den Dualitätssatz: Wir müssen lediglich

$$\sigma \cap \tau \;\supseteq\; (\sigma^\vee + \tau^\vee)^\vee$$

nachweisen. Es sei $v \in (\sigma^\vee + \tau^\vee)^\vee$. Dann gilt $u(v) \geq 0$ für jedes $u \in \sigma^\vee$ und $u'(v) \geq 0$ für jedes $u' \in \tau^\vee$. Das impliziert bereits

$$v \;\in\; (\sigma^\vee)^\vee \cap (\tau^\vee)^\vee \;=\; \sigma \cap \tau.$$

Zu (ii). Wir schreiben $\sigma = \alpha^\vee$ und $\tau = \beta^\vee$ mit polyedrischen konvexen Kegeln α und β. Wie wir bereits gezeigt haben, gilt

$$(\alpha \cap \beta)^\vee \;=\; \alpha^\vee + \beta^\vee.$$

Dualisiert man diese Gleichung und setzt dann $\sigma = \alpha^\vee$ sowie $\tau = \beta^\vee$ wieder ein, so steht die gewünschte Gleichung da. □

Bemerkung 2.3.9. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und U sein Dualraum. Jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq V$ definiert einen Untervektorraum

$$A^\perp \;:=\; \{u \in U;\; u(v) = 0 \text{ für alle } v \in A\} \;=\; \bigcap_{v \in A} v^\perp \;\subseteq_{\mathrm{lin}}\; U.$$

Dabei gilt stets $A^\perp = \mathrm{Lin}(A)^\perp$ und $A^{\perp\perp} = \mathrm{Lin}(A)$. Ist weiter $A \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist A ein polyedrischer konvexer Kegel, und es gilt $A^\perp = A^\vee$.

Satz 2.3.10. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Für jede Seite $\tau \preccurlyeq \sigma$ gilt:*

(i) $\tau \;=\; \mathrm{Lin}(\tau) \cap \sigma$,
(ii) $\tau^\vee \;=\; \tau^\perp + \sigma^\vee$.

Beweis. Zu (i). Die Inklusion "$\subseteq$" ist offensichtlich. Zum Nachweis von "$\supseteq$" sei $u \in \sigma^\vee$ mit $\tau = u^\perp \cap \sigma$. Dann gilt $\mathrm{Lin}(\tau) \subseteq u^\perp$. Es folgt

$$\mathrm{Lin}(\tau) \cap \sigma \;\subseteq\; u^\perp \cap \sigma \;=\; \tau.$$

Aussage (ii) ergibt sich durch Dualisieren der ersten Aussage: Mit Satz 2.3.8 und Bemerkung 2.3.9 erhalten wir

$$\tau^\vee \;=\; (\mathrm{Lin}(\tau) \cap \sigma)^\vee \;=\; \mathrm{Lin}(\tau)^\vee + \sigma^\vee \;=\; \mathrm{Lin}(\tau)^\perp + \sigma^\vee \;=\; \tau^\perp + \sigma^\vee.$$

□

Satz 2.3.11. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Dann hat man folgende Aussagen:*

(i) *Für alle $\tau \preccurlyeq \sigma$ und $\varrho \preccurlyeq \tau$ gilt $\varrho \preccurlyeq \sigma$.*
(ii) *Für je zwei $\tau_1, \tau_2 \preccurlyeq \sigma$ gilt $\tau_1 \cap \tau_2 \preccurlyeq \tau_1, \tau_2, \sigma$.*

Somit ist "$\preccurlyeq$" eine Partialordnung auf $\mathrm{Seiten}(\sigma)$. *Bezüglich "$\preccurlyeq$" gibt es in* $\mathrm{Seiten}(\sigma)$ *genau ein maximales und genau ein minimales Element:*

$$\sigma_{\max} \;=\; \sigma, \qquad\qquad \sigma_{\min} \;=\; \bigcap_{\tau \preccurlyeq \sigma} \tau.$$

Weiter existiert zu gegebenen $\tau_1, \ldots, \tau_k \in$ $\mathrm{Seiten}(\sigma)$ *genau ein $\tau \in$* $\mathrm{Seiten}(\sigma)$*, das maximal ist mit der Eigenschaft "$\tau \preccurlyeq \tau_1, \ldots, \tau \preccurlyeq \tau_k$".*

Beweis. Zu (i). Es seien $u_\tau \in \sigma^\vee$ und $u_\varrho \in \tau^\vee$ ausschneidende Linearformen für τ bzw. ϱ. Gemäß Satz 2.3.10 haben wir

$$\tau^\vee \;=\; \tau^\perp + \sigma^\vee.$$

Also gibt es eine Darstellung $u_\varrho = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in \tau^\perp$ und $u_2 \in \sigma^\vee$. Wegen $\tau^\perp \subseteq \varrho^\perp$ gilt $u_1 = 0$ auf ϱ. Für $u_\tau + u_2 \in \sigma^\vee$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\varrho \;&=\; \{v \in \tau;\ u_\varrho(v) = 0\} \\
&=\; \{v \in \tau;\ u_2(v) = 0\} \\
&=\; \{v \in \sigma;\ u_\tau(v) = 0,\ u_2(v) = 0\} \\
&=\; \{v \in \sigma;\ u_\tau(v) + u_2(v) = 0\} \\
&=\; (u_\tau + u_2)^\perp \cap \sigma.
\end{aligned}$$

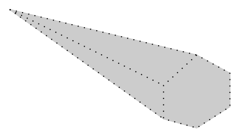
Zu (ii). Sind $u_i \in \sigma^\vee$ ausschneidende Linearformen für τ_i, so ist $u_1 + u_2 \in \sigma^\vee$ eine ausschneidende Linearform für $\tau_1 \cap \tau_2 \preccurlyeq \sigma$. Lemma 2.3.7 liefert $\tau_1 \cap \tau_2 \preccurlyeq \tau_1, \tau_2$. □

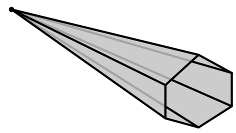
2.4. **Das relative Innere.**

Definition 2.4.1. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Das *relative Innere* $\sigma^\circ \subseteq \sigma$ eines polyedrischen konvexen Kegels $\sigma \subseteq V$ ist das Komplement der Vereinigung all seiner echten Seiten:

$$\sigma^\circ \ := \ \sigma \setminus \bigcup_{\tau \prec \sigma} \tau.$$

Aufgabe 2.4.2. Veranschauliche den Begriff des relativen Inneren anhand geeigneter Beispiele polyedrischer konvexer Kegel in $\mathbb{R}^n$ für $n \le 3$.





Beispiel 2.4.3. Das relative Innere des positiven Orthanten $\delta^n = \mathrm{Pos}(e_1, \ldots, e_n)$ in $\mathbb{K}^n$ besteht genau aus den strikten Positivkombinationen über $(e_1, \ldots, e_n)$:

$$(\delta^n)^\circ \ = \ \{\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}_{>0}\} \ = \ \mathbb{K}^n_{>0}.$$

Satz 2.4.4. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Dann ist σ die disjunkte Vereinigung über die relativen Inneren seiner Seiten:*

$$\sigma \ = \ \bigsqcup_{\tau \preccurlyeq \sigma} \tau^\circ.$$

Beweis. Zunächst sei vermerkt, dass jede Seite $\tau \preccurlyeq \sigma$ gemäß Satz 2.3.6 ein polyedrischer konvexer Kegel ist und τ° somit definiert ist. Wir zeigen, dass es zu jedem $v \in \sigma$ ein $\varrho \preccurlyeq \sigma$ gibt mit $v \in \varrho^\circ$. Satz 2.3.11 (ii) liefert

$$v \ \in \ \varrho \ := \ \bigcap_{\substack{\tau \preccurlyeq \sigma, \\ v \in \tau}} \tau \ \preccurlyeq \ \sigma.$$

Wir behaupten $v \in \varrho^\circ$. Andernfalls hätten wir $v \in \varrho_0 \prec \varrho$; siehe Definition 2.4.1. Satz 2.3.11 (i) liefert $\varrho_0 \preccurlyeq \sigma$, und nach Definition von ϱ gilt $\varrho \preccurlyeq \varrho_0$. Das impliziert $\varrho \subseteq \varrho_0 \subsetneq \varrho$; Widerspruch.

Wir zeigen, dass für je zwei Seiten $\tau, \varrho \preccurlyeq \sigma$ mit $\tau \ne \varrho$ die relativen Inneren τ° und ϱ° disjunkt sind. Dazu betrachten wir den Durchschnitt $\tau \cap \varrho$. Nach Satz 2.3.11 (ii) ist dies eine Seite von ϱ und τ. Nehmen wir an, es gelte $\tau^\circ \cap \varrho^\circ \ne \emptyset$. Dann enthält $\varrho \cap \tau$ Punkte aus den relativen Inneren von ϱ und τ und wäre somit weder eine echte Seite von ϱ noch von τ. Es folgt $\varrho = \varrho \cap \tau = \tau$; Widerspruch. $\square$

Satz 2.4.5. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel und $v \in \sigma$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt $v \in \sigma^\circ$.*
(ii) *Es gilt $u(v) > 0$ für alle $u \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp$.*
(iii) *Es gilt $\sigma^\perp = \sigma^\vee \cap v^\perp$.*

Beweis. Zu "(i)⇒(ii)". Offensichtlich gilt $u(v) \ge 0$ für alle $u \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp$. Nehmen wir an, es gelte $u(v) = 0$ für ein $u \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp$. Wegen $u \notin \sigma^\perp$ ist $\tau := u^\perp \cap \sigma$ eine echte Seite von σ. Wegen $u(v) = 0$ haben wir $v \in \tau$; Widerspruch zu $v \in \sigma^\circ$.

Wir zeigen "(ii)⇒(iii)". Offensichtlich gilt $\sigma^\perp \subseteq \sigma^\vee$, und wegen $v \in \sigma$ haben wir $\sigma^\perp \subseteq v^\perp$. Somit gilt $\sigma^\perp \subseteq \sigma^\vee \cap v^\perp$. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion nehmen wir an, es existiere ein $u \in \sigma^\vee \cap v^\perp$ mit $u \notin \sigma^\perp$. Dann haben wir $u(v) = 0$ und $u \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp$; Widerspruch zu (ii).

Für den Nachweis von "(iii)⇒(i)" nehmen wir an, es gelte $v \notin \sigma^\circ$. Dann gibt es eine echte Seite $\tau \prec \sigma$ mit $v \in \tau$. Es sei $u \in \sigma^\vee$ eine ausschneidende Linearform für τ. Dann gilt $u(v) = 0$ und somit $u \in v^\perp$. Wegen $\tau \prec \sigma$ haben wir $u \notin \sigma^\perp$. Widerspruch zu $\sigma^\perp = \sigma^\vee \cap v^\perp$. □

Folgerung 2.4.6. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel und $u \in \sigma^\vee$. Gilt $u(v) = 0$ für ein $v \in \sigma^\circ$, so gilt $u|_\sigma = 0$.*

Folgerung 2.4.7. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Gilt $0 \in \sigma^\circ$, so ist $\sigma \subseteq V$ ein Untervektorraum.*

Beweis. Satz 2.4.5 liefert $\sigma^\perp = \sigma^\vee \cap 0^\perp = \sigma^\vee$. Somit ist $\sigma = \sigma^{\vee\vee} = \sigma^{\perp\vee} = \sigma^{\perp\perp}$ ein Untervektorraum von V; siehe Satz 2.1.17 und Bemerkung 2.3.9. □

Satz 2.4.8. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varrho, \sigma \subseteq V$ polyedrische konvexe Kegel mit $\varrho \subseteq \sigma$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte minimale Seite $\tau \preccurlyeq \sigma$ mit $\varrho \subseteq \tau$. Diese Seite erfüllt zudem $\varrho^\circ \subseteq \tau^\circ$.*

Beweis. Gemäß Satz 2.3.11 (ii) erhalten wir die eindeutig bestimmte minimale Seite $\tau \preccurlyeq \sigma$ mit $\varrho \subseteq \tau$ durch

$$\tau \ := \ \bigcap_{\substack{\sigma' \preccurlyeq \sigma, \\ \varrho \subseteq \sigma'}} \sigma' \ \preccurlyeq \ \sigma.$$

Es sei $v \in \varrho^\circ$. Nehmen wir an, es gelte $v \notin \tau^\circ$. Dann haben wir $v \in \tau_0$ mit einer echten Seite $\tau_0 \prec \tau$. Ist $u \in \tau^\vee$ eine ausschneidende Linearform für τ_0, so gilt $u \in \varrho^\vee$ und $u(v) = 0$. Folgerung 2.4.6 liefert $u|_\varrho = 0$. Das impliziert $\varrho \subseteq \tau_0$; Widerspruch zur Minimalität von τ. □

Satz 2.4.9. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma = \mathrm{Pos}(v_1, \ldots, v_r)$ ein polyedrischer konvexer Kegel in V. Dann besteht das relative Innere von σ aus den strikten Positivkombinationen über $v_1, \ldots, v_r$:*

$$\sigma^\circ \ = \ \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r; \ \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}_{>0}\}.$$

Beweis. Zu "$\supseteq$". Es sei $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$ eine strikte Positivkombination. Für jede Linearform $u \in \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp$ haben wir

$$u(v) \ = \ \lambda_1 u(v_1) + \ldots + \lambda_r u(v_r).$$

Wegen $u \notin \sigma^\perp$ gibt es dabei mindestens ein i mit $u(v_i) > 0$. Das impliziert bereits $u(v) > 0$. Satz 2.4.5 liefert $v \in \sigma^\circ$.

Zu "$\subseteq$". Es sei $v \in \sigma^\circ$. Wir betrachten alle Darstellungen von v als (nicht notwendigerweise strikte) Positivkombination über $v_1, \ldots, v_r$. Diese sind von der Gestalt

$$v \ = \ v(\lambda) \ := \ \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r, \qquad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r_{\geq 0}.$$

Fall 1. Für jedes $i = 1, \ldots, r$ finden wir eine Darstellung $v = v(\lambda)$ mit $\lambda_i \neq 0$. Aufsummieren dieser Darstellungen liefert das skalare Vielfache rv als strikte Positivkombination über $v_1, \ldots, v_r$. Folglich ist auch v eine strikte Positivkombination über $v_1, \ldots, v_r$.

Fall 2. Es gibt Indizes i mit $\lambda_i = 0$ in jeder Darstellung $v = v(\lambda)$. Durch Umnummerieren erreichen wir, dass $i = 1, \ldots, k$ genau diese Indizes sind. Wir zeigen, dass Fall 2 nicht eintritt. Zunächst erhalten wir für den Vektor $v \in \sigma^\circ$ eine Darstellung

$$v \ = \ v(\lambda) \ = \ \lambda_{k+1}v_{k+1} + \ldots + \lambda_r v_r, \qquad \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_r \ \in \ \mathbb{K}_{>0}.$$

Es seien $u_1, \ldots, u_s \in \sigma^\vee$ Linearformen mit $\sigma = \mathrm{POrt}(u_1, \ldots, u_s)$. Wir betrachten den Vektor $v' := v_1 + \ldots + v_k \in \sigma$ und wählen ein $\beta \in \mathbb{K}_{>0}$, sodass

$$\beta \ \le \ \frac{u_j(v)}{u_j(v')}, \qquad \text{für alle } j = 1, \ldots, s \text{ mit } u_j(v) > 0, \ u_j(v') > 0.$$

Weiter sei $v'' := v - \beta v'$. Wir zeigen $v'' \in \sigma$, indem wir $u_j(v'') \ge 0$ verifizieren für $j = 1, \ldots, s$. Dafür vermerken wir zunächst

$$u_j(v) \ \ge \ 0, \quad u_j(v') \ \ge \ 0, \quad u_j(v'') \ = \ u_j(v) - \beta u_j(v'), \quad j = 1, \ldots, s.$$

Gilt $u_j(v) = 0$, so gilt $u_j(v') = 0$ gemäß Folgerung 2.4.6 und somit $u_j(v'') = 0$. Für $u_j(v') = 0$ hat man $u_j(v'') = u_j(v) \ge 0$. Sind $u_j(v)$ und $u_j(v')$ beide positiv, so erhalten wir $u_j(v'') \ge 0$ nach Wahl von β.

Schreibt man nun $v'' = \lambda_1'' v_1 + \ldots + \lambda_r'' v_r$ als Positivkombination und setzt dies zusammen mit $v' = v_1 + \ldots + v_k$ in die Gleichung

$$v \ = \ \beta v' + v''$$

ein, so erhält man v als eine Positivkombination über $v_1, \ldots, v_r$, bei der keiner der ersten k Koeffizienten verschwindet; Widerspruch. □

Folgerung 2.4.10. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und σ ein polyedrischer konvexer Kegel in V. Dann ist das relative Innere $\sigma^\circ \subseteq \sigma$ nicht leer.*

2.5. **Spitze Kegel.**

Definition 2.5.1. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein polyedrischer konvexer Kegel $\sigma \subseteq V$ heißt *spitz*, falls er keine Gerade von V enthält.

Beispiel 2.5.2. Der positive Orthant $\delta^n = \mathrm{Pos}(e_1, \ldots, e_n) \subseteq \mathbb{K}^n$ ist ein spitzer polyedrischer konvexer Kegel.

Bemerkung 2.5.3. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Ist σ spitz, so ist auch jede Seite von σ spitz.

Satz 2.5.4. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma \subseteq V$ ein spitzer polyedrischer konvexer Kegel. Gilt*

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \ = \ 0$$

für $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}_{\ge 0}$ und Vektoren $v_1, \ldots, v_r \in \sigma$, so gilt $\lambda_i = 0$ oder $v_i = 0$ für jedes $i = 1, \ldots, r$.

Beweis. Nehmen wir an, in der annulierenden Positivkombination hätten wir $\lambda_i \neq 0$ und $v_i \neq 0$ für ein i. Dann erhalten wir

$$-v_i \ = \ \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} v_j \ \in \ \sigma.$$

Somit ist auch die Gerade $G = \mathrm{Lin}(v_i) = \mathrm{Pos}(v_i, -v_i)$ in σ enthalten. Widerspruch zu σ spitz. □

Bemerkung 2.5.5. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist für jedes $0 \neq v \in V$ der der von v erzeugte Strahl

$$\varrho \ = \ \mathrm{Pos}(v) \ \subseteq \ V$$

ein spitzer polyedrischer konvexer Kegel. Weiter ist jeder eindimensionale spitze polyedrische konvexe Kegel in V ein Strahl.

Definition 2.5.6. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma \subseteq V$ ein spitzer polyedrischer konvexer Kegel. Ein *Extremalstrahl* von σ ist eine eindimensionale Seite $\varrho \preccurlyeq \sigma$.

Satz 2.5.7. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\sigma \subseteq V$ ein spitzer polyedrischer konvexer Kegel, $0 \neq v \in \sigma$ und $\varrho := \mathrm{Pos}(v)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *ϱ ist ein Extremalstrahl von σ.*
(ii) *Gilt $v = v_1 + \ldots + v_r$ mit $v_i \in \sigma$, so gilt $v_1, \ldots, v_r \in \varrho$.*

Beweis. Zu "(i)⇒(ii)". Es sei $u \in \sigma^\vee$ eine ausschneidende Linearform für ϱ. Ist eine Darstellung $v = v_1 + \ldots + v_r$ mit $v_i \in \sigma$ gegeben, so haben wir

$$u(v_1) + \ldots + u(v_r) \ = \ u(v) \ = \ 0.$$

Das impliziert $u(v_i) = 0$ und somit $v_i \in \varrho$ für alle i. Wir zeigen "(ii)⇒(i)". Es sei $\tau \preccurlyeq \sigma$ minimal mit $\varrho \subseteq \tau$. Dabei gilt $\tau = \mathrm{Pos}(v_1, \ldots, v_r)$ mit $v_1, \ldots, v_r \in \tau$ und

$$v \ \in \ \varrho^\circ \ \subseteq \ \tau^\circ$$

gemäß Sätzen 2.3.6 und 2.4.8. Satz 2.4.9 liefert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$ mit $\lambda_i \in \mathbb{K}_{>0}$. Es folgt $\lambda_i v_i \in \varrho$ für $i = 1, \ldots, r$ und somit $\varrho = \tau \preccurlyeq \sigma$. □

Folgerung 2.5.8. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\sigma = \mathrm{Pos}(v_1, \ldots, v_r)$ ein spitzer polyedrischer konvexer Kegel in V und $\varrho_i := \mathrm{Pos}(v_i)$, wobei $i = 1, \ldots, r$.*

(i) *Gilt $v_i \notin \mathrm{Pos}(v_j;\ j \neq i)$ für ein $1 \le i \le r$, so ist ϱ_i ein Extremalstrahl des Kegels σ.*

(ii) *Gilt* $v_i \notin \mathrm{Pos}(v_j;\ j \neq i)$ *für alle* $i = 1, \dots, r$, *so gilt* $\varrho_i \neq \varrho_j$ *für* $i \neq j$, *und* $\varrho_1, \dots, \varrho_r$ *sind genau die Extremalstrahlen von* σ.

Beweis. Zu (i). Die Voraussetzung impliziert insbesondere $v_i \neq 0$. Wir weisen Eigenschaft 2.5.7 (ii) für ϱ_i nach. Dazu sei eine Darstellung $v_i = v_1' + \ldots + v_s'$ mit $v_k' \in \sigma$ gegeben. Schreibt man in dieser Gleichung jedes v_k' als Positivkombination über $v_1, \dots, v_r$, so erhält man damit

$$v_i \;=\; \lambda_i v_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}_{\geq 0},$$

wobei λ_i, λ_j die Summen der Koeffizienten der v_i, v_j aus den Darstellungen der v_k' sind. Wegen $v_i \notin \mathrm{Pos}(v_j;\ j \neq i)$ haben wir $\lambda_i \geq 1$. Wir addieren $-v_i$ zu jeder Seite der obigen Gleichung, wenden Satz 2.5.4 an und erhalten $\lambda_i = 1$ sowie $\lambda_j v_j = 0$ für alle $j \neq i$. Das impliziert $v_1', \dots, v_s' \in \varrho_i$.

Zu (ii). Nach (i) ist jedes ϱ_i ein Extremalstrahl von σ. Offensichtlich sind $\varrho_1, \dots, \varrho_r$ paarweise verschieden, und Satz 2.5.7 garantiert, dass σ keine weiteren Extremalstrahlen besitzt. □

Folgerung 2.5.9. *Es seien* V *ein* $\mathbb{K}$-*Vektorraum,* σ *ein spitzer polyedrischer konvexer Kegel in* V *und* $\varrho_1, \dots, \varrho_r$ *seine Extremalstrahlen. Dann gilt* $\sigma = \varrho_1 + \ldots + \varrho_r$.

Beweis. Es sei $\sigma = \mathrm{Pos}(v_1, \dots, v_r)$ mit $v_1, \dots, v_r \in V$. Wir dürfen dabei annehmen, dass kein v_i Positivkombination über die übrigen v_j ist. Folgerung 2.5.8 liefert dann die Behauptung. □

Lemma 2.5.10. *Es sei* V *ein* $\mathbb{K}$-*Vektorraum. Enthält ein polyedrischer konvexer Kegel* $\sigma \subseteq V$ *einen Untervektorraum* $V_0 \subseteq V$, *so ist* V_0 *in jeder Seite von* σ *enthalten.*

Beweis. Es sei $v \in V_0$. Dann haben wir $u(v) \geq 0$ sowie $-u(v) = u(-v) \geq 0$ und somit $u(v) = 0$ für alle $u \in \sigma^\vee$. Folglich ist v in jeder Seite von σ enthalten. □

Satz 2.5.11. *Es seien* V *ein* $\mathbb{K}$-*Vektorraum und* $\sigma \subseteq V$ *ein polyedrischer konvexer Kegel mit minimaler Seite* $\sigma_{\min} \preccurlyeq \sigma$. *Dann gilt*

$$\sigma = \sigma_{\min} \iff \sigma = \sigma^\circ \iff \sigma \subseteq_{\mathrm{lin}} V.$$

Beweis. Es gilt genau dann $\sigma = \sigma_{\min}$, wenn σ keine echten Seiten besitzt. Letzteres ist gemäß Definition des relativen Inneren äquivalent zu $\sigma = \sigma^\circ$. Gilt $\sigma = \sigma^\circ$, so haben wir $0 \in \sigma^\circ$ und Folgerung 2.4.7 garantiert $\sigma \subseteq_{\mathrm{lin}} V$. Gilt $\sigma \subseteq_{\mathrm{lin}} V$, so haben wir $u(v) \geq 0$ sowie $-u(v) = u(-v) \geq 0$ und somit $u(v) = 0$ für alle $u \in \sigma^\vee$ und $v \in \sigma$. Das bedeutet $\sigma^\vee = \sigma^\perp$. Satz 2.4.5 liefert $\sigma = \sigma^\circ$. □

Satz 2.5.12. *Es seien* V *ein* $\mathbb{K}$-*Vektorraum und* $\sigma \subseteq V$ *ein polyedrischer konvexer Kegel. Dann ist* $\sigma_{\min} \preccurlyeq \sigma$ *der maximale in* σ *enthaltene Untervektorraum von* V.

Beweis. Die minimale Seite $\tau := \sigma_{\min} \preccurlyeq \sigma$ besitzt keine echten Seiten. Das bedeutet $\tau = \tau_{\min}$. Nach Satz 2.5.11 ist $\sigma_{\min} = \tau$ ein Untervektorraum von V. Die Maximalität ergibt sich direkt aus Lemma 2.5.10. □

Satz 2.5.13. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel, $V_0 := \sigma_{\min}$ seine minimale Seite, $\tilde{V} := V/V_0$ und $P\colon V \to V/V_0$ die Projektion.*

(i) *Das Bild $\tilde{\sigma} := P(\sigma)$ ist ein spitzer polyedrischer konvexer Kegel in $\tilde{V}$, und es gilt $P^{-1}(\tilde{\sigma}) = \sigma$.*
(ii) *Man hat zueinander inverse ordnungserhaltende Bijektionen der jeweiligen Seitenverbände:*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Seiten}(\sigma) & \longleftrightarrow & \mathrm{Seiten}(\tilde{\sigma}) \\ \tau & \mapsto & P(\tau), \\ P^{-1}(\tilde{\tau}) & \leftarrow\!\shortmid & \tilde{\tau}. \end{array}$$

(iii) *Es gibt einen spitzen Kegel $\sigma' \subseteq V$ mit $\sigma = \sigma_{\min} + \sigma'$, sodass P eine Injektion $\mathrm{Lin}(\sigma') \to \tilde{V}$ definiert.*

Beweis. Zu (i). Als Bild des endlich erzeugten konvexen Kegels $\sigma \subseteq V$ unter der lienaren Abbildung P ist $\tilde{\sigma} \subseteq \tilde{V}$ gemäß Bemerkung 2.1.4 endlich erzeugt und somit polyedrisch. Weiter haben wir $v+V_0 \subseteq \sigma$ für jedes $v \in \sigma$. Das impliziert $P^{-1}(\tilde{\sigma}) = \sigma$. Wir zeigen, dass $\tilde{\sigma}$ spitz ist. Andernfalls gibt es eine Gerade $\tilde{G} \subseteq \tilde{\sigma}$. Das Urbild $P^{-1}(\tilde{G}) \subseteq \sigma$ ist dann ein Untervektorraum von V mit $V_0 \subsetneq P^{-1}(\tilde{G})$; Widerspruch zu Satz 2.5.12.

Zu (ii). Wir zeigen zunächst, dass die beiden Zuordnungen wohldefiniert sind. Wir beginnen mit $\tilde{\tau} \mapsto P^{-1}(\tilde{\tau})$. Es sei $\tilde{u}$ eine ausschneidende Linearform für $\tilde{\tau} \preccurlyeq \tilde{\sigma}$. Mit $u := \tilde{u} \circ P$ haben wir dann $u \in \sigma^\vee$ und

$$P^{-1}(\tilde{\tau}) \ = \ P^{-1}(\tilde{\sigma} \cap \tilde{u}^\perp) \ = \ P^{-1}(\tilde{\sigma}) \cap P^{-1}(\tilde{u}^\perp) \ = \ \sigma \cap u^\perp \ \preccurlyeq \ \sigma.$$

Es sei nun $\tau \preccurlyeq \sigma$ mit ausschneidender Linearform u gegeben. Wegen $u|_{V_0} = 0$ liefert der Homomorphiesatz ein $\tilde{u} \in \mathrm{LF}(\tilde{V})$ mit $u = \tilde{u} \circ P$. Mit der Surjektivität von P und $V_0 \subseteq \tau, \sigma$ erhalten wir $\tilde{u}|_{\tilde{\sigma}} \geq 0$ und $\tilde{u}^\perp = P(P^{-1}(\tilde{u}^\perp))$ sowie

$$P(\tau) \ = \ P(\sigma \cap u^\perp) \ = \ \tilde{\sigma} \cap P(P^{-1}(\tilde{u}^\perp)) \ = \ \tilde{\sigma} \cap \tilde{u}^\perp \preccurlyeq \tilde{\sigma}.$$

Wir zeigen, dass die Abbildungen $\tau \mapsto P(\tau)$ und $\tilde{\tau} \mapsto P^{-1}(\tilde{\tau})$ zueinander invers sind. Die Surjektivität von P impliziert $P(P^{-1}(\tilde{\tau})) = \tilde{\tau}$ für jedes $\tilde{\tau} \preccurlyeq \tilde{\sigma}$. Ist $\tau \preccurlyeq \sigma$ gegeben, so haben wir $v + V_0 \subseteq \tau$ für jedes $v \in \tau$, und es folgt $P^{-1}(P(\tau)) = \tau$.

Zu (iii). Wir wählen eine direkte Zerlegung $V = V_0 \oplus V'$. Dann ist die Einschränkung $P|_{V'}\colon V' \to \tilde{V}$ ein Isomorphismus. Somit ist $\sigma' := (P|_{V'})^{-1}(\tilde{\sigma}) \subseteq V'$ ein spitzer polyedrischer konvexer Kegel mit $P(\sigma') = \tilde{\sigma}$, wir haben $\sigma = P^{-1}(\tilde{\sigma}) = \sigma_{\min} + \sigma'$, und die Einschränkung von P auf $\mathrm{Lin}(\sigma')$ ist injektiv. $\square$

2.6. **Die Seiten des Dualkegels.**

Satz 2.6.1. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, U sein Dualraum, $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel und $\omega := \sigma^\vee \subseteq U$. Dann hat man Bijektionen*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Seiten}(\sigma) & \longleftrightarrow & \mathrm{Seiten}(\omega) \\ \tau & \mapsto & \tau^* \ := \ \tau^\perp \cap \omega, \\ \eta^\perp \cap \sigma \ =: \ \eta^* & \mapsfrom & \eta. \end{array}$$

Diese Abbildungen sind weiter zueinander invers und ordnungsumkehrend, d.h., für alle $\varrho, \tau \preccurlyeq \sigma$ und alle $\zeta, \eta \preccurlyeq \omega$ gilt

$$\tau^{**} = \tau, \quad \eta^{**} = \eta, \qquad \varrho \preccurlyeq \tau \Rightarrow \varrho^* \succcurlyeq \tau^*, \quad \zeta \preccurlyeq \eta \Rightarrow \zeta^* \succcurlyeq \eta^*.$$

Es gilt $\omega^* = \sigma \cap -\sigma \subseteq_{\mathrm{lin}} V$, und ω^* ist die eindeutig bestimmte minimale Seite von σ. Weiter gilt für jedes $\tau \preccurlyeq \sigma$ die Dimensionsformel

$$\dim(\tau) + \dim(\tau^*) \ = \ \dim(V).$$

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, dass $\tau^* = \tau^\perp \cap \omega$ eine Seite von ω ist. Nach Folgerung 2.4.10 gibt es ein Element $v \in \tau^\circ$. Satz 2.4.5 liefert $\tau^\perp = \tau^\vee \cap v^\perp$, und wegen $\tau \subseteq \sigma$ haben wir $\omega \subseteq \tau^\vee$. Damit ergibt sich

$$\tau^* \ = \ (\tau^\vee \cap v^\perp) \cap \omega \ = \ v^\perp \cap \omega \ \preccurlyeq \ \omega.$$

Somit ist die Abbildung $\tau \mapsto \tau^*$ wohldefiniert. Wir zeigen, dass sie zudem surjektiv ist. Dazu sei $\eta \preccurlyeq \omega$ gegeben. Dann gibt es ein $v \in \sigma$ mit $\eta = v^\perp \cap \omega$. Nach Satz 2.4.4 gibt es eine Seite $\tau \preccurlyeq \sigma$ mit $v \in \tau^\circ$. Mit Satz 2.4.5 folgt

$$\eta \ = \ v^\perp \cap \omega \ = \ v^\perp \cap \tau^\vee \cap \omega \ = \ \tau^\perp \cap \omega \ = \ \tau^*.$$

Das beweist die Surjektivität der Abbildung $\tau \mapsto \tau^*$. Wegen $\sigma = \omega^\vee$ erhalten wir mit denselben Argumenten auch die Wohldefiniertheit und die Surjektivität von $\eta \mapsto \eta^*$.

Wir zeigen nun, dass $\tau \mapsto \tau^*$ ordnungsumkehrend ist. Dazu seien $\varrho \preccurlyeq \tau \preccurlyeq \sigma$ gegeben. Mit Lemma 2.3.7 erhalten wir

$$\varrho \preccurlyeq \tau \ \Rightarrow \ \varrho^\perp \supseteq \tau^\perp \ \Rightarrow \ \varrho^\perp \cap \omega \supseteq \tau^\perp \cap \omega \ \Rightarrow \ \varrho^* \supseteq \tau^* \ \Rightarrow \ \varrho^* \succcurlyeq \tau^*$$

Analog sehen wir, dass $\eta \mapsto \eta^*$ ordnungsumkehrend ist. Wir zeigen, dass $\tau = \tau^{**}$ für jedes $\tau \preccurlyeq \sigma$ gilt. Mit Bemerkung 2.3.9 und Satz 2.3.10 (i) erhalten wir zunächst

$$\tau^{**} \ = \ (\tau^*)^\perp \cap \sigma \ = \ (\omega \cap \tau^\perp)^\perp \cap \sigma \ \supseteq \ \tau^{\perp\perp} \cap \sigma \ = \ \mathrm{Lin}(\tau) \cap \sigma \ = \ \tau.$$

Mit Lemma 2.3.7 folgt $\tau^{**} \succcurlyeq \tau$. Um $\tau \succcurlyeq \tau^{**}$ einzusehen, wählen wir ein $\eta \preccurlyeq \omega$ mit $\tau = \eta^*$. Dann haben wir $\eta \preccurlyeq \eta^{**}$. Damit folgt

$$\tau \ = \ \eta^* \ \succcurlyeq \ \eta^{***} \ = \ \tau^{**}.$$

Ebenso sieht man $\eta^{**} = \eta$ für jedes $\eta \preccurlyeq \omega$. Folglich sind die beiden Abbildungen $\tau \mapsto \tau^*$ und $\eta \mapsto \eta^*$ invers zueinander.

Da $\omega \preccurlyeq \omega$ maximal und $\omega \mapsto \omega^*$ ordnungsumkehrend ist, muss $\omega^* \preccurlyeq \sigma$ minimal sein. Satz 2.5.12 liefert $\omega^* \subseteq_{\mathrm{lin}} V$. Weiter haben wir

$$\omega^* \ = \ \omega^\perp \cap \sigma \ = \ \omega^\perp \cap \omega^\vee \ = \ \omega^\perp \ = \ \sigma \cap -\sigma.$$

Die Dimensionsformel machen wir uns schrittweise klar. Zunächst betrachten wir die maximale Seite $\sigma \preccurlyeq \sigma$. Mit Bemerkung 2.3.9 erhalten wir hier

$$\sigma^* \ = \ \sigma^\perp \cap \omega \ = \ \sigma^\perp \ = \ \mathrm{Lin}(\sigma)^\perp$$

Ist $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis für V mit $\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{Lin}(\sigma)$, so bilden die letzten $n-k$ Vektoren der dualen Basis B^* von U eine Basis für $\mathrm{Lin}(\sigma)^\perp$. Es folgt

$$\dim(\sigma) + \dim(\sigma^*) \ = \ \dim(\mathrm{Lin}(\sigma)) + \dim(\mathrm{Lin}(\sigma)^\perp) \ = \ \dim(V).$$

Analog erhalten wir die Dimensionsformel für die minimale Seite $\sigma \cap -\sigma$ von σ, denn in diesem Fall haben wir

$$\sigma \cap -\sigma \ = \ \omega^*, \qquad (\sigma \cap -\sigma)^* \ = \ \omega.$$

Es sei nun $\tau \preccurlyeq \sigma$ eine beliebige Seite. Wir betrachten den polyedrischen konvexen Kegel $\tilde{\sigma} := \mathrm{Lin}(\tau) + \sigma$ in V. Der zugehörige Dualkegel ist gemäß Satz 2.3.8 und Bemerkung 2.3.9 gegeben durch

$$\tilde{\sigma}^\vee \ = \ \tau^\perp \cap \omega \ = \ \tau^*.$$

Weiter ist $\mathrm{Lin}(\tau)$ eine Seite von $\tilde{\sigma}$, da jede ausschneidende Linearform $u \in \sigma^\vee$ für τ auch ausschneidende Linearform für $\mathrm{Lin}(\tau) \subseteq \tilde{\sigma}$ ist. Als Untervektorraum von V ist $\mathrm{Lin}(\tau)$ in jeder Seite von $\tilde{\sigma}$ enthalten und ist somit die minimale Seite von $\tilde{\sigma}$. Die Dimensionsformel ergibt sich daher mit

$$\dim(\tau) + \dim(\tau^*) \ = \ \dim(\mathrm{Lin}(\tau)) + \dim(\tilde{\sigma}^\vee) \ = \ \dim(V).$$

□

Erinnerung 2.6.2. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein polyedrischer konvexer Kegel $\sigma \subseteq V$ heißt *spitz*, falls er keine Gerade enthält, und man nennt ihn *volldimensional*, wenn $\dim(\sigma) = \dim(V)$ gilt.

Satz 2.6.3. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, U sein Dualraum und $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *σ ist spitz.*
(ii) *Es gilt $\sigma \cap -\sigma = \{0\}$.*
(iii) *Es gilt $\sigma^\vee - \sigma^\vee = U$.*
(iv) *$\sigma^\vee$ ist volldimensional.*

Beweis. Zu "(i)⇒(ii)". Nach Satz 2.6.1 haben wir $\sigma_{\min} = \sigma \cap -\sigma \subseteq_{\mathrm{lin}} V$ für die minimale Seite von σ. Da σ keine Gerade enthält, muss $\sigma \cap -\sigma = \{0\}$ gelten. Aussage (iii) ergibt sich durch Dualisieren von (ii); siehe Satz 2.3.8. Die Implikation "(iii)⇒(iv)" erhalten wir mit $\sigma^\vee - \sigma^\vee = \mathrm{Lin}(\sigma^\vee)$; siehe Bemerkung 1.3.9.

Für den Nachweis von "(iv)⇒(i)" nehmen wir an, dass σ eine Gerade $\mathrm{Lin}(v)$ enthält. Für jedes $u \in \sigma^\vee$ haben wir dann $u(v) \geq 0$ und $u(-v) \geq 0$. Es folgt $u(v) = 0$ für alle $u \in \sigma^\vee$ und somit $u(v) = 0$ für alle $u \in \mathrm{Lin}(\sigma^\vee) = V^*$. Das bedeutet $v = 0$; Widerspruch zu $\dim(\mathrm{Lin}(v)) = 1$. □

Definition 2.6.4. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Eine *Facette* von σ ist eine Seite $\sigma_0 \prec \sigma$ der Dimension $\dim(\sigma) - 1$.

Satz 2.6.5. *Es seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma \subseteq V$ ein spitzer volldimensionaler polyedrischer konvexer Kegel.*

(i) *Für jedes $k = 0, \ldots, n$ besitzt σ Seiten der Dimension k.*
(ii) *Jede echte Seite von σ ist Facette einer Seite von σ.*
(iii) *Es gilt $\sigma = \sigma^\circ \cup \sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_m$ mit den Facetten $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \prec \sigma$.*

Beweis. Für $k = 0$ und $k = n$ ist die Aussage klar. Nach Satz 2.6.3 ist $\sigma^\vee$ ebenfalls spitz und volldimensional. Nach Folgerung 2.5.9 wird $\sigma^\vee$ von seinen Extremalstrahlen erzeugt und besitzt daher eindimensionale Seiten. Satz 2.6.1 garantiert somit, dass σ Facetten besitzt. Jede Facette $\tau \prec \sigma$ ist ihrerseits ein spitzer volldimensionaler Kegel in $\mathrm{Lin}(\tau)$ und besitzt, wie eben gesehen, ihrerseits Facetten $\tau' \prec \tau$. Jedes dieser τ' ist eine $(n-2)$-dimensionale Seite von σ. Iterieren wir diesen Prozess, so erhalten wir schließlich Aussage (i).

Für den Nachweis von (ii) sei $\tau \prec \sigma$ eine k-dimensionale Seite. Nach Satz 2.6.1 ist $\tau^* \preccurlyeq \sigma^\vee$ von der Dimension $n - k > 0$ und besitzt somit eine Facette $\eta \prec \tau^*$. Die entsprechende Seite $\eta^* \succcurlyeq \tau$ ist dann eine $(k+1)$-dimensionale Seite von σ.

Wir zeigen (iii). Es sei $v \in \sigma$. Gilt $v \in \sigma^\circ$, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls gilt $v \in \tau_0$ für eine echte Seite $\tau_0 \prec \sigma$. Nach (ii) ist τ_0 Facette einer Seite $\tau_1 \preccurlyeq \sigma$; wir haben also $v \in \tau_1$ und $\dim(\tau_1) = \dim(\tau_0) + 1$. Dieses Vorgehen iteriert man, bis man bei $v \in \tau_k$ mit einer Facette $\tau_k \prec \sigma$ landet. $\square$

2.7. **Simpliziale Kegel.**

Definition 2.7.1. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein polyedrischer konvexer Kegel $\sigma \subseteq V$ heißt *simplizial*, falls $\sigma = \mathrm{Pos}(v_1, \ldots, v_r)$ mit einer linear unabhängigen Familie $(v_1, \ldots, v_r)$ in V gilt.

Beispiel 2.7.2. Der positive Orthant $\delta^n = \mathrm{Pos}(e_1, \ldots, e_n) \subseteq \mathbb{K}^n$ ist ein simplizialer polyedrischer konvexer Kegel .

Satz 2.7.3. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Ist σ simplizial, so ist σ spitz.*

Beweis. Es sei $\sigma = \mathrm{Pos}(v_1, \ldots, v_r)$ mit $(v_1, \ldots, v_r)$ linear unabhängig in V. Nehmen wir an, der Kegel σ sei nicht spitz. Dann enthält σ eine Gerade. Insbesondere gibt es ein $0 \neq v \in \sigma$ mit $-v \in \sigma$. Wir wählen Darstellungen

$$v \ = \ \lambda_1^+ v_1 + \ldots + \lambda_r^+ v_r, \qquad\qquad -v \ = \ \lambda_1^- v_1 + \ldots + \lambda_r^- v_r$$

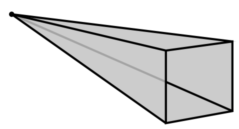
mit $\lambda_i^+, \lambda_i^- \in \mathbb{K}_{\geq 0}$ für $i = 1, \ldots, r$. Wegen $v \neq 0$ gilt mindestens einmal $\lambda_i^+ > 0$. Aufsummieren der beiden obigen Darstellungen liefert somit einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $(v_1, \ldots, v_r)$:

$$(\lambda_1^+ + \lambda_1^-)v_1 + \ldots + (\lambda_r^+ + \lambda_r^-)v_r \ = \ 0.$$

□

Bemerkung 2.7.4. Jeder spitze polyedrische konvexe Kegel der Dimension höchstens 2 ist simplizial.

Die ersten nichtsimplizialen spitzen polyedrischen konvexen Kegel tauchen in der Dimension 3 auf.



Bemerkung 2.7.5. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(v_1, \ldots, v_r)$ eine linear unabhängige Familie in V. Dann erhält man eine injektive lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{K}^r \ \to \ V, \qquad e_i \ \mapsto \ v_i.$$

Für den positiven Orthanten $\delta^n \subseteq \mathbb{K}^n$ und den von $v_1, \ldots, v_r$ erzeugten simplizialen Kegel $\sigma = \mathrm{Pos}(v_1, \ldots, v_r)$ gilt dabei $\sigma = \varphi(\delta^n)$.

Satz 2.7.6. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $(v_1, \ldots, v_r)$ eine linear unabhängige Familie in V und $\sigma = \mathrm{Pos}(v_1, \ldots, v_r)$ der davon erzeugte simpliziale Kegel.*

(i) *Für jedes $I \subseteq \{1, \ldots, r\}$ ist $\sigma_I := \mathrm{Pos}(v_i;\ i \in I)$ eine Seite von σ.*
(ii) *Für jedes $I \subseteq \{1, \ldots, r\}$ haben wir $\dim(\sigma_I) = |I|$.*
(iii) *Für jedes $k = 0, \ldots, n$ besitzt σ genau $\binom{r}{k}$ Seiten der Dimension k.*

Insbesondere ist $\sigma = \mathrm{Pos}(v_1, \ldots, v_r)$ von der Dimension r, besitzt genau r Extremalstrahlen und genau r Facetten.

Beweis. Der Basisergänzungssatz liefert uns eine Basis $(v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ für V. Es sei $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die zugehörige duale Basis. Dann definiert

$$u_I \;:=\; \varepsilon_1 v_1^* + \ldots + \varepsilon_n v_n^*, \qquad \varepsilon_i \;:=\; \begin{cases} 0, & 1 \le i \le r,\ i \in I, \\ 1, & 1 \le i \le r,\ i \notin I, \\ 0, & r+1 \le i \le n \end{cases}$$

eine ausschneidende Linearform für σ_I. Das beweist Aussage (i). Die zweite Aussage ergibt sich aus der linearen Unabhängigkeit von $(v_i;\ i \in I)$ und

$$\dim(\sigma_I) \;=\; \dim(\mathrm{Lin}(\sigma_I)) \;=\; \dim(\mathrm{Lin}(\mathrm{Pos}(v_i;\ i \in I))) \;=\; \dim(\mathrm{Lin}(v_i;\ i \in I)).$$

Zu (iii). Die Anzahl $m(r, k)$ der k-elementigen Teilmengen $I \subseteq \{1, \ldots, r\}$ ist bekanntlich durch den entsprechenden Binomialkoeffizienten gegeben:

$$m(r, k) \;=\; \binom{r}{k}.$$

Wir müssen noch zeigen, dass $\sigma_I \ne \sigma_J$ gilt für je zwei k-elementige Teilmengen $I, J \subseteq \{1, \ldots, r\}$ mit $I \ne J$. Zunächst haben wir einen Index $j \in J$ mit

$$v_j \;\notin\; \{v_i;\ i \in I\}.$$

Die lineare Unabhängigkeit von $(v_1, \ldots, v_r)$ impliziert $v_j \notin \mathrm{Lin}(v_i;\ i \in I)$. Es folgt $v_j \notin \mathrm{Pos}(v_i;\ i \in I)$ und somit $\sigma_I \ne \sigma_J$. □

Satz 2.7.7. *Es seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Der Kegel σ ist simplizial und volldimensional.*
(ii) *Für jedes $k = 0, \ldots, n$ besitzt σ genau $\binom{n}{k}$ Seiten der Dimension k.*
(iii) *σ ist spitz, volldimensional und hat höchstens n Extremalstrahlen.*

Beweis. Gilt (i), so haben wir $\sigma = \mathrm{Pos}(v_1, \ldots, v_r)$ mit einer linear unabhängigen Familie $(v_1, \ldots, v_r)$ in V. Da σ volldimensional ist, muss $r = n$ gelten. Mit Satz 2.7.6 erhalten wir dann Eigenschaft (ii).

Gilt (ii), so besitzt σ eine nulldimensionale Seite $\tau \preccurlyeq \sigma$. Nach Lemma 2.5.10 ist jeder in σ enthaltenene Untervektorraum V_0 von V bereits in $\tau = \{0\}$ enthalten. Insbesondere enthält σ keine Geraden und ist somit spitz. Weiter besitzt σ genau n eindimensionale Seiten $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$; dies sind gerade die Extremalstrahlen von σ. Da σ eine n-dimensionale Seite besitzt, ist σ volldimensional. Damit ist Eigenschaft (iii) für σ etabliert.

Gilt (iii), so bezeichnen wir mit $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$ die Extremalstrahlen von σ. Diese sind von der Form $\varrho_i = \mathrm{Pos}(v_i)$ mit $v_i \in \sigma$. Nach Folgerung 2.5.9 wird σ durch $v_1, \ldots, v_m$ erzeugt. Somit erhalten wir

$$\dim(\sigma) \;=\; \dim(\mathrm{Pos}(v_1, \ldots, v_m)) \;=\; \dim(\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_m)) \;\le\; m \;\le\; n.$$

Da σ volldimensional ist, muss $V = \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_m)$ gelten. Als Erzeugendensystem der Länge $m \le n$ für den n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist $(v_1, \ldots, v_m)$ linear unabhängig. Folglich ist σ simplizial. □

Folgerung 2.7.8. *Es seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Der Kegel σ ist simplizial und volldimensional.*
(ii) *Der Dualkegel $\sigma^\vee$ ist simplizial und volldimensional.*

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) ergibt sich aus den Sätzen 2.6.1, 2.7.7 und der Binomialkoeffizientenidentität
$$\binom{n}{k} \;=\; \binom{n}{n-k}.$$
□

Satz 2.7.9. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $S \subseteq V$ eine Teilmenge und $\sigma = \mathrm{Pos}(S)$ der davon erzeugte konvexe Kegel in V. Dann ist jedes $v \in \sigma$ eine Positivkombination über einer linear unabhängigen Familie $(v_1, \ldots, v_k)$ von Vektoren $v_i \in S$.*

Beweis. Es sei $v \in \sigma$ gegeben. Nach Definition der positiven Hülle ist v als Positivkombination über S darstellbar. Wir wählen eine unverkürzbare Darstellung
$$v \;=\; \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}_{\geq 0}, \quad v_1, \ldots, v_k \in S,$$
d.h., v ist nicht als Positivkombination über einer echten Auswahl der $v_1, \ldots, v_k$. Wir zeigen, dass $(v_1, \ldots, v_k)$ linear unabhängig ist. Andernfalls hätte man
$$0 \;=\; \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k, \quad (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \mathbb{K}^k \setminus \{0\}.$$
Mit $\lambda := \min(\lambda_i/\mu_i;\ i = 1, \ldots, k,\ \mu_i \neq 0)$ erhalten wir dann eine Darstellung von v als Positivkombination
$$v \;=\; v - \lambda \cdot 0 \;=\; (\lambda_1 - \lambda\mu_1)v_1 + \ldots + (\lambda_k - \lambda\mu_k)v_k.$$
Dabei gilt $\lambda = \lambda_i/\mu_i$ und somit $\lambda_i - \lambda\mu_i = 0$ für mindestens ein i; Widerspruch zur Unverkürzbarkeit von $(v_1, \ldots, v_k)$. □

Definition 2.7.10. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\sigma \subseteq V$ ein spitzer polyedrischer konvexer Kegel mit den Extremalstrahlen $\varrho_i = \mathrm{Pos}(v_i)$, wobei $i = 1, \ldots, r$. Ein *Teilkegel* von σ ist ein Kegel $\tau \subseteq \sigma$ der Form $\tau = \mathrm{Pos}(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ mit $k \leq r$ und $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq r$.

Folgerung 2.7.11. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist jeder spitze polyedrische konvexe Kegel $\sigma \subseteq V$ die Vereinigung seiner simplizialen Teilkegel.*

Beweis. Es seien $\varrho_i = \mathrm{Pos}(v_i)$, $i = 1, \ldots, r$, die Extremalstrahlen von σ. Nach Folgerung 2.5.9 wird σ durch $v_1, \ldots, v_r$ erzeugt. Satz 2.7.9 liefert die Behauptung. □

3. Konvexe Polyeder und Polytope

3.1. **Polytope und Polyeder 1.**

Definition 3.1.1. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt *Polytop*, falls es Vektoren $v_1, \ldots, v_r \in V$ gibt mit $B = \operatorname{Konv}(v_1, \ldots, v_r)$.

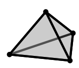
Bemerkung 3.1.2. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B \subseteq V$ ein Polytop.

(i) Nach Definition ist B nicht leer und und gemäß Satz 1.4.8 (ii) konvex.
(ii) Die *Dimension* von B ist die Dimension der affinen Hülle $\operatorname{Aff}(B) \subseteq V$.

Bemerkung 3.1.3. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die nulldimensionalen Polytope in V sind genau die einpunktigen Teilmengen $\{v\} \subseteq V$. Die eindimensionalen Polytope in V sind genau die Strecken

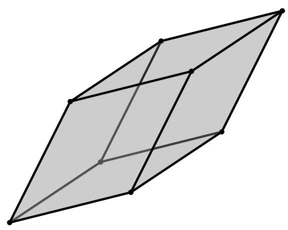
$$\operatorname{Konv}(v, v') = \{v + t(v' - v);\ t \in \mathbb{K},\ 0 \le t \le 1\} \subseteq V, \quad v, v' \in V,\ v' \neq v'.$$

Aufgabe 3.1.4. Veranschauliche den Begriff des Polytops mittels weiterer geeigneter Beispiele in $\mathbb{R}^n$ für $n \le 3$.



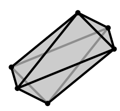
Beispiel 3.1.5. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis für V. Das zu $\mathcal{B}$ gehörige *Parallelotop* in V ist

$$P_{\mathcal{B}} \ := \ \operatorname{Konv}(\varepsilon_1 b_1 + \ldots + \varepsilon_n b_n;\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1) \ \subseteq \ V.$$



Beispiel 3.1.6. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis für V. Das zu $\mathcal{B}$ gehörige *Kreuzpolytop* in V ist

$$K_{\mathcal{B}} \ = \ \operatorname{Konv}(b_1, -b_1, \ldots, b_n, -b_n) \ \subseteq \ V.$$



Satz 3.1.7. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und es seien Polytope $B = \operatorname{Konv}(v_1, \ldots, v_n)$ sowie $B' = \operatorname{Konv}(v_1', \ldots, v_m')$ in V gegeben. Dann gilt*

$$B + B' \ = \ \operatorname{Konv}(v_i + v_j';\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m).$$

Beweis. Für den Nachweis von "$\subseteq$" seien $v = \sum \lambda_i v_i \in B$ und $v' = \sum \lambda_j' v_j' \in B'$ als Konvexkombinationen gegeben. Dann erhalten wir eine Darstellung von $v + v'$ als Konvexkombination über den $v_i + v_j'$ durch

$$v + v' \ = \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j' \right) v_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) v_j' \ = \ \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j' (v_i + v_j').$$

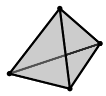
Wir zeigen "$\supseteq$". Nach Satz 1.4.8 (iii) ist $B + B'$ konvex. Weiter haben wir offensichtlich $v_i + v_j' \in B + B'$ für alle i, j. Gemäß Satz 1.4.8 (ii) ist damit die konvexe Hülle über alle $v_i + v_j'$ in $B + B'$ enthalten. $\square$

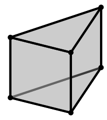
Folgerung 3.1.8. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B_1, \ldots, B_r \subseteq V$ Polytope. Dann ist auch die Summe $B_1 + \ldots + B_r$ ein Polytop.*

Bemerkung 3.1.9. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B \subseteq V$ ein Polytop. In $V' := V \times \mathbb{K}$ betrachten wir die Polytope

$$B' \ := \ \{(v, 0);\ v \in B\}, \qquad E \ := \ \{(0,1)\}, \qquad I := \mathrm{Konv}(0, e).$$

Durch Summenbildung in erhalten wir dann die *Pyramide* $B' + E \subseteq V'$ und das *Prisma* $B' + I \subseteq V'$ über dem Polytop $B \subseteq V$:





Definition 3.1.10. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{A} \subseteq V$ eine Teilmenge.

(i) Wir nennen eine Linearform $u \in V^*$ *beschränkt* auf $\mathcal{A}$, falls es ein $b \in \mathbb{K}$ gibt mit $-b \le u(a) \le b$ für alle $a \in \mathcal{A}$.
(ii) Wir nennen $\mathcal{A} \subseteq V$ beschränkt, wenn jede Linearform $u \in V^*$ auf $\mathcal{A}$ beschränkt ist.

Satz 3.1.11. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $B = \mathrm{Konv}(v_1, \ldots, v_r)$ ein Polytop in V und $u \in V^*$ eine Linearform auf V. Dann gibt es $1 \le i \le j \le r$, sodass*

$$u(v_i) \ \le \ u(v) \ \le \ u(v_j)$$

für alle $v \in B$ gilt. Insbesondere ist das Polytop $B \subseteq V$ eine beschränkte Teilmenge des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V.

Beweis. Es seien $1 \le i \le j \le n$ mit $u(i) \le u(k) \le u(j)$ für $k = 1, \ldots, r$. Jedes $v \in B$ ist eine Konvexkombination $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$. Weiter gilt

$$\lambda_1 u(v_i) + \ldots + \lambda_r u(v_i) \ \le \ \lambda_1 u(v_1) + \ldots + \lambda_r u(v_r) \le \lambda_1 u(v_j) + \ldots + \lambda_r u(v_j).$$

nach Wahl von i und j. Mit $u(v) = \lambda_1 u(v_1) + \ldots + \lambda_r u(v_r)$ und $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r = 1$ erhalten wir dann die gewünschte Abschätzung $u(v_i) \le u(v) \le u(v_j)$. □

Definition 3.1.12. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein *affiner Strahl* in V ist eine Menge der Form $\varrho_v(v') := v' + \mathrm{Pos}(v)$ mit $v, v' \in V$, wobei $v \neq 0$.

Konstruktion 3.1.13. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der *Rezessionskegel* einer nichtleeren konvexen Menge $\mathcal{A} \subseteq V$ ist der konvexe Kegel

$$\varrho(\mathcal{A}) \ := \ \{v \in V;\ \varrho_v(v') \subseteq \mathcal{A} \text{ für alle } v' \in \mathcal{A}\} \ \subseteq \ V.$$

Bemerkung 3.1.14. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{A} \subseteq V$ eine konvexe Menge mit Rezessionskegel $\varrho(\mathcal{A})$. Für jedes $v' \in \mathcal{A}$ gilt $v' + \varrho(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$.

Satz 3.1.15. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq V$ eine beschränkte konvexe Menge und $\sigma \subseteq V$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Dann gilt $\varrho(\mathcal{A} + \sigma) = \sigma$.*

Beweis. Für den Nachweis von "$\sigma \subseteq \varrho(\mathcal{A} + \sigma)$" sei $v \in \sigma$ gegeben. Wir müssen $v' + \alpha v \subseteq \mathcal{A} + \sigma$ für jedes $v' \in \mathcal{A} + \sigma$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}_{\ge 0}$ zeigen. Dazu schreiben wir $v' = v'_{\mathcal{A}} + v'_{\sigma}$ mit $v'_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ und $v'_{\sigma} \in \sigma$. Dann erhalten wir

$$v' + \alpha v \ = \ v'_{\mathcal{A}} + v'_{\sigma} + \alpha v \ \in \ \mathcal{A} + \sigma.$$

Zu "$\varrho(\mathcal{A} + \sigma) \subseteq \sigma$". Nehmen wir an, es existiere ein $v \in \varrho(\mathcal{A} + \sigma) \setminus \sigma$. Dann liefert Satz 2.1.15 eine Linearform $u \in \sigma^\vee$ mit $u(v) < 0$. Wir wählen $v' \in \varrho(\mathcal{A})$. Wegen

$v \in \varrho(\mathcal{A}+\sigma)$ gilt $v' + \alpha v \in \mathcal{A} + \sigma$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}_{\geq 0}$. Insbesondere haben wir für jedes $\alpha \in \mathbb{K}_{\geq 0}$ eine Darstellung

$$v' + \alpha v \; = \; v'_\alpha + v_\alpha, \qquad v'_\alpha \in \mathcal{A}, \quad v_\alpha \in \sigma.$$

Da $\mathcal{A}$ beschränkt ist, gibt es ein $b \in \mathbb{K}_{\geq 0}$ mit $-b \leq u(v'') \leq b$ für alle $v'' \in \mathcal{A}$. Wenden wir nun $u \in \sigma^\vee$ auf die obigen Darstellungen an, so ergibt sich damit

$$b + \alpha u(v) \; \geq \; u(v' + \alpha v) \; = \; u(v'_\alpha + v_\alpha) \; \geq \; -b$$

für alle $\alpha \in \mathbb{K}_{\geq 0}$. Folglich muss $u(v) \geq 0$ gelten. Das steht im Widerspruch zur Wahl der Linearform u. □

Folgerung 3.1.16. *Jede beschränkte nichtleere konvexe Menge, insbesondere jedes Polytop, besitzt trivialen Rezessionskegel.*

Beweis. Ist $\mathcal{A} \subseteq V$ nichtleer, beschränkt und konvex, so liefert Satz 3.1.15 für $\sigma := \{0\} \subseteq V$ das gewünschte Ergebnis. □

3.2. **Polytope und Polyeder 2.**

Erinnerung 3.2.1. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und U sein Dualraum. Eine *Affinform* auf V ist eine Abbildung der Gestalt

$$f\colon V \;\to\; \mathbb{K}, \qquad v \;\mapsto\; u(v)+b, \qquad u \in U, \quad b \in \mathbb{K}.$$

Ein *konvexes Polyeder* in V ist eine Teilmenge $B = \mathrm{POrt}(f_1, \ldots, f_s) \subseteq V$, wobei $f_1, \ldots, f_s$ Affinformen auf V sind.

Bemerkung 3.2.2. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis für V und $\mathcal{B}^* = (b_1^*, \ldots, b_n^*)$ die zugehörige duale Basis. Dann haben wir

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{B}} &= \mathrm{Konv}(\varepsilon_1 b_1 + \ldots + \varepsilon_n b_n;\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1) \\ &= \mathrm{POrt}(b_1^* + 1, -b_1^* + 1, \ldots, b_n^* + 1, -b_n^* + 1), \\ K_{\mathcal{B}} &= \mathrm{Konv}(b_1, -b_1, \ldots, b_n, -b_n) \\ &= \mathrm{POrt}(\varepsilon_1 b_1^* + \ldots + \varepsilon_n b_n^* + 1;\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1) \end{aligned}$$

für das Parallelotop $P_{\mathcal{B}}$ und das Kreuzpolytop $K_{\mathcal{B}}$ zu $\mathcal{B}$. Insbesondere sind $P_{\mathcal{B}}$ und $K_{\mathcal{B}}$ konvexe Polyeder.

Satz 3.2.3. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ und $\mathcal{A} \subseteq V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq V$ ist beschränkt.*
(ii) *Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{K}_{\geq 1}$ mit $\mathcal{A} \subseteq P_{\lambda\mathcal{B}}$, wobei $\lambda\mathcal{B} = (\lambda b_1, \ldots, \lambda b_n)$.*

Beweis. Gilt (i), so sind insbesondere die Linearformen $b_i^* \in V^*$ auf $\mathcal{A}$ beschränkt, etwa durch $-\lambda \leq b_i^*(v) \leq \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{K}_{\geq 1}$. Mit Bemerkung 3.2.2 folgt $\mathcal{A} \subseteq P_{\lambda\mathcal{B}}$. Gilt (ii), so ist $\mathcal{A}$ beschränkt, da bereits $\lambda\mathcal{B}$ beschränkt ist; siehe Satz 3.1.11. □

Satz 3.2.4. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B = \mathrm{POrt}(f_1, \ldots, f_s) \subseteq V$ ein nichtleeres konvexes Polyeder mit Affinformen $f_i = u_i + b_i$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \varrho(B) &= \{v \in V;\ \varrho_v(v') \subseteq B \text{ für ein } v' \in B\} \\ &= \mathrm{POrt}(u_1, \ldots, u_s). \end{aligned}$$

Insbesondere hat man $u|_{\varrho(B)} \geq 0$ für jede Affinform $f = u + b$ auf V mit $f|_B \geq 0$. Weiter ist $\varrho(B)$ ein polyedrischer konvexer Kegel.

Beweis. Die Inklusion "$\subseteq$" der ersten Gleichung ist gemäß Definition des Rezessionskegels $\varrho(B)$ offensichtlich.

Für den Nachweis von "$\subseteq$" in der zweiten Gleichung, sei $0 \neq v \in V$ mit sodass $\varrho_v(v') \subseteq B$ für ein $v' \in B$ gilt. Für $i = 1, \ldots, s$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}_{\geq 0}$ haben wir dann

$$0 \;\leq\; f_i(v' + \alpha v) \;=\; u_i(v') + b_i + \lambda u_i(v).$$

Mit $c := u_i(v') + b_i \geq 0$ erhalten wir $u_i(v) \geq -c/\lambda$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}_{\geq 0}$. Das impliziert $u_i(v) \geq 0$ und somit $v \in \mathrm{POrt}(u_1, \ldots, u_s)$.

Wir zeigen, dass $\mathrm{POrt}(u_1, \ldots, u_s)$ im Rezessionskegel $\varrho(B)$ enthalten ist. Dazu sei $v \in \mathrm{POrt}(u_1, \ldots, u_s)$ gegeben. Dann haben wir

$$f_i(v' + \lambda v) \;=\; u_i(v') + b_i + \lambda u_i(v) \;=\; f_i(v') + \lambda u_i(v) \;\geq\; 0$$

für $i = 1, \ldots, s$, jedes $v' \in B$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}_{\geq 0}$. Das beweist $\varrho_v(v') \subseteq B$ für alle $v' \in B$ und somit $v \in \varrho(B)$. □

Folgerung 3.2.5. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $B \subseteq V$ ein nichtleeres konvexes Polyeder. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt $\varrho(B) = \{0\}$.*
(ii) *B enthält keinen affinen Strahl.*

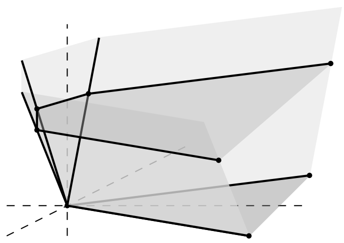
Folgerung 3.2.6. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B, B' \subseteq V$ nichtleere konvexe Polyeder. Gilt $B \subseteq B'$, so gilt $\varrho(B) \subseteq \varrho(B')$.*

Beweis. Nehmen wir an, es existiere ein $v \in \varrho(B) \setminus \varrho(B')$. Dann gilt $\varrho_v(v') \subseteq B$ für alle $v' \in B$ und $\varrho_v(v'') \not\subseteq B'$ für ein $v'' \in B'$. Wegen $\varrho_v(v') \subseteq B \subseteq B'$ widerspricht das Satz 3.2.4. □

Konstruktion 3.2.7. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{A} \subseteq V$ eine konvexe Menge mit Rezessionskegel $\varrho(\mathcal{A}) \subseteq V$. Der *Homogenisierungskegel* von $\mathcal{A}$ ist

$$\sigma(\mathcal{A}) \ := \ \mathrm{Pos}((\mathcal{A} \times \{1\}) \cup (\varrho(\mathcal{A}) \times \{0\})) \ \subseteq \ V \times \mathbb{K}.$$

Aufgabe 3.2.8. Veranschauliche den Homogenisierungskegel einer konvexen Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ anhand geeigneter Beispiele für $n \leq 2$.



Bemerkung 3.2.9. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathcal{A} \subseteq V$ konvex und $\lambda \in \mathbb{K}_{\geq 0}$. Die *Dilatation* $\lambda\mathcal{A} := \{\lambda v;\ v \in \mathcal{A}\}$ ist eine konvexe Menge in V, sie besitzt den Rezessionskegel $\varrho(\lambda\mathcal{A}) = \varrho(\mathcal{A})$.

Satz 3.2.10. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{A} \subseteq V$ eine konvexe Menge mit Rezessionskegel $\varrho(\mathcal{A}) \subseteq V$. Für den Homogenisierungskegel von $\mathcal{A}$ gilt dann*

$$\sigma(\mathcal{A}) \quad = \quad \varrho(\mathcal{A}) \times \{0\} \ \sqcup \bigsqcup_{\lambda \in \mathbb{K}_{>0}} \lambda\mathcal{A} \times \{\lambda\}.$$

Für die affinen Abbildungen $\imath_0\colon V \to V \times \mathbb{K}$, $v \mapsto (v, 0)$ und $\imath_1\colon V \to V \times \mathbb{K}$, $v \mapsto (v, 1)$ erhalten wir damit insbesondere

$$\imath_0^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) \ = \ \varrho(\mathcal{A}), \qquad\qquad \imath_1^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) \ = \ \mathcal{A}.$$

Beweis. Für den Nachweis von "$\subseteq$" in der ersten Gleichung sei $(v, \lambda) \in \sigma(\mathcal{A})$ gegeben. Gemäß Definition des Homogenisierungskegels haben wir dann

$$(v, \lambda) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i', 1) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j (v_j, 0)$$

mit Vektoren $v_i' \in \mathcal{A}$ sowie $v_j \in \varrho(\mathcal{A})$ und Koeffizienten $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{K}_{\geq 0}$, wobei $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \lambda$ gilt. Gilt $\lambda > 0$, so erhalten wir

$$v' \ := \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i' \ = \ \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} \lambda v_i' \ \in \ \lambda\mathcal{A}, \qquad v_0 \ := \ \sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j \ \in \ \varrho(\mathcal{A}) \ = \ \varrho(\lambda\mathcal{A})$$

nach Bemerkung 3.2.9. Es folgt $v = v' + v_0 \in \lambda\mathcal{A}$ und somit $(v, \lambda) \in \lambda\mathcal{A} \times \{\lambda\}$. Für $\lambda \leq 0$ gilt offensichtlich $v \in \varrho(\mathcal{A})$ und somit $(v, \lambda) \in \varrho(\mathcal{A}) \times \{0\}$.

Die Inklusion "$\supseteq$" in der ersten Gleichung ist offensichtlich. Die Aussagen zu $\imath_0$ und $\imath_1$ folgen direkt. □

Folgerung 3.2.11. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Rezessions- bzw. Homogenisierungskegel eines Durchschnittes nichtleerer konvexe Mengen $\mathcal{A}_i \subseteq V$ sind gegeben durch*

$$\varrho\Bigl(\bigcap_i \mathcal{A}_i\Bigr) \;=\; \bigcap_i \varrho(\mathcal{A}_i), \qquad\qquad \sigma\Bigl(\bigcap_i \mathcal{A}_i\Bigr) \;=\; \bigcap_i \sigma(\mathcal{A}_i).$$

Konstruktion 3.2.12. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann hat man zueinander inverse Bijektionen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{AF}(V) & \longleftrightarrow & \mathrm{LF}(V \times \mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \tilde{u}_f \colon (v,x) \mapsto f(v) + (x-1)f(0), \\ f_{\tilde{u}} \colon v \mapsto \tilde{u}(v,1) & \leftarrow\!\shortmid & \tilde{u}. \end{array}$$

Satz 3.2.13. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B := \mathrm{Konv}(v_1, \ldots, v_r) \subseteq V$ ein Polytop. Dann haben wir*

$$\sigma(B) \;=\; \mathrm{Pos}((v_1,1), \ldots, (v_r,1)) \;\subseteq\; V \times \mathbb{K}.$$

Sind weiter $\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_s \in \mathrm{LF}(V \times \mathbb{K})$ mit $\sigma = \mathrm{POrt}(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_s)$ gegeben, so hat man eine Darstellung

$$B \;=\; \mathrm{POrt}(f_{\tilde{u}_1}, \ldots, f_{\tilde{u}_s}) \;\subseteq\; V.$$

Beweis. Nach Satz 3.1.11 ist B beschränkt und nach Satz 3.2.4 hat B trivialen Rezessionskegel. Die erste Gleichung des Satzes ergibt sich somit direkt aus Konstruktion 3.2.7. Die zweite Gleichung erhalten wir mit Satz 3.2.10 und $f_{\tilde{u}_j} = \tilde{u}_j \circ \imath_1$. $\square$

3.3. **Polytope und Polyeder 3.**

Satz 3.3.1. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\emptyset \neq B = \mathrm{POrt}(f_1, \ldots, f_s)$ ein konvexes Polyeder mit Rezessionskegel $\varrho(B)$ und $\tilde{u}_\infty \colon V \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $(v, z) \mapsto z$. Dann gilt*

$$\sigma(B) \;=\; \mathrm{POrt}(\tilde{u}_{f_1}, \ldots, \tilde{u}_{f_s}, \tilde{u}_\infty) \;\subseteq\; V \times \mathbb{K}.$$

Weiter gibt es Vektoren $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_r \in V \times \mathbb{K}$ der Form $\tilde{v}_i = (v_i, 1)$ mit $v_i \in V$, sodass wir $\sigma(B)$ und B darstellen können als

$$\sigma(B) = \mathrm{Pos}(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_r) + (\varrho(B) \times \{0\}), \quad B = \mathrm{Konv}(v_1, \ldots, v_r) + \varrho(B).$$

Dabei ist der eingebettete Rezessionskegel $\imath_0(\varrho(B)) = \varrho(B) \times \{0\} = \sigma(B) \cap \tilde{u}_\infty^\perp$ eine Seite des Homogenisierungskegels $\sigma(B)$.

Beweis. Wir verifizieren zunächst die erste Gleichung des Satzes auf $V \times \{1\}$. Nach Satz 3.2.10 und Konstruktion 3.2.12 haben wir

$$\begin{aligned} \sigma(B) \cap (V \times \{1\}) &= B \times \{1\} \\ &= \mathrm{POrt}(f_1, \ldots, f_s) \times \{1\} \\ &= \mathrm{POrt}(\tilde{u}_{f_1}, \ldots, \tilde{u}_{f_s}, \tilde{u}_\infty) \cap (V \times \{1\}). \end{aligned}$$

Damit können wir die erste Gleichung des Satzes auch auf allen $V \times \{\lambda\}$ mit $\lambda \in \mathbb{K}_{>0}$ nachweisen: Es gilt

$$\begin{aligned} \sigma(B) \cap (V \times \{\lambda\}) &= \lambda(\sigma(B) \cap (V \times \{1\})) \\ &= \lambda(\mathrm{POrt}(\tilde{u}_{f_1}, \ldots, \tilde{u}_{f_s}, \tilde{u}_\infty) \cap (V \times \{1\})) \\ &= \mathrm{POrt}(\tilde{u}_{f_1}, \ldots, \tilde{u}_{f_s}, \tilde{u}_\infty) \cap (V \times \{\lambda\}). \end{aligned}$$

Sätze 3.2.10 und 3.2.4 liefern die gewünschte Gleichung auf $V \times \{0\}$. Das beweist die erste Aussage des Satzes.

Wir schreiben nun den polyedrischen konvexen Kegel $\sigma(B)$ in $V \times \mathbb{K}$ als positive Hülle über Vektoren $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_r \in V \times \mathbb{K}_{>0}$ und $\tilde{v}_{r+1}, \ldots, \tilde{v}_{r+k} \in V \times \{0\}$. Dabei gilt

$$\sigma(B) \cap (V \times \{1\}) \;=\; \varrho(B) \times \{0\} \;=\; \mathrm{Pos}(\tilde{v}_{r+1}, \ldots, \tilde{v}_{r+k});$$

siehe Satz 3.2.10. Durch geeignetes Skalieren erreichen wir zudem $\tilde{v}_i \in V \times \{1\}$ für $i = 1, \ldots, r$. Die zweite sowie die dritte Gleichung des Satzes lassen sich dann direkt verifizieren. □

Folgerung 3.3.2. *Jedes konvexe Polyeder ist die Summe eines Polytops und eines polyedrischen konvexen Kegels.*

Folgerung 3.3.3. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B} \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\mathcal{B}$ ist ein beschränktes konvexes Polyeder.*
(ii) *$\mathcal{B}$ ist ein konvexes Polyeder mit $\varrho(\mathcal{B}) = \{0\}$.*
(iii) *$\mathcal{B}$ ist ein Polytop.*

Beweis. Die Implikation "(i)⇒(ii)" ergibt sich aus Folgerung 3.1.16. Wir zeigen "(ii)⇒(iii)". Nach Folgerung 3.3.2 gilt $\mathcal{B} = B + \sigma$ mit einem Polytop $B \subseteq V$ und einem polyedrischen konvexen Kegel $\sigma \subseteq V$. Satz 3.1.15 liefert $\sigma = \varrho(\mathcal{B})$ und somit $\mathcal{B} = B$. Zu "(iii)⇒(i)". Als Polytop ist B nach Satz 3.1.11 beschränkt und nach Satz 3.2.13 ein Polyeder. □

Satz 3.3.4. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq V$ konvexe Polyeder. Dann sind Rezessionskegel und Homogenisierungskegel der Summe gegeben durch*

$$\varrho(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) \;=\; \varrho(\mathcal{B}_1) + \varrho(\mathcal{B}_2), \qquad \sigma(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) \;=\; \sigma(\mathcal{B}_1) + \sigma(\mathcal{B}_2).$$

Weiter ist die Summe $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 \subseteq V$ der beiden konvexen Polyeder $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq V$ ein konvexes Polyeder.

Beweis. Gemäß Folgerung 3.3.2 haben wir Darstellungen $\mathcal{B}_i = B_i + \sigma_i$ mit Polytopen $B_i \subseteq V$ und polyedrischen konvexen Kegeln $\sigma_i \subseteq V$. Damit erhalten wir

$$\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 \;=\; B_1 + B_2 \;+\; \sigma_1 + \sigma_2.$$

Nach Folgerung 3.1.8 ist B_1+B_2 ein Polytop und somit beschränkt; siehe Satz 3.1.11. Nach Folgerung 2.2.6 ist $\sigma_1+\sigma_2$ ein polyedrischer konvexer Kegel. Satz 3.1.15 liefert

$$\varrho(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) \;=\; \sigma_1 + \sigma_2 \;=\; \varrho(\mathcal{B}_1) + \varrho(\mathcal{B}_2).$$

Die Formel für die Homogenisierungsskegel sowie den Zusatz erhält man dann mit Satz 3.2.10, wobei für ersteres $\lambda(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \lambda(\mathcal{B}_1) + \lambda(\mathcal{B}_2)$ verwendet wird. □

Folgerung 3.3.5. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r \subseteq V$ konvexer Polyeder. Dann ist auch die Summe $\mathcal{B}_1 + \ldots + \mathcal{B}_r \subseteq V$ ein konvexes Polyeder.*

Definition 3.3.6. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B \subseteq V$ ein konvexes Polyeder. Eine Teilmenge $C \subseteq B$ heißt *Seite* von B, falls es ein $f \in \mathrm{AF}(V)$ gibt mit

$$f|_B \;\ge\; 0, \qquad C \;=\; B \cap N(f).$$

Wir schreiben $C \preccurlyeq B$, falls C eine Seite von B ist. Die Menge aller Seiten von B wird mit $\mathrm{Seiten}(B)$ bezeichnet.

Satz 3.3.7. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\emptyset \neq B \subseteq V$ ein konvexes Polyeder. Dann hat man zueinander inverse inklusionserhaltende Bijektionen*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Seiten}(B) \setminus \{0\} & \longleftrightarrow & \mathrm{Seiten}(\sigma(B)) \setminus \mathrm{Seiten}(\varrho(B)), \\ C & \mapsto & \sigma(C), \\ \imath_1^{-1}(\tau) & \mapsfrom & \tau, \end{array}$$

mit den Homogenisierungskegeln $\sigma(B)$, $\sigma(C)$, dem Rezessionskegel $\varrho(B)$ und der affinen Abbildung $\imath_1 \colon V \to V \times \mathbb{K}$, $v \mapsto (v, 1)$.

Beweis. Wir zeigen $\sigma(C) \preccurlyeq \sigma(B)$. Dazu sei eine Darstellung $B = \mathrm{POrt}(f_1, \ldots, f_s)$ mit $f_j \in \mathrm{AF}(V)$ gegeben. Gemäß Satz 3.3.1 haben wir dann

$$\sigma(B) \;=\; \mathrm{POrt}(\tilde{u}_{f_1}, \ldots, \tilde{u}_{f_s}, \tilde{u}_\infty) \;\subseteq\; V \times \mathbb{K}.$$

Wir wählen weiter ein $f \in \mathrm{AF}(V)$ mit $f|_B \ge 0$ und $C = B \cap N(f)$. Dann gilt $C = \mathrm{POrt}(f_1, \ldots, f_s, \pm f)$ und Satz 3.3.1 liefert

$$\sigma(C) \;=\; \mathrm{POrt}(\tilde{u}_{f_1}, \ldots, \tilde{u}_{f_s}, \pm\tilde{u}_f, \tilde{u}_\infty) \;\subseteq\; V \times \mathbb{K}.$$

Das bedeutet $\sigma(C) = \sigma(B) \cap \tilde{u}_n^\perp$ und somit $\sigma(C) \preccurlyeq \sigma(B)$. Insbesondere ist die Abbildung $C \mapsto \sigma(C)$ wohldefiniert.

Wir zeigen $\imath_1^{-1}(\tau) \preccurlyeq B$. Dazu sei $\tilde{u} \in \mathrm{LF}(V \times \mathbb{K})$ mit $\tilde{u}|_{\sigma(B)} \ge 0$ und $\tau = \sigma(B) \cap \tilde{u}^\perp$ gegeben. Mit $f_{\tilde{u}} = \tilde{u} \circ \imath$ haben wir dann $f_{\tilde{u}}|_B \ge 0$ und

$$\imath_1^{-1}(\tau) \;=\; \imath_1^{-1}(\sigma(B) \cap \tilde{u}^\perp) \;=\; B \cap N(f_{\tilde{u}}) \;\preccurlyeq\; B.$$

Damit ist auch die Abbildung $\tau \mapsto \imath^{-1}(\tau)$ wohldefiniert. Die weiteren Aussagen ergeben sich dann direkt aus Satz 3.3.1. □

Folgerung 3.3.8. *Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B \subseteq V$ eine konvexes Polyeder. Dann hat man folgende Aussagen:*

(i) *Für alle $C \preccurlyeq B$ und $D \preccurlyeq C$ gilt $D \preccurlyeq B$.*
(ii) *Für je zwei $C_1, C_2 \preccurlyeq B$ gilt $C_1 \cap C_2 \preccurlyeq C_1, C_2, B$.*

Insbesondere ist "$\preccurlyeq$" eine Partialordnung auf $\mathrm{Seiten}(B)$ *mit B bzw. $\emptyset$ als eindeutigem maximalen bzw. minimalem Element.*

Literatur

[1] Jürgen Hausen, *Lineare Algebra 1*, Shaker Verlag, Aachen, 2017. 3. korrigierte Auflage.
[2] ———, *Lineare Algebra 2*, Shaker Verlag, Aachen, 2013.