Seminar klassische Kurven

Winter 2023/24, Tübingen

Sascha Eichmann

In diesem Seminar werden wir klassische glatte Kurven besprechen, d.h. 1-dimensionale glatte Objekte im $\mathbb{R}^n$. Unsere Primärquelle ist dabei das Buch von Bär [1]. Wir werden z.B. Krümmung von Kurven definieren und einige Folgerungen daraus ziehen. Später werden wir uns von dieser Quelle lösen und über sogenannte elastische Kurven sprechen, welche ein Modell für dünne Drähte darstellt.
Inhaltliche Voraussetzungen sind dabei die Vorlesungen Lineare Algebra 1, Analysis 1-2, sowie die Einführung in Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen. Für einige wenige Vorträge ist es von Vorteil Analysis 3 /Maß-und Integrationstheorie gehört zu haben. Diese sind unten gekennzeichnet.
Die Aufteilung der Vorträge ist dabei wie folgt:

Allgemeine Kurven im $\mathbb{R}^n$:

1. Definition einer parametrisierten Kurve, Auswahl von Beispielen, Definition einer Kurve, [1] 2.1.1. bis 2.1.10. Definition 2.1.19, 2.1.20

2. Parametrisierung nach Bogenlänge, Definition der Länge einer Kurve, [1] 2.1.11 bis kurz vor 2.1.17

3. Approximation der Länge durch Polygonzüge, [1] 2.1.18 bis Aufgabe 2.3.

Ebene Kurven im $\mathbb{R}^2$:

4. Definition ebener Kurve, Krümmung einer ebenen Kurve [1] 2.2.1 bis 2.2.4, Aufgabe 2.10, 2.11

5. Definition Umlaufzahl, [1] 2.2.5 bis 2.2.9, inklusive Abbildung 41

6. Liftungslemma, [1], 2.2.11 bis Bemerkung nach 2.2.12

7. Umlaufsatz 2.2.10 mit Beweis, Wiederholung Liftungslemma, [1] Nach Beweis des Liftungslemmas bis kurz vor 2.2.13

8. Konvexe Kurven, [1] 2.2.13 bis 2.2.16, Präsentation Vierscheitelsatz 2.2.17 (ohne Beweis)

9. Isoperimetrische Ungleichung (Hier etwas Analysis 3 Wissen nötig) [1] 2.2.20 bis 2.2.21, Präsentation Divergenzsatz mit glattem Rand [5, Satz 8.1], Präsentation Fourierreihen [5, 10.1: Gleichungen 2, 5, 10.16]

Raumkurven im $\mathbb{R}^3$:

10. Krümmung und Torsion, [1, 2.3.1 bis 2.3.8]

11. Hauptsatz der Raumkurventheorie, [1, Aufgabe 2.16, Thm 2.3.9], unterstützende Quelle [3, Thm. 3.6]

Elastische Kurven:

12. Die Elastische Energie einer Kurve und ihre Euler-Lagrange Gleichung, [4, Bis Gleichung 1 und 2], [3, Lemma A.1]
13. Analyse der Euler-Lagrange Gleichung in $\mathbb{R}^2$ mit $G = 0$, [2, Def. 1.4, Abschnitt 2.1], [1, Aufgabe 2.17], unterstützende Quelle [3, Thm 5.4, Methode 2.1]
14. Lösung der Euler-Lagrange Gleichung in $\mathbb{R}^2$ mit $G = 0$ [2, Abschnitt 2.2 und Thm. 2.12]

Literatur

[1] C. Bär. *Elementare Differentialgeometrie.* De Gruyter Berlin, 2nd edition, 2010.

[2] S. Eichmann. Vorlesung Elastische Kurven. Gehalten 2020 in Tübingen.

[3] S. Eichmann. Vorlesung Einführung in die gewöhnlichen Differentialgleichungen. Gehalten in Tübingen, 2019.

[4] D. Singer. Lectures on elastic curves and rods.

[5] Wolfgang Walter. *Analysis 2.* Springer, 5. erweiterte edition, 2002.