Lineare Algebra 1 Blatt **13**
Winter 2024/25
Professor Deitmar Abgabe: **30.1.2025, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ heisst *orthogonal*, falls

$$AA^t = I$$

Es seien A und B Matrizen aus $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Beweise oder widerlege:

(a) Ist A^2 diagonalisierbar so ist A diagonalisierbar.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x^t(A + A^t)x = 2x^tAx$.

(c) Sind A und B orthogonale Matrizen, dann ist $AB = BA$.

(d) Ist A eine orthogonale Matrix mit $\det(A) = -1$, dann hat A den Eigenwert -1.

2. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und sei $s(.,.)$ das Skalarprodukt gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & \\ 1 & 4 & 1 \\ & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

also $s(v, w) = v^tAw$. Wende das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Standard-Basis (v_1, v_2, v_3) an, um eine ONB (f_1, f_2, f_3) zu erhalten.

3. Sei V ein unitaerer Raum. Eine lineare Abbildung $T : V \to V$ heisst *unitär*, falls

$$TT^* = I.$$

Zeige: Eine lineare Abbildung T ist genau dann unitär, wenn $Te_1, \dots, Te_n$ eine Orthonormalbasis ist.

4. Sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ selbstadjungiert. Zeige, dass $1 + iA$ und $1 - iA$ invertierbar sind.

Lineare Algebra 1 Blatt **12**
Winter 2024/25
Professor Deitmar Abgabe: **23.1.2025, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Fuer welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \\ \lambda & 1 & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$
positiv definit?

2. Sei b eine Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen K-Vektorraum V und sei B eine Matrix, die b bezueglich einer Basis $\mathcal{B}$ von V darstellt. Zeige, dass der Rang von B nicht von der Basiswahl abhaengt. Wir nennen ihn daher den *Rang von b*.

3. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und b eine symmetrische Bilinearform auf V. Für einen Unterraum $U \subset V$ sei
$$U^\perp = \{v \in V : b(u, v) = 0\ \forall_{u \in U}\}.$$
Zeige, dass $U^\perp$ ein Untervektorraum von V ist und dass $U \subset (U^\perp)^\perp$.

4. Sei I eine Indexmenge und fuer jedes $i \in I$ sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V_i gegeben. Dann ist das Produkt $\prod_{i \in I} V_i$ ein Vektorraum mit den koordinatenweisen Operationen. Sei
$$\bigoplus_{i \in I} V_i = \left\{ v \in \prod_{i \in I} V_i : v_i = 0 \text{ fuer fast alle } i \in I \right\}.$$
Sei nun speziell $I = \mathbb{N}$ und $V_i = \mathbb{R}$ fuer jedes $i \in \mathbb{N}$. Schreibe $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$. Man kann diesen Raum als den Raum aller reellen Folgen mit endlichen Traegern auffassen.

   (a) Zeige, dass
   $$\sigma(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i y_i$$
   ein Skalarprodukt auf V definiert.

   (b) Sei $E \subset V$ ein endlich-dimensionaler Unterraum. Zeige, dass $E^\perp$ unendlich-dimensional ist.

   (c) Zeige, dass $V \cong V \oplus V$.

Lineare Algebra 1	Blatt **11**
Winter 2024/25	
Professor Deitmar	Abgabe: **16.1.2025, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei $N \in M_n(K)$ nilpotent. Zeige, dass $1 - N$ invertierbar ist.

2. Sei $P \in \mathrm{M}_n(K)$ eine Projektion, also $P^2 = P$. Zeige, dass die Jordan-Normalform gleich $\left(\begin{smallmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist fuer ein $0 \le k \le n$.

3. Fuer ein Polynom $f(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$ definiere die *formale Ableitung* als

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}.$$

   (a) Zeige, dass $f \mapsto f'$ linear ist und dass

$$(fg)' = f'g + g'f$$

   gilt.

   (b) Zeige, dass eine Nullstelle λ von f genau dann eine einfache Nullstelle ist, wenn $f'(\lambda) \neq 0$.

4. Es sitzen $n \geq 2$ Zwerge um einen Tisch. Jeder hat ein Glass Milch vor sich. Der erste verteilt den Inhalt seines Glases zu gleichen Teilen in die Gläser der anderen Zwerge. Dann tut der zweite dasselbe und so fort. Nachdem der n-te Zwerg dies getan hat, stellt sich heraus, dass jeder Zwerg exakt dieselbe Menge Milch im Glas hat wie zu Anfang.

   Zeige, dass wenn der erste x_1 ccm im Glas hat, dann hat der zweite $x_2 = \frac{n-2}{n-1}x_1$ ccm im Glas und so fort, also hat der j-te Zwerg genau $\frac{n-j}{n-1}x_1$ ccm Milch im Glas.

Lineare Algebra 1 Blatt **10**
Winter 2024/25
Professor Deitmar Abgabe: **9.1.2025, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ diagonalisierbar ist.

2. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine reelle Matrix mit $\det(A) = 1$. Zeige: Ist $\mathrm{tr}(A) > 2$, dann ist A diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

3. Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ heisst *schiefsymmetrisch*, falls $A^t = -A$ gilt. Sei A schiefsymmetrisch. Zeige, dass $\det(A) = 0$ gilt, falls n ungerade ist. Gib ein Beispiel, dass dies fuer gerades n nicht so sein muss.

4. (Fibonacci Folge) Es seien $f_0 = 1 = f_1$ und fuer $n \in \mathbb{N}$ sei $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Sei $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann folgt $T\begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ und nach Iteration also $T^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$. Bestimme die Eigenwerte α, β von T und eine Matrix S, die T diagonalisiert. Zeige, dass
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right).$$

5. **Bonusaufgabe, unter dem Weihnachtsbaum zu lösen.** Bei der Weihnachtsvorbesprechung treffen sich n^2 Weihnachtsmänner. Sie stellen sich im Quadrat auf. Wir nehmen an, dass sie alle unterschiedlich groß sind. Aus jeder Zeile wählen wir den größten, diese nennen wir die Riesen. Aus jeder Spalte wählen wir den kleinsten, diese nennen wir die Zwerge. Zeige: der kleinste Riese ist größer als der größte Zwerg.

Lineare Algebra 1 Blatt **9**
Winter 2024/25
Professor Deitmar Abgabe: **19.12.2024, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Zeige, dass sie diagonalisierbar ist und bestimme eine Matrix S, die A diagonalisiert. Verifiziere Deine Rechnung am Ende mit einer Probe.

2. Die Matrix $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sei in $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ diagonalisierbar mit zwei verschiedenen komplexen Eigenwerten λ_1, λ_2. Zeige, dass die Eigenwerte entweder beide reell, oder komplex zueinander konjugiert sind. Zeige, dass im zweiten Fall A in $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ konjugiert ist zu einer Matrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ fuer $a, b \in \mathbb{R}$.

3. (a) Sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Zeige: Null ist der einzige Eigenwert von A.
   (b) Sei $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(K)$. Es gelte $a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n} = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Zeige: Null ist Eigenwert von A.
   (c) Sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Zeige: es gibt ein $k \leq n$ mit
   $$\ker A \subset \ker A^2 \subset \cdots \subset \ker A^k = \ker A^{k+1} = \cdots$$

4. (Ausserhalb der Wertung) Zeichne auf einem grossen Blatt den Polygonzug $a_0, \ldots, a_8$ in $\mathbb{C}$ mit $a_j = (2 + (-1)^j)e^{i\frac{j\pi}{4}}$ fuer $j = 0, \ldots, 8$. Dann mach das Ganze noch einmal in der gleichen Groesse, schneide beide Figuren aus und klebe sie um den Winkel $\frac{\pi}{4}$ verdreht uebereinander, so dass sich die Mittelpunkte decken. Das Arrangement bitte an der Spitze eines Stocks befestigen und zur Vorlesung am 19.12. mitbringen.

Lineare Algebra 1 Blatt **8**
Winter 2024/25
Professor Deitmar Abgabe: **12.12.2024, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Beweise oder widerlege:
   (a) Für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $AA^t = I$ gilt $\det(A) \in \{1, -1\}$.
   (b) Sind u, v Eigenvektoren der Matrix A, dann ist auch $u + v$ ein Eigenvektor.

2. Seien $x_0, \dots, x_n$ paarweise verschiedene Elemente von K. Zeige

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$$

   (Hinweis: Betrachte das Polynom

$$P(x) = \det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{pmatrix}.$$

   Was ist der Grad von $P(x)$? Bestimme den Leitkoeffizienten von $P(x)$. Was sind die Nullstellen?)

3. Sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$ und Sei $C(i, j)$ die Matrix aus der Laplace-Entwicklung. Sei schliesslich $A^\#$ die Matrix mit den Einträgen

$$A^\#_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(C(j, i)).$$

   Man nennt $A^\# \in \mathrm{M}_n(K)$ die *Adjunkte* zu A. Zeige, dass

$$AA^\# = A^\# A = \det(A)I.$$

   Insbesondere gilt fuer invertierbares A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\#.$$

4. (a) Sei $T : V \to V$ eine lineare Abbildung, so dass jeder Vektor $v \neq 0$ in V ein Eigenvektor ist. Zeige, dass $T = \lambda \mathrm{Id}$ für ein $\lambda \in K$ ist.
   (b) Sei $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ ein Polynom und sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Zeige: Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, dann ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A) = a_0 + a_1 A + \cdots + a_n A^n$.

Lineare Algebra 1 Blatt **7**
Winter 2024/25
Professor Deitmar Abgabe: **5.12.2024, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Für $a, b \in \mathbb{Q}$ sei das lineare Gleichungssystem:
$$2x + y = 1$$
$$ax - y = b$$
über $K = \mathbb{Q}$ gegeben.
   (a) Für $b = 1$ bestimme alle $a \in \mathbb{Q}$, für die das System lösbar ist.
   (b) Für $a = -1$ bestimme alle $b \in \mathbb{Q}$, für die das System lösbar ist und ermittle alle Lösungen.

2. Bestimme den Rang der folgenden Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Sei $D : \mathrm{M}_n(K) \to K$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:
   (a) $D(I) = 1$,
   (b) D ist in jeder Zeile linear,
   (c) $D(A) = 0$, falls A zwei gleiche Zeilen hat.

   Zeige, dass $D(A) = \det(A)$ fuer jedes $A \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt.

4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum und sei $U_\mathbb{C} \subset \mathbb{C}^n$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum, der von U erzeugt wird. Zeige, dass
$$U_\mathbb{C} = U \oplus iU = \left\{u + iv : u, v \in U\right\}$$
und dass
$$\dim_\mathbb{R}(U) = \dim_\mathbb{C}(U_\mathbb{C}).$$
Zeige ferner, dass jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : U \to \mathbb{R}^m$ eindeutig zu einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $T_\mathbb{C} : U_\mathbb{C} \to \mathbb{C}^m$ fortgesetzt werden kann und dass dann
$$\ker T = \mathbb{R}^k \cap \ker T_\mathbb{C} \quad \text{sowie} \quad \left(\ker T\right)_\mathbb{C} = \ker\left(T_\mathbb{C}\right)$$
gilt.
(Es darf benutzt werden, dass Aufgabe 4, Blatt 3 auch fuer die Koerper $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ gilt.)

5. (Bonusaufgabe)
   (a) Sei $U \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ein Untervektorraum. Der Raum $U_\mathbb{C} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ enthalte eine invertierbare Matrix. Zeige, dass auch U eine invertierbare Matrix enthaelt.
   (Es darf benutzt werden, dass ein Polynom $\neq 0$ nur endlich viele Nullstellen hat. Nimm an, dass die Determinante auf U verschwindet. Waehle eine Basis $u_1 \dots, u_k$ von U und betrachte das Polynom $\det(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + x u_k)$, wobei die $\lambda_j \in \mathbb{R}$ sind.)
   (b) Seien $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Zeige, dass die beiden Matrizen genau dann in $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ konjugiert sind, wenn sie in $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ konjugiert sind.
   (Betrachte the Raum aller Matrizen S mit $SA = BS$.)

Lineare Algebra 1 Blatt **6**
Winter 2024/25
Professor Deitmar Abgabe: **28.11.2024, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Gibt es eine lineare Abbildung $T : V \to V$ mit $\mathrm{Bild}(T) = \ker(T)$?

2. Sei $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$ die Matrix und $b \in \mathbb{Q}^3$ der Spaltenvektor:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Bestimme die Loesungsmenge $L = \{x \in \mathbb{Q}^3 : Ax = b\}$. Beschreibe L in der Form $L = v_0 + U$, wobei $v_0 \in \mathbb{Q}^4$ und U ein Unterraum ist. Gib eine Basis von U an.

3. Berechne die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Zeige, dass jeder Unterraum $V \subset \mathrm{M}_n(K)$ der Dimension $> n(n-1)$ eine invertierbare Matrix enthaelt.

Lineare Algebra 1 Blatt **5**
Winter 2024/25
Professor Deitmar Abgabe: **21.11.2024, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei $V = \{f \in K[x] : \mathrm{grad}(f) \leq 3\}$ und sei $T : V \to V$ gegeben durch
$$Tf(x) = f(x+1).$$
Berechne die Matrix von T bezueglich der Basis $(f_0, f_1, f_2, f_3) = (1, x, x^2, x^3)$.

2. Seien K ein Koerper und $S \in \mathrm{M}_n(K)$ eine Matrix mit der Eigenschaft, dass fuer alle $v, w \in K^n$ gilt
$$v^t w = 0 \quad \Rightarrow \quad v^t S w = 0.$$
Zeige, dass $S = \lambda I$ fuer ein $\lambda \in K$.

3. (Blockmatrizen) Seien S und T zwei Matrizen so dass ST definiert ist. Teilen wir S und T in kleinere Untermatrizen auf, schreiben also
$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix},$$
wobei wir annehmen, dass die Blockaufteilung so ist, dass AX existiert. Zeige, dass
$$ST = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{pmatrix}.$$

4. Seien U, V, W endlich-dimensionale Vektorräume. Eine Sequenz von linearen Abbildungen:
$$U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W$$
heisst *exakt* bei V, wenn $\mathrm{Bild}(\alpha) = \ker(\beta)$ gilt. Insbesondere ist dann $\beta \circ \alpha = 0$. Eine Sequenz
$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W \longrightarrow 0 \tag{1}$$
heisst *kurze exakte Sequenz*, falls sie bei U, V und W exakt ist.
Zeige: Ist (1) eine kurze exakte Sequenz, so ist α injektiv, β surjektiv und es gilt
$$\dim V = \dim U + \dim W.$$

Lineare Algebra 1 Blatt **4**
Winter 2024/25
Professor Deitmar Abgabe: **14.11.2024, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Seien V ein Vektorraum und U, U', W Unterräume. Beweise oder widerlege:
   (a) $U + W = U \Leftrightarrow W \subset U$,
   (b) $U + W = U' + W \Rightarrow U = U'$.
2. Sei $T\colon K^2 \to K^2$ gegeben durch
$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   bestimme Kern und Bild von T.
3. Sei $F : V \to V$ eine lineare Abbildung und sei $v \in V$ ein Vektor, sowie $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $F^n(v) \neq 0$, aber $F^{n+1}(v) = 0$. Zeige, dass die Vektoren $v, F(v), F^2(v), \dots, F^n(v)$ linear unabhängig sind.
4. Sei V ein Vektorraum und $P : V \to V$ linear mit der Eigenschaft, dass
$$P \circ P = P.$$
   Zeige, dass es eindeutig bestimmte Unterräume $U, W \subset V$ gibt mit $V = U \oplus W$ und
$$P(u + w) = w$$
   für jedes $u \in U$ und jedes $w \in W$. (Man nennt eine solche Abbildung eine *Projektion*.)

Lineare Algebra 1 Blatt **3**
Winter 2024/25
Professor Deitmar Abgabe: **7.11.2024, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Seien V ein Vektorraum und $v_1, ..., v_k \in V$ linear unabhängig. Sei $w \in V$ so daß $v_1 + w, ..., v_k + w$ linear abhängig sind. Zeige: w liegt im Span von $v_1, ..., v_k$.

2. (a) Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis des Vektorraums V. Zeige, dass die Abbildung
$$K^n \to V,$$
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$
eine Bijektion ist.
   (b) Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit p Elementen. Sei V ein Vektorraum ueber $\mathbb{F}_p$ der Dimension n. Wieviele Elemente hat V?

3. Zeige, dass zwei Vektoren
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in K^2$$
genau dann linear abhängig sind, wenn $ad - bc = 0$.

4. Seien $v_1, ..., v_k \in \mathbb{Q}^n$ linear unabhängig ueber $\mathbb{Q}$. Zeige: $v_1, ..., v_k$ sind linear unabhängig ueber $\mathbb{R}$.

Lineare Algebra 1 Blatt **2**
Winter 2024/25
Professor Deitmar Abgabe: **31.10.2024, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Schreibe die Additions- und Multiplikationstabellen fuer die Koerper $\mathbb{F}_5$ und $\mathbb{F}_7$ auf.

2. Seien K ein Körper und $x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n \in K$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Zeige, dass es ein Polynom $f \in K[x]$ vom Grad $\leq n$ gibt, so daß $f(x_i) = y_i$, fuer $i = 0, \dots, n$.

   Hinweis: Konstruiere zunächst Polynome $g_k \in K[x]$ von Grad $\leq n$ mit

$$g_k(x_i) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

3. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ oder $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind Untervektorräume? (Antwort mit Begründung!)

   (a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 2x_3 \right\} \subset \mathbb{R}^3$

   (b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^4 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$

   (c) $C = \left\{ \begin{pmatrix} \mu + \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \mu, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

   (d) $D = \{ f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) = f(-x) \text{ fuer alle } x \in \mathbb{R} \} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

   (e) $E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq x_2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$

4. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *periodisch*, falls $f(x + 1) = f(x)$ fuer alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige: Die Menge der periodischen Abbildungen ist ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Lineare Algebra 1 Blatt **1**
Winter 2024/25
Professor Deitmar Abgabe: **24.10.2024, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Seien X, Y, Z Mengen, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen und $g \circ f : X \to Z$ die Komposition von f und g. Beweise:

   (a) Zeige
   $$\begin{aligned} f \text{ und } g \text{ injektiv} &\Rightarrow g \circ f \text{ injektiv} \\ &\Rightarrow f \text{ injektiv.} \end{aligned}$$

   (b) Zeige
   $$\begin{aligned} f \text{ und } g \text{ surjektiv} &\Rightarrow g \circ f \text{ surjektiv} \\ &\Rightarrow g \text{ surjektiv.} \end{aligned}$$

   (c) Gib ein Beispiel, in dem $g \circ f$ injektiv ist, g aber nicht.

   (d) Gib ein Beispiel, in dem $g \circ f$ surjektiv ist, f aber nicht.

2. (a) Sei f eine invertierbare Abbildung. Zeige, dass die Abbildung g mit $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ eindeutig bestimmt ist. Wir nennen sie die *inverse Abbildung* oder *Umkehrabbildung* und schreiben $g = f^{-1}$.

   (b) Zeige, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann invertierbar ist, wenn sie bijektiv ist.

3. Sei $\sigma \in \mathrm{Per}(n)$, der Permutationsgruppe von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Zeige, dass es fuer jedes Element $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ein $l \in \mathbb{N}$ gibt, so dass
   $$\sigma^l(x) = x.$$
   Folgere, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass
   $$\sigma^N = \mathrm{Id}.$$

4. Sei G eine Gruppe, so dass fuer jedes Element $x \in G$ gilt $x^2 = 1$. Zeige, dass G abelsch ist.