**LinA 2**

**Multilineare Algebra**

Anton Deitmar

Sommer 25

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Dualraum und Quotient

## 1.1 Der Dualraum

**Definition 1.1.1.** Sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper K. Eine **Linearform** auf $V$ ist eine lineare Abbildung $\alpha : V \to K$. Sind $\alpha, \beta$ Linearformen und sind $\lambda, \mu \in K$, so ist $\lambda\alpha + \mu\beta$, definiert durch

$$(\lambda\alpha + \mu\beta)(v) = \lambda\alpha(v) + \mu\beta(v),$$

wieder eine Linearform. Man sieht, dass $V^*$ ein linearer Unterraum des Vektorraums $\mathrm{Abb}(V, K)$ ist.

**Beispiele 1.1.2.** (a) Ist $V = K$, so ist jede Linearform von der Form $x \mapsto \lambda x$ für ein $\lambda \in K$.

(b) Ist $V = K^n$, so ist jede Koordinatenabbildung $v \mapsto v_j$ eine Linearform.

(c) Ist $S$ eine Menge in $V = \mathrm{Abb}(S, K)$ der Vektorraum aller Abbildungen von $S$ nach $K$, so ist für jedes $s \in S$ die Punktauswertung $\delta_s : V \to K$; $f \mapsto f(s)$ eine Linearform.

**Definition 1.1.3.** Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von $V$. Für $j = 1, \dots, n$ sei $v_j^*$ die Linearform

$$v_j^*(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_j.$$

**Warnung:** Die Vektoren $v_1^*, \dots, v_n^*$ hängen von der Wahl der gesamten Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ ab, es sollte also besser $v_{1,\mathcal{B}}^*, \dots, v_{n,\mathcal{B}}^*$ heißen.

**Beispiele 1.1.4.** (a) Sei $V = K^n$ und $e_1, \dots, e_n$ die Standard-Basis. Dann gilt

$$e_j^* \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_j.$$

(b) Sei die Charakteristik von $K \neq 2$ und sei $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sowie $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dann ist $v_1, v_2$ eine Basis von $K^2$ und es gilt

$$v_1^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2}, \qquad v_2^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x-y}{2}.$$

**Lemma 1.1.5.** *Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von $V$, so ist $v_1^*, \dots, v_n^*$ eine Basis von $V^*$, genannt die* **duale Basis**. *Insbesondere ist $V$ endlich-dimensional, falls $V$ dies ist.*

*Beweis.* Sei $\alpha \in V^*$. definiere $\lambda_j = \alpha(v_j)$. Wir behaupten, dass $\alpha = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*$. Es reicht zu zeigen, dass diese beiden linearen auf den Basisvektoren übereinstimmen. Es ist aber gerade

$$(\lambda_1 v_1^* + \cdots + \lambda_n v_n^*)(v_j) = \lambda_1 v_1^*(v_j) + \cdots + \lambda_n v_n^*(v_j) = \lambda_j = \alpha(v_j).$$

damit ist also $\alpha = \lambda_1 v_1^* + \cdots + \lambda_n v_n^*$ und $v_n^*, \dots, v_n^*$ ein Erzeugendensystem. Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen nimm an wir habe eine Linearkombination der Null: $\mu_1 v_1^* + \cdots + \mu_n v_n^* = 0$. Für $1 \le j \le n$ gilt dann

$$0 = (\mu_1 v_1^* + \cdots + \mu_n v_n^*)(v_j) = \mu_j,$$

also $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$. □

**Bemerkungen.**

- Ist $V$ endlich-dimensional und $v_1, \dots, v_n$ eine Basis, so liefert die lineare Abbildung gegeben durch $v_j \mapsto v_j^*$ einen Isomorphismus der Vektorräume $V \to V^*$. Dieser hängt allerdings von der Wahl der Basis ab.
- Ist $V$ unendlich-dimensional, so ist $V^*$ nicht isomorph zu $V$ (ohne Beweis).

**Beispiele 1.1.6.** (a) Ist $V = K^n$, so ist der durch die Standard-Basis induzierte Isomorphismus $V \to V^*$ gegeben durch $x \mapsto x^t$, wobei $x^t$ für die transponierte Matrix steht und damit für die lineare Abbildung $y \mapsto x^t y$.

(b) Die Basis $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ von $K^2$ induziert einen Isomorphismus $K^2 \to (K^2)^*$ gegeben durch $x \mapsto (\frac{1}{2}x)^t$.

**Lemma 1.1.7.** *Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist $T^* : W^* \to V^*$, gegeben durch*

$$T^*(\alpha) = \alpha \circ T$$

*eine lineare Abbildung. Sie heißt die zu $T$* **duale Abbildung***. Es gilt*

$$(\lambda T + \mu S)^* = \lambda T^* + \mu S^*, \text{ sowie } (T \circ R)^* = R^* \circ T^*,$$

*wobei $T, S : V \to W$, $R : U \to V$ linear sind und $\lambda, \mu \in K$.*

*Beweis.* Wir müssen zuerst zeigen, dass $f^*(\alpha)$ wieder linear ist. Hierzu rechnen wir

$$\begin{aligned} T^*(\alpha)(\lambda v + \mu v') &= \alpha(T(\lambda v + \mu v') \\ &= \alpha(\lambda T(v) + \mu T(v') \\ &= \lambda\alpha(T(v)) + \mu\alpha(T(v')) = \lambda T^*(\alpha)(v) + \mu T^*(\alpha)(v'). \end{aligned}$$

Daher ist $T^*(\alpha)$ wieder linear und $T^* : W^* \to V^*$ wohldefiniert. Als nächstes ist zu zeigen, dass $\alpha \mapsto T^*(\alpha)$ linear ist. Dies sieht man durch

$$T^*(\lambda\alpha + \mu\beta)(v) = (\lambda\alpha + \mu\beta)(T(v)) = \lambda\alpha(T(v)) + \mu\beta(T(v)) = \lambda T^*(\alpha)(v) + \mu T^*(\beta)(v).$$

Schließlich ist zu zeigen, dass für festes $\alpha$ die Abbildung $T \mapsto T^*(\alpha)$ linear ist, was man ähnlich zeigt.

Am Ende schließlich zur Hintereinanderausführung:

$$(T \circ R)^*(\alpha) = \alpha \circ (T \circ R) = (\alpha \circ T) \circ R = (T^*(\alpha)) \circ R = R^*(T^*(\alpha)) = R^* \circ T^*(\alpha). \qquad \square$$

**Lemma 1.1.8.** *Die Duale Abbildung wird durch die transponierte Matrix dargestellt. Genauer, sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von $V$ und $\mathcal{C}$ eine von $W$. Dann gilt*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}(T^*) = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(T)\right)^t.$$

*Beweis.* Sei $A = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(T)$, das heißt

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} w_i.$$

Damit $T^*(w_k^*)(v_j) = w_k^*(T(v_j)) = a_{k,j}$, also

$$T^*(w_k^*) = \sum_{j-1}^{n} a_{k,j} v_j^*,$$

was gerade bedeutet, dass $T^*$ durch die Matrix $A^t$ dargestellt wird. $\square$

**Korollar 1.1.9.** *Sei $T : V \to W$ linear, wobei $V$ und $W$ endlich-dimensional sind. Dann gilt*

(a) $\dim \operatorname{Bild} T = \dim \operatorname{Bild} T^*$,

(b) $\dim \ker T - \dim \ker T^* = \dim V - \dim W$,

(c) *$T$ injektiv $\Leftrightarrow$ $T^*$ surjektiv,*

(d) *$T^*$ injektiv $\Leftrightarrow$ $T$ surjektiv,*

(e) *$T$ bijektiv $\Leftrightarrow$ $T^*$ bijektiv.*

*Beweis.* (a) Sei $T$ durch die Matrix $A$ dargestellt. Dann ist $\dim \operatorname{Bild} T$ gerade der Rang von $A$. Dieser ist gleich dem Rang von $A^t$, also gleich $\dim \operatorname{Bild}(T^*)$.

(b) Nach den Dimensionsformeln und Teil (a) ist

$$\begin{aligned}\dim\ker T - \dim\ker T^* &= (\dim V - \dim \operatorname{Bild} T) - (\dim W^* - \dim \operatorname{Bild} T^*)\\ &= \dim V - \dim W.\end{aligned}$$

(c) $T$ ist genau dann injektiv, wenn $\dim\ker T = 0$ und dies ist nach (b) äquivalent zu $\dim\ker T^* = \dim W - \dim V$ oder $\dim V = \dim \operatorname{Bild} T^*$ nach Dimensionsformel. (d) folgt ähnlich und (e) folgt aus (c) und (d). □

**Definition 1.1.10.** Eine Sequenz von linearen Abbildungen

$$U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W$$

heißt **exakt bei** $V$, falls

$$\ker S = \operatorname{Bild} T$$

gilt. Eine Sequenz

$$\cdots \to V_{i-1} \to V_i \to V_{i+1} \to \ldots$$

heißt **exakt**, falls sie an jeder Stelle exakt ist.

**Beispiele 1.1.11.** (a) Ist $V = U \oplus V$ eine direkte Summe zweier Unterräume, dann ist die entstehende Sequenz

$$0 \to U \to V \to W \to 0$$

exakt.

(b) Für jede lineare Abbildung $T : V \to W$ ist die Sequenz

$$0 \to \ker(T) \to V \xrightarrow{T} W$$

exakt.

(c) Ist

$$U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W$$

exakt, dann ist insbesondere $S \circ T = 0$.

**Lemma 1.1.12.** *Die Dualisierung verwandelt exakte Sequenzen in exakte Sequenzen, d.h. ist*

$$U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W$$

*exakt, dann ist*

$$W^* \xrightarrow{S^*} V^* \xrightarrow{T^*} U^*$$

*exakt.*

*Beweis.* Es ist $(T^*) \circ (S^*) = (S \circ T)^* = 0$ und damit folgt $\mathrm{Bild}(S^*) \subset \ker(T^*)$. Sei also $\alpha \in \ker(T^*)$., d.h. $\alpha \circ T = 0$, also $\alpha(\mathrm{Bild}(T)) = 0$ und damit $\alpha(\ker(S)) = 0$. Wir definieren $\beta : \mathrm{Bild}(S) \to K$ durch $\beta(S(v)) = \alpha(v)$. Da $\alpha(\ker(S)) = 0$, ist $\beta$ wohldefiniert. Dann ist $\beta$ linear und kann durch die Wahl eines Komplemantärraums nach $W$ fortgesetzt werden. Dann ist $\beta \in W^*$ und $\alpha = S^*(\beta)$, also $\alpha \in \mathrm{Bild}(S^*)$. □