LinA 2
Algebraische Strukturen

Anton Deitmar

Sommer 25

Inhaltsverzeichnis

1 Gruppen

1.1 Permutationen

Für eine beliebige Menge M bezeichnen wir mit $\mathrm{Per}(M)$ die Gruppe der **Permutationen** von M, d.h., die Menge aller bijektiven Abbildungen $\sigma : M \to M$ mit der Hintereinanderausführung als Gruppenmultiplikation. Für eine natürliche Zahl n sei dann $\mathrm{Per}(n)$ die Gruppe $\mathrm{Per}(\{1,\dots,n\})$. Wir nennen $\mathrm{Per}(n)$ auch die Gruppe der Permutationen in n Buchstaben.

Die Elemente der Permutationsgruppe $\mathrm{Per}(n)$ schreibt man zB in der Form $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, wobei wir das Bild jeweils unter das Element schreiben, also in diesem Beispiel $\tau(1) = 2$, $\tau(2) = 3$ und $\tau(3) = 1$. Eine andere Schreibweise für dasselbe Element ist die **Zykelschreibweise**:

$$\tau = (1,2,3)$$

was soviel bedeutet wie 1 geht auf 2 geht auf 3 geht auf 1. Das Element, das 1 und 2 vertauscht, schreibt sich dann als $(1,2)$. Nicht jedes Element von $\mathrm{Per}(n)$ ist als ein einziger Zykel schreibbar, so ist zum Beispiel in $\mathrm{Per}(4)$ das Element $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ in der Zykelschreibweise gleich

$$(1,2)(3,4).$$

Definition 1.1.1. Ein **Zykel** in $\mathrm{Per}(n)$ ist ein Tupel $(j_1, j_2, \dots, j_r)$, $r \geq 2$ von verschiedenen natürlichen Zahlen $1 \leq j_1, j_2, \dots, j_r \leq n$. Ein Zykel repräsentiert eine Permutation, die j_ν auf $j_{\nu+1}$ und j_r auf j_1 wirft und alle anderen Zahlen festhält. Der Zykel $(j_1, \dots, j_r)$ repräsentiert dieselbe Permutation wie der Zykel $(j_2, j_3, \dots, j_r, j_1)$, deshalb kann man den Zykel stets durch einen ersetzen, für den j_1 die kleinste der Zahlen $j_1, \dots, j_k$ ist. Ein Zykel in dieser Form heisst **kanonisch**.

Zwei Zykel $(j_1, \dots, j_k)$ und $(i_1, \dots, i_s)$ heissen **disjunkt**, falls sie keine gemeinsamen Zahlen haben, also falls

$$\left\{j_1, \dots, j_k\right\} \cap \left\{i_1, \dots, i_s\right\} = \emptyset.$$

Beispiel 1.1.2. Wir schreiben die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 7 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ als Produkt kanonischer Zykel:

$$(2,6,4,5)(3,7).$$

Satz 1.1.3.

(a) *Zwei kanonische Zykel stellen genau dann dieselbe Permutation dar, wenn sie gleich sind.*

(b) *Zwei disjunkte Zykel, aufgefasst als Elemente von* $\mathrm{Per}(n)$, *kommutieren miteinander.*

(c) *Jede Permutation* $\neq \mathrm{Id}$ *in* $\mathrm{Per}(n)$ *lässt sich als Produkt paarweise disjunkter kanonischer Zykel schreiben, diese sind eindeutig bestimmt bis auf die Reihenfolge.*

Beweis. (a) Seien $(j_1, j_2, \dots, j_r)$ und $(i_1, i_2, \dots, i_s)$ zwei kanonische Zykel, die dieselbe Permutation γ darstellen. Dann ist j_1 das kleinste Element von $\{1, \dots, n\}$, das von γ überhaupt vertauscht wird und dasselbe gilt von i_1, also folgt $j_1 = i_1$. Ferner ist $j_2 = \gamma(j_1) = \gamma(i_1) = i_2$ und so weiter.

(b) Sei $\gamma = (j_1, \dots, j_k)$ ein Zykel in $\mathrm{Per}(n)$ und sei $\tau \in \mathrm{Per}(n)$. Es gilt dann

$$\tau\gamma\tau^{-1} = (\tau(j_1), \dots, \tau(j_k)).$$

Ist $\tau = (i_1, \dots, i_s)$ auch ein Zykel, dann sind die $i_1, \dots, i_s$ genau die Zahlen, die von τ überhaupt verändert werden. Ist also τ zu γ disjunkt, so folgt $\tau\gamma\tau^{-1} = \gamma$.

(c) Wir geben ein Verfahren zum Finden der Zykel zu einem gegebenen $\gamma \in \mathrm{Per}(n)$. Sei j_1 die kleinste Zahl in $\{1, \dots, n\}$, die von γ überhaupt verändert wird. Sei dann $j_2 = \gamma(j_1)$ und so weiter. Die Folge $j_1, j_2, \dots$ kann nicht unendlich sein, also gibt es ein kleinstes $k \in \mathbb{N}$ und zu diesem ein kleinstes $s \in \mathbb{N}$ so dass $j_{k+s} = j_k$ gilt. Das heisst also $\gamma(j_{k+s-1}) = j_k$. Ist $k > 1$, so gilt aber auch $\gamma(j_{k-1}) = j_k$, woraus aber $j_{k+s-1} = j_{k-1}$ folgt, was der Minimalität von k widerspricht. Es ist also $k = 1$ und damit ist $\alpha = (j_1, \dots, j_s)$ ein Zykel, der die Zahlen $(j_1, \dots, j_s)$ genauso abbildet wie γ, so dass $\alpha^{-1}\gamma$ sie alle festhält. Dieser ist dann gleich e oder nicht, in welchem Fall wir das Verfahren wiederholen und einen zweiten Zykel β finden, der disjunkt zu α ist und so weiter. Das Verfahren bricht wegen Endlichkeit des Problems ab. □

Beispiel 1.1.4. Wir können die Elemente von $\mathrm{Per}(3)$ als Zykel hinschreiben: $e, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)$.