

Vier Punkte pro Aufgabe.

Beweise oder widerlege:

- (a) Es gibt einen Gruppenisomorphismus $(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \times)$,
- (b) Es gibt einen Gruppenisomorphismus $(\mathbb{Q}, +) \rightarrow (\mathbb{Q}_{>0}, \times)$.

Sei A eine endliche abelsche Gruppe. Zeige

$$\prod_{a \in A} a^2 = 1.$$

Sei G eine Gruppe der Ordnung 55, die auf einer Menge X mit 18 Elementen operiere. Zeige, dass es mindestens zwei Fixpunkte gibt. Ein Fixpunkt ist ein Punkt $x \in X$ mit $gx = x$ für jedes $g \in G$.

Beweise oder widerlege: Sind A, B Untergruppen von G und gilt $G = A \cup B$, dann ist $A \subset B$ oder $B \subset A$.

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei G eine Gruppe, so dass fuer jedes $a \in G$ gilt $a^2 = 1$. Zeige, dass G abelsch ist.
2. Ein *Homomorphismus* von Gruppen ist eine Abbildung $\phi : G \rightarrow H$ zwischen Gruppen, so dass $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ gilt. Ein *Isomorphismus* von Gruppen ist ein Homomorphismus, der bijektiv ist. Zeige:
 - (a) Ist ϕ ein Homomorphismus, dann gilt $\phi(1) = 1$ und $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$ fuer jedes $a \in G$.
 - (b) Ist ϕ ein Isomorphismus, dann ist die Umkehrabbildung ebenfalls ein Homomorphismus.
3. Seien $e_1, \dots, e_n$ die Standard Basis von K^n und betrachte die Bilinearform $b(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$. Linearformen auf K^n werden als Zeilenvektoren aufgefasst. Sei $v_1, \dots, v_n$ irgendeine Basis und sei S die Matrix mit den Spalten $v_1, \dots, v_n$. Zeige, dass $v_1^*, \dots, v_n^*$ die Zeilen der Matrix S^{-1} sind.

4. Sei

$$0 \rightarrow V_0 \rightarrow \dots \rightarrow V_n \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von endlich-dimensionalen Vektorraeumen. Zeige, dass

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \dim(V_j) = 0.$$