Kohomologie und Garben
Anton Deitmar, Sommer 2025

Contents

1 Kategorien und Funktoren

1.1 Kategorien

Definition 1.1.1. Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus den folgenden Daten:

(a) eine nichtleere Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ von "Objekten",

(b) für je zwei $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von "Morphismen" oder "Pfeile",

(c) für jedes Objekt X einen Pfeil $\mathbf{1}_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$,

(d) eine Kompositionsabbildung $\circ : \mathrm{Hom}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$,

so dass $\circ$ assoziativ ist und für jedes $\alpha : X \to Y$ gilt

$$\alpha = \mathbf{1}_Y \circ \alpha = \alpha \circ \mathbf{1}_X.$$

Das Symbol $\circ$ wird oft ausgelassen, man schreibt also

$$\alpha = \mathbf{1}_Y \alpha = \alpha \mathbf{1}_X.$$

Definition 1.1.2. Für jedes Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es die **duale Kategorie** $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ mit dichtlben Objekten, aber umgedrehten Pfeilen, also

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heisst **kleine Kategorie**, falls $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge ist.

Beispiele 1.1.3. (a) Die Kategorie der Mengen und Abbildungen SET, die Kategorie der Gruppen und Gruppenhomomorphismen GRP, die Unterkategorie der abelschen Gruppen AB, die Kategorie der kommutativen Ringe mit Eins, RING und die Kategorie $\mathrm{Mod}(R)$ von Modulen eines kommutativen Rings R mit Eins sind Kategorien, die oft auftreten.

(b) Eine **triviale Kategorie** ist eine Kategorie $\mathcal{C}$, deren einzige Pfeile die Identitäten $\mathbf{1}_X$, $X \in \mathcal{C}$ sind.

(c) Eine Gruppe G kann als eine Kategorie mit nur einem Objekt betrachtet werden. Die Elemente der Gruppe sind die Pfeile dieser Kategorie.

Definition 1.1.4. Ein Morphismus $f : X \to Y$ heisst **Monorphismus** oder **mono**, falls stets aus $f\alpha = f\beta$ folgt $\alpha = \beta$. Er heisst **epi**, wenn er mono in $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ ist, was soviel heisst

wie
$$\gamma f = \tau f \quad \Rightarrow \quad \gamma = \tau.$$

Definition 1.1.5. Ein Pfeil $f : X \to Y$ heisst **Isomorphismus**, falls es ein $g : Y \to X$ gibt mit $fg = \mathbf{1}_Y$ und $gf = \mathbf{1}_X$.

Definition 1.1.6. Ein **Gruppoid** ist eine Kategorie, in der alle Pfeile Isomorphismen sind.

Beispiele 1.1.7. (a) Ist $\mathcal{C}$ ein Gruppoid und $X \in \mathcal{C}$, dann ist $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ eine Gruppe. Ein Gruppoid mit nur einem Objekt ist ein Gruppe.

(b) Für einen topologischen Raum X definieren wir das **Fundamentalgruppoid** $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ wie folgt: Objekte sind die Punkte von X und Morphismen sind die Homotopieklassen (mit festen Enden) von Wegen in X. Die Komposition ist durch die Hintereinanderausführung von Wegen gegeben. Für jedes $x_0 \in X$ ist die Gruppe
$$\mathrm{Hom}(x_0, x_0) = \pi_1(X, x_0)$$
die Fundamentalgruppe im Basispunkt x_0.