**Garben** Blatt **2**

Sommer 2025

Professor Deitmar Ausgabe: 23.4.2025

1. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine Äquivalenz von Kategorien. Zeige, dass jeder Funktor, der isomorph zu $F$ ist, ebenfalls eine Äquivalenz von Kategorien ist.

2. Für eine Menge $X$ sei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge. Setze $X \mapsto \mathcal{P}(X)$ auf zwei Arten (kovariant und kontravariant) zu einem Funktor SET$\to$SET fort.

3. Sei MAT die folgende Kategorie: Objekte sind die natürlichen Zahlen und Null, Morphismen von $n$ nach $m$ sind die $m \times n$ Matrizen, Komposition ist durch Matrixmultiplikation gegeben.

   **Zeige,** dass MAT zur Kategorie der endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathrm{VEKT}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{R})$ äquivalent ist.

4. Sei $\mathcal{F} : C \to \mathrm{SET}$ ein Funktor. Seien $X \in \mathcal{C}$ und $\mathcal{H}^X = \mathrm{Hom}(X, \cdot) : C \to \mathrm{SET}$ der von $X$ dargestellte Funktor. Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi_X : \mathrm{Hom}(\mathcal{H}^X, \mathcal{F}) &\to \mathcal{F}(X), \\ \eta &\mapsto \eta_X(\mathbf{1}_X) \end{aligned}$$

   eine Bijektion ist.

| | |
|---|---|
| **Garben** | Blatt **1** |
| Sommer 2025 | |
| Professor Deitmar | Ausgabe: 16.4.2025 |

1. Untersuche ob die Kategorien RING, FIELD, TOP, $\mathrm{TOP}_*$, GRP initiale oder terminale Objekte haben und beschreibe diese.

2. Zeige, dass jeder Ringhomomorphismus $f : R \to \mathbb{Q}$ mit $f(1) = 1$ ein Epi in der Kategorie RING ist.

3. Zeige, dass ein Gruppenhomomorphismus genau dann ein Epi in GRP ist, wenn er surjektiv ist.

4. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem initialen Objekt $I$ und einem terminalen Objekt $T$. Nimm an, dass $\mathrm{Hom}(T, I) \neq \emptyset$. Zeige, dass $T \cong I$.