Symmetrische Bilinearformen

Anton Deitmar

Inhaltsverzeichnis

1 Symmetrische Bilinearformen

Definition 1.1. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$b : V \times V \to \mathbb{R}$$

heißt **symmetrische Bilinearform**, falls

(a) fuer jedes $w \in V$ die Abbildung
$$v \mapsto b(v, w)$$
linear ist und

(b) fuer alle $v, w \in V$ gilt
$$b(v, w) = b(w, v).$$

Die erste Eigenschaft nenn man **Linearitaet im ersten Argument** und die zweite **Symmetrie**.

Bemerkung 1.2. Aus der Symmetrie folgt, dass auch die Abbildung

$$w \mapsto b(v, w)$$

fuer jedes $v \in V$ linear ist. Also ist b in beiden Argumenten linear, was den Namen bilinear rechtfertigt.

Beispiele 1.3. (a) Die Nullabbildung ist eine symmetrische Bilinearform.

(b) Die Abbildung $R^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$;

$$(v, w) \mapsto v^t w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$$

ist eine symmetrische Bilinearform, die sogenannte **kanonische Bilinearform** auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v, u, w \in \mathbb{R}^n$ rechnen wir

$$\left(\lambda v + \mu u\right)^t w = (\lambda v^t + \mu u^t) w = \lambda v^t w + \mu u^t w$$

nach den Rechenregeln der Matrizenmultiplikation. Die Linearität im zweiten Argument folgt entweder ebenso. □

(c) Allgemeiner git: ist $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ eine **symmetrische Matrix**, also mit

$$A^t = A,$$

dann ist $b(v,w) = v^tAw$ eine symmetrische Bilinearform, denn die Abbildung $x \mapsto v^tAw$ ist linear und

$$b(w,v) = w^tAv = (w^tAv)^t = v^tA^tw = v^tAw = b(v,w).$$

(d) Die Abbildung $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ ist eine symmetrische Bilinearform.

Beweis. Für $A,B,C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ und $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ rechnen wir

$$\mathrm{tr}((\lambda A + \mu C)B) = \mathrm{tr}(\lambda AB + \mu CB) = \lambda\,\mathrm{tr}(AB) + \mu\,\mathrm{tr}(CB).$$

Die Symmetrie ist bekannt $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. □

(e) Ist S eine Menge und ist $V = \mathrm{Abb}(S,\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Abbildungen von S nach $\mathbb{R}$, ist ferner $s_0 \in S$ ein Punkt, dann ist

$$\begin{aligned} b : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (f,g) &\mapsto f(s_0)g(s_0) \end{aligned}$$

eine symmetrische Bilinearform.

Beweis. Die Symmetrie ist klar. Fuer die Linearitaet seien $f,g,h \in V$ und $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} b(\lambda f + \mu h, g) &= (\lambda f + \mu h)(s_0)g(s_0) \\ &= (\lambda f(s_0) + \mu h(s_0))g(s_0) \\ &= \lambda f(s_0)g(s_0) + \mu h(s_0)g(s_0) \\ &= \lambda b(f,g) + \mu b(h,g). \end{aligned}$$

Die Linearität im zweiten Argument geht ebenso. □

Definition 1.4. Sei $b : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform und sei $\mathcal{B} = (v_1,\dots,v_n)$ eine Basis von V. Die **Matrix von** b bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ definieren wir als die Matrix $B = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(b) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$B_{i,j} = b(v_i,v_j).$$

Beispiel 1.5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei V der reelle Vektorraum aller Polynome $f \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad $\le n$. Sei b die symmetrische Bilinearform gegeben durch

$$b(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Sei $\mathcal{B}$ die Basis $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Schreibe $v_j = x^{j-1}$ für $j = 1, \ldots, n+1$. Dann gilt

$$b(v_i, v_j) = \int_0^1 x^{i-1+j-1}\, dx = \frac{1}{i+j-1}.$$

Also ist die zugehörige Matrix gleich

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{3} & & \ddots & & \frac{1}{n+3} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.6. *Sei* $\dim V = n$ *und sei* $\mathrm{Sym}(V)$ *die Menge aller symmetrischen Bilinearformen auf* V*. Sei* $\mathcal{B}$ *eine Basis von* V*, dann ist die Abbildung* $b \mapsto \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(b)$ *ein linearer Isomorphismus* $\mathrm{Sym}(V) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$*, dem Raum der symmetrischen Matrizen. Insbesondere ist* $\dim \mathrm{Sym}(V) = n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{(n+1)n}{2}$.

Beweis. Für die Injektivität stellen wir fest, dass die Matrix B die Form b eindeutig festlegt, denn

$$b\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j\Big) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j b(v_i, v_j) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j B_{i,j} = \lambda^t B \mu. \qquad (*)$$

Für das letzte Gleichheitszeichen haben wir λ und μ als Spaltenvektoren in $\mathbb{R}^n$ aufgefasst. Andererseits kann man $(*)$ auch rückwärts lesen, nämlich indem es für eine gegebene Matrix B eine Bilinearform b definiert, was dann die Surjektivität liefert. □

Beispiel 1.7. Im Spezialfall $V = \mathbb{R}^n$ bedeutet das Lemma, dass jede gegebene Bilinearform b in der Form

$$b(x, y) = x^t B y$$

für eine eindeutig bestimmte Matrix $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ geschrieben werden kann.

Lemma 1.8. *Sei* V *endlich-dimensional und sei* $b : V \times V \to \mathbb{R}$ *eine symmetrische Bilinearform. Dann sind äquivalent:*

(a) *Zu jedem* $0 \neq v \in V$ *gibt es ein* $w \in V$ *mit* $b(v, w) \neq 0$.

(b) *Zu jedem* $0 \neq w \in V$ *gibt es ein* $v \in V$ *mit* $b(v, w) \neq 0$.

(c) *Fuer jede Basis* $\mathcal{B}$ *ist die Matrix* $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(b)$ *invertierbar.*

Ist dies erfüllt, so heißt b **regulaer**, *oder auch* **nicht ausgeartet**.

Beweis. (a)⇒(c): Es gelte (a) und es sei $\mathcal{B}$ eine Basis. Ist $M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(b)$ nicht invertierbar, dann gibt es ein $0 \neq v' \in \mathbb{R}^n$ mit $v'M = 0$. Sei $v \in V$ das Element mit $\phi_{\mathcal{B}}(v) = v'$. Ist dann $w \in V$ beliebig, dann gilt $b(v,w) = v'M\phi_{\mathcal{B}}(w) = 0$ im Widerspruch zu (a).

(c)⇒(a): Sei $0 \neq v \in V$ und $M = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(b)$ invertierbar. Schreibe $\Phi = \Phi_{\mathcal{B}}$. Sei dann $y \in \mathbb{R}^n$ und $w = \phi^{-1}\left(M^{-1}y\right)$. Es gilt

$$b(v,w) = \phi(v)^t M\phi(w) = \phi(v)^t MM^{-1}\phi(v) = \phi(v)^t y.$$

Dies ist $\neq 0$ fuer ein geeignetes y.

(a)⇔(b): Man kann vom ersten Argument zum zweiten uebergehen, wenn man b durch $b^t(v,w) = b(w,v)$ ersetzt. Die entsprechende Matrix ist $\phi_{\mathcal{B}}(b^t) = \phi_{\mathcal{B}}(b)^t$, die transponierte. Diese ist genau dann invertierbar, wenn die von b es ist. □

Beispiele 1.9. (a) Die kanonische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ ist regulaer, denn die Matrix ist die Einheitsmatrix.

(b) Die Spurform $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$; $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ ist regulaer, denn fuer gegebenes $0 \neq A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ sei $B = A^t$. Dann gilt

$$\begin{aligned} b(A,B) &= \mathrm{tr}(AA^t) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(AA^t\right)_{k,k} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n A_{k,l}A^t_{l,k} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n A^2_{k,l} > 0. \end{aligned}$$

(c) Sei $V = \mathrm{Abb}(S,\mathbb{R})$ und $s_0 \in S$. Die Punktauswertungsform

$$\begin{aligned} b : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (f,g) &\mapsto f(s_0)g(s_0) \end{aligned}$$

ist genau dann regulaer, wenn $|S| \leq 1$. Ist nämlich $s_1 \neq s_0$ ein weiteres Element, dann gilt für die Abbildung

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = s_1, \\ 0 & x \neq s_1, \end{cases}$$

dass $b(f,g) = 0$ für jedes $g \in V$ aber dennoch ist $f \neq 0$.

Satz 1.10 (Basiswechsel für Bilinearformen)**.** *Sei $b \in \mathrm{Bil}(V)$ und seien $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ Basen von V. Dann gilt*

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(b) = S^t\, \mathrm{M}_{\mathcal{C}}(b) S,$$

wobei $S = S^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ die Basiswechselmatrix ist.

Beweis. Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ so gilt

$$v_j = \sum_{k=1}^{m} S_{k,j} w_k.$$

Seien $B = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(b)$ und $C = \mathrm{M}_{\mathcal{C}}(b)$. Dann ist $C_{i,j} = b(w_i, w_j)$ und

$$\begin{aligned} B_{i,j} = b(v_i, v_j) &= b\Big(\sum_{k=1}^{m} S_{k,i} w_k, \sum_{l=1}^{m} S_{l,j} w_l\Big) \\ &= \sum_{k,l} S_{k,i} b(w_k, w_l) S_{l,j} = \sum_{k,l} S_{k,i} C_{k,l} S_{l,j} = (S^t C S)_{i,j}. \end{aligned}$$ □

Definition 1.11. Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ heißen **kongruent**, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gibt, so dass

$$B = S^t A S.$$

Wir stellen fest: zwei symmetrische Matrizen A und B stellen genau dann dieselbe Bilinearform bzgl. verschiedener Basen dar, wenn sie kongruent sind.

Erinnerung: A und B heißen **konjugiert**, wenn $B = S^{-1} A S$ gilt.

Beispiele 1.12. (a) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \\ & 1 \end{pmatrix}^2$ ist kongruent zur Einheitsmatrix, aber nicht konjugiert zur Einheitsmatrix, denn sie hat andere Eigenwerte.

(b) Die Matrizen $\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} & \frac{1}{4} \\ 4 & \end{pmatrix}$ sind konjugiert, aber nicht kongruent, denn einerseits

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \\ & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \\ & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \frac{1}{4} \\ 4 & \end{pmatrix}$$

und andererseits, ist

$$\begin{pmatrix} & \frac{1}{4} \\ 4 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & ad + bc \\ ad + bc & 2cd \end{pmatrix},$$

dann folgt leicht ein Widerspruch.

Satz 1.13. *Sei b eine symmetrische Bilinearform auf dem endlich-dimensionalen Raum V. Dann gibt es eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von V, so dass $b(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$, d.h. die Form b wird durch eine Diagonalmatrix dargestellt. Eine solche Basis nennt man* **Orthogonalbasis** *zu b.*

Beweis. Wir beweisen diesen Satz durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Wir zeigen $n \to n+1$. Sei $v_1 \neq 0$ in V.

1. Fall. Ist $b(v_1, v) = 0$ für alle $v \in V$, so ergänzen wir v_1 zu einer Basis $v_1, \dots, v_{n+1}$ von V und in dieser Basis wird b dargestellt durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ für eine symmetrische Matrix $C \in \mathrm{M}_n(K)$. Sei $U = \mathrm{Spann}(v_2, \dots, v_{n+1})$, dann stellt C die Form b eingeschränkt auf U dar. Nach Induktionsvoraussetzung können wir die Basis so wählen, dass C Diagonalgestalt hat und der Beweis ist fertig.

2. Fall. Gibt es ein $v \in V$ mit $b(v_1, v) \neq 0$, dann ist die polynomiale Abbildung

$$\lambda \mapsto b(v_1 + xv, v_1 + xv) = b(v_1, v_1) + 2xb(v_1, v) + x^2 b(v, v)$$

nicht die Nullabbildung. Daher können wir v_1 durch einen Vektor der Form $v_1 + \lambda v$ mit $\lambda \in K$ ersetzen so dass $b(v_1, v_1) \neq 0$ gilt. Sei nun

$$U = \left\{ v \in V : b(v, v_1) = 0 \right\} = \ker(v \mapsto b(v, v_1)).$$

dann ist U ein Untervektorraum, der v_1 nicht enthält. Ausserdem ist er der Kern eines nichttrivialen linearen Funktionals $V \to K$, nach der Dimensionsformel ist also $\dim U = n$. Sei $v_2, \dots, v_{n+1}$ eine Basis von U, dann wird b in der Basis $v_1, \dots, v_{n+1}$ durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ dargestellt mit $\lambda = b(v_1, v_1)$. Nach Induktionsvoraussetzung kann man $v_2, \dots, v_{n+1}$ so wählen, dass C diagonal ist. □

Korollar 1.14. *Jede symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Sym}_n(K)$ ist kongruent zu einer Diagonalmatrix, d.h., es existiert $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ so dass $S^t A S$ eine Diagonalmatrix ist.*

Beweis. Dies ist nur eine Umformulierung des Satzes für Matrizen. □

Definition 1.15. Eine Bilinearform b auf V heißt **positiv definit**, falls

$$b(v, v) > 0$$

für jedes $v \in V \setminus \left\{ 0 \right\}$. Wir schreiben in diesem Fall $b > 0$.

Die Form b heißt **positiv semidefinit**, falls $b(v, v) \geq 0$ für alle $v \in V$. Wir schreiben $b \geq 0$.

Definition 1.16. Sei b eine symmetrische Bilinearform auf V. Seien $U_1, \dots, U_k$ Unterräume von V mit

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k.$$

Dann heisst diese Zerlegung von V eine **Orthogonalzerlegung**, falls für $i \neq j$ stets gilt

$$b(U_i, U_j) = 0,$$

wobei $b(U_i, U_j) = \left\{ b(u, u') : u \in U_i, u' \in U_j \right\}$.

Satz 1.17 (Trägheitssatz von Sylvester)**.** (a) *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und b eine symmetrische Bilinearform auf V. Dann existiert eine Orthogonalzerlegung*

$$V = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-$$

so dass $b = 0$ auf V_0, dass $b > 0$ auf V_+ und $b < 0$ auf V_-. Dabei ist der Raum V_0 und die Dimensionen $p = \dim V_+$ und $q = \dim V_-$ eindeutig bestimmt. Das Paar $(p, q) \in \mathbb{N}_0^2$ wird die **Signatur** *der Matrix, oder der dargestellten Bilinearform genannt.*

(b) *Jede symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ ist kongruent zu einer eindeutig bestimmten Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen*

$$\underbrace{1, \dots, 1}_{p \text{ mal}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q \text{ mal}}, 0, \dots, 0.$$

Beweis. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Orthogonalbasis von V. Durch Umnummerieren erreichen wir

$$b(v_j, v_j) \begin{cases} > 0 & 1 \leq j \leq p, \\ < 0 & p + 1 \leq j \leq p + q, \\ = 0 & p + q + 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Sei dann

$$\begin{aligned} V_+ &= \mathrm{Spann}(v_1, \dots, v_p) \\ V_- &= \mathrm{Spann}(v_{p+1}, \dots, v_{p+q}) \\ V_0 &= \mathrm{Spann}(v_{p+q+1}, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Dann erfüllt die Zerlegung $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$ die Bedingung. Weiter ist V_0 der Raum aller $u \in V$ mit $b(u, v) = 0$ für alle $v \in V$ und damit eindeutig bestimmt. Für die Eindeutigkeit der Dimensionen sei $V = V_0 \oplus V'_+ \oplus V'_-$ eine weitere Zerlegung, dann ist b auf $V_0 \oplus V_+$ positiv semidefinit, also ist $(V_0 \oplus V_+) \cap V'_- = 0$, damit folgt

$\dim V_0 + \dim V_+ + \dim V_-' \le \dim V = \dim V_0 + \dim V_+ + \dim V_-$ und damit $\dim V_-' \le \dim V_-$. Aus Symmetriegründen folgt Gleichheit und ebenso für V_+.

Für Teil (b) wenden wir (a) auf $V = K^n$ und die durch A gegebene Bilinearform an. Dann folgt aus (a), dass A kongruent ist zu einer Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $a_1, \dots, a_n$ mit $a_1, \dots, a_p > 0$, $a_{p+1}, \dots, a_{P+q} < 0$ und $a_{p+q+1}, \dots .a_n = 0$. Sei S die Diagonalmatrix mit Einträgen $s_1, \dots, s_n$, wobei

$$s_j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|a_j|}} & a_j \neq 0, \\ 1 & a_j = 0. \end{cases}$$

Dann ist $S = S^t$ und S^tAS ist eine Diagonalmatrix mit Einträgen in $\left\{ \pm 1, 0 \right\}$ wie verlangt. □

Definition 1.18. Eine symmetrische Bilinearform b heisst

- **positiv definit**, falls $b(v,v) > 0$ fuer jedes $v \in V$,
- **positiv semidefinit**, falls $b(v,v) \geq 0$ fuer jedes $v \in V$.

Entsprechend heisst eine symmetrische Matrix A **positiv definit** bzw. semidefinit, falls die symetrisch form $b(v,w) = v^tAw$ es ist.

Satz 1.19. *Fuer eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ sind aequivalent:*

(a) *A ist positiv definit,*

(b) *Es gilt $\det(A_k) > 0$ fuer jedes $k = 1, \dots, n$, wobei A_k die linke obere $k \times k$ Teilmatrix ist.*

Man nennt die Zahlen $\det(A_k)$ auch die **Hauptminoren** von A.

Beweis. (a)⇒(c): Jede positiv definite Matrix A hat positive Determinante, denn ist

$$S^tAS = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix},$$

$\alpha_j > 0$, dann ist $\det(A) = \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{\det(S)^2} > 0$.

Die Matrix A_k beschreibt die Einhraenkung der zu A gehoerenden Bilinearform auf den k-dimensionalen Unterraum

$$\mathrm{Spann}(e_1, \dots, e_k).$$

Also ist auch A_k positiv und $\det(A_k) > 0$.

(a)⇒(c): Induktion nach n. Der Fall $n = 1$ ist klar. Nach Induktionsannahme koennen wir A_{n-1} als positiv annehmen, aalso gibt es nach Sylvester ein $S_1 \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ mit

$$S_1^t A_{n-1} S = I_{n-1}.$$

Sei

$$S_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & S_1 & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Dann gilt

$$B := S_2^t A S_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \beta_1 \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & \beta_{n-1} \\ \hline \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n \end{array}\right).$$

Mit der Matrix

$$S = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & -\beta_1 \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & -\beta_{n-1} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ergibt sich dann

$$D := S^t B S = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & \alpha \end{array}\right)$$

mit $\alpha = \beta_n - \beta_1^2 - \cdots - \beta_{n-1}^2$. Es bleibt zu zeigen, dass $\alpha > 0$ ist. Das folgt aus $\det S = 1$ und

$$\alpha = \det D = \det B = \det(S_2)^2 \ \det A. \qquad \square$$

* * *