1 Blatt 1

1. Seien X, Y, Z Mengen, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen und $g \circ f : X \to Z$ die Komposition von f und g. Beweise:

   (a) Zeige
   $$\begin{aligned} f \text{ und } g \text{ injektiv} &\Rightarrow g \circ f \text{ injektiv} \\ &\Rightarrow f \text{ injektiv.} \end{aligned}$$

   (b) Zeige
   $$\begin{aligned} f \text{ und } g \text{ surjektiv} &\Rightarrow g \circ f \text{ surjektiv} \\ &\Rightarrow g \text{ surjektiv.} \end{aligned}$$

   (c) Gib ein Beispiel, in dem $g \circ f$ injektiv ist, g aber nicht.

   (d) Gib ein Beispiel, in dem $g \circ f$ surjektiv ist, f aber nicht.

   Lösung: (a) Seien f und g injektiv und seien $a, b \in X$ mit $g(f(a)) = g \circ f(a) = g \circ f(b) = g(f(b))$. Da g injektiv ist, folgt $f(a) = f(b)$ und da f injektiv ist, folgt $a = b$ also ist $g \circ f$ injektiv.

   Fuer die zweie Implikation nimmm an, dass $g \circ f$ injektiv ist. Seien dann $a, b \in X$ mit $f(a) = f(b)$. Dann folgt $g \circ f(a) = g(f(b)) = g(f(b)) = g \circ f(b)$ und da $g \circ f$ injektiv ist, folgt $a = b$.

   (b) Seien f und g surjektiv und sei $z \in Z$. Da g surjektiv ist, gibt es ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$, so dass $f(x) = y$. Dann folgt $z = g(f(x)) = g \circ f(x)$ und da z beliebig war, ist $g \circ f$ surjektiv.

   Fuer die zweite Implikation sei $f \circ g$ surjektiv und sei $z \in Z$. Dann gibt es ein $x \in X$ mit $z = g \circ f(z) = g(f(z))$. also gibt es ein $y \in Y$, nämlich $y = f(x)$ mit $g(y) = z$ und daher ist g surjektiv.

   (c) Seien $X = \{1\} = Z$ und $Y = \{1, 2\}$ und $f(1) = 1$, sowie $g(1) = g(2) = 1$. Dann ist g nicht injektiv, $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ aber schon. Dasselbe Beispiel funktioniert fuer Teil (d). □

2. (a) Sei f eine invertierbare Abbildung. Zeige, dass die Abbildung g mit $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ eindeutig bestimmt ist. Wir nennen sie die **inverse Abbildung** oder **Umkehrabbildung** und schreiben $g = f^{-1}$.

   (b) Zeige, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann invertierbar ist, wenn sie bijektiv ist.

   Lösung: (a) Wir nehmen an, es gibt eine weitere Abbildung $h : Y \to X$ mit $h \circ f = \mathrm{Id}_X$ und $f \circ h = \mathrm{Id}_Y$. Dann gilt
   $$g = g \circ \mathrm{Id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{Id}_X \circ h = h,$$
   also $g = h$ wie behauptet.

   (b) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir müssen zeigen:
   $$f \text{ invertierbar } \Leftrightarrow f \text{ bijektiv.}$$

   "$\Rightarrow$" Sei f invertierbar und sei f^{-1} die Umkehrabbildung. Sind $x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$, so gilt $x = \mathrm{Id}_X(x) = f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x')) = \mathrm{Id}_X(x') = x'$, also $x = x'$, somit ist f injektiv. Sei ferner $y \in Y$, so gibt es ein $x \in X$, nämlich $x = f^{-1}(y)$ mit $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$, also ist f auch surjektiv.

   "$\Leftarrow$" Sei f bijektiv und sei $y \in Y$. Dann existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$, da f surjektiv ist. Da f obendrein injektiv ist, ist x eindeutig bestimmt. Wir definieren also $g(y) = x$. Wir machen dies für jedes $y \in Y$ und definieren so eine Abbildung $g : Y \to X$, die nach Definition die Gleichung $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ erfüllt. Sei $x \in X$ und sei $y = f(x)$, dann folgt $x = g(y)$ und also $g(f(x)) = x$ und also auch $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. □

3. Sei $\sigma \in \mathrm{Per}(n)$, der Permutationsgruppe von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Zeige, dass es fuer jedes Element $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ein $l \in \mathbb{N}$ gibt, so dass
$$\sigma^l(x) = x.$$
Folgere, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass
$$\sigma^N = \mathrm{Id}.$$

Lösung: (a) Betrachte die Folge $x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots$. Da die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ endlich ist, muss es $k, l \in \mathbb{N}$ geben mit $\sigma^{k+l}(x) = \sigma^k(x)$. Dann folgt
$$\sigma^l(x) = \sigma^{-k}\Big(\sigma^k\big(\sigma^l(x)\big)\Big) = \sigma^{-k}\Big(\sigma^{k+l}(x)\Big) = \sigma^{-k}\Big(\sigma^k(x)\Big) = x.$$

(b) Nach Teil (a) gibt es fuer jedes $x \in \{1, \ldots, n\}$ ein $l(x) \in \mathbb{N}_0$, so dass $\sigma^{l(x)}(x) = x$. Sei $N = l(1)l(2) \cdots l(n)$. Sei nun $x \in \{1, \ldots, n\}$ und sei $k = \prod_{j \neq l(x)} l(j) = l(1)l(2) \cdots l(n)/l(x)$. Dann gilt $\sigma^{l(x)}(x) = x$ und daher gilt mit $l = l(x)$
$$\sigma^N(x) = \left(\sigma^l\right)^k(x) = \sigma^l\Big(\sigma^l\Big(\ldots\Big(\underbrace{\sigma^l(x)}_{x}\Big)\ldots\Big)\Big) = \cdots = x. \qquad \square$$

4. Sei G eine Gruppe, so dass fuer jedes Element $x \in G$ gilt $x^2 = 1$. Zeige, dass G abelsch ist.

Lösung: Die Voraussetzung besagt, dass $a = a^{-1}$ fuer jedes $a \in G$ gilt. Seien $a, b \in G$. Dann gilt $ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$. $\square$

2 Blatt 2

1. Schreibe die Additions- und Multiplikationstabellen fuer die Koerper $\mathbb{F}_5$ und $\mathbb{F}_7$ auf.

Lösung: $\mathbb{F}_5$:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$\mathbb{F}_7$:

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

×	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

□

2. Seien K ein Körper und $x_0, ..., x_n, y_0, ..., y_n \in K$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Zeige, dass es genau ein Polynom $f \in K[x]$ vom Grad $\leq n$ gibt, so daß $f(x_i) = y_i$, fuer $i = 0, ..., n$.

Hinweis: Konstruiere zunächst Polynome $g_k \in K[x]$ von Grad $\leq n$ mit

$$g_k(x_i) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Lösung: Fuer $g'_k(x) = \prod_{i \neq k}(x - x_i)$ gilt $g'_k(x_k) \neq 0$. Daher kann man definieren $g_k(x) := \frac{g'_k(x)}{g'_k(x_k)}$. Dieses Polynom erfuellt

$$g_k(x_i) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Das Polynom $f(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j g_j(x)$ erfuellt dann die Behauptung. □

3. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ oder $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind Untervektorräume? (Antwort mit Begründung!)

(a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 2x_3 \right\} \subset \mathbb{R}^3$

(b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^4 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$

(c) $C = \left\{ \begin{pmatrix} \mu + \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \mu, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

(d) $D = \{ f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) = f(-x) \text{ fuer alle } x \in \mathbb{R} \} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(e) $E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq x_2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$

Lösung: (a) Dies ist ein Unterraum. Beweis durch Nachrechnen.

(b) Dies ist ebenfalls ein Unterraum, denn es ist der Nullraum.

(c) Dies ist kein Unterraum, denn mit $\mu = 0$ und $\lambda = 1$ sieht man, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in C liegt, aber $(-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ liegt nicht in C, denn esgibt kein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda^2 = -1$.

(d) Ist Unterraum. Nachrechnen.

(e) Kein Unterraum, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$, aber $(-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin E$. □

4. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *periodisch*, falls $f(x+1) = f(x)$ fuer alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige: Die Menge der periodischen Abbildungen ist ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Lösung: Ist Unterraum. Nachrechnen. □

3 Blatt 3

1. Seien V ein Vektorraum und $v_1, ..., v_k \in V$ linear unabhängig. Sei $w \in V$ so daß $v_1 + w, ..., v_k + w$ linear abhängig sind. Zeige: w liegt im Span von $v_1, ..., v_k$.

   Lösung: Es gibt $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$, nicht alle Null, so dass $\lambda_1(v_1 + w) + \cdots + \lambda_k(v_k + w) = 0$ gilt. Mit $\lambda = \lambda_1 + \dots \lambda_k$ gilt dann $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = -\lambda w$. Angenommen, $\lambda = 0$. Dann folgt aus der linearen Unabhaengigkeit von $v_1, \dots, v_k$, dass $\lambda_1 = \lambda_1 = \cdots = 0$, was der Voraussetzung widerspricht! Es folgt also $\lambda \neq 0$, dividiert man dann durch $-\lambda$, so erhaelt man

   $$w = \frac{-\lambda_1}{\lambda} v_1 + \cdots + \frac{-\lambda_k}{\lambda} v_k$$

   und damit liegt w im Span der v_j. □

2. (a) Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis des Vektorraums V. Zeige, dass die Abbildung

   $$K^n \to V,$$
   $$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

   eine Bijektion ist.

   (b) Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit p Elementen. Sei V ein Vektorraum ueber $\mathbb{F}_p$ der Dimension n. Wieviele Elemente hat V?

   Lösung: (a) Sie ist surjektiv, da die Basis erzeugend ist und sie ist injektiv, da wegen die unabhaengigkeit jeder Vektor genau eine Darstellung als Linearkombination hat.

   (b) Nach Teil (a) gilt $|V| = |\mathbb{F}_p^n| = p^n$. □

3. Zeige, dass zwei Vektoren

   $$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in K^2$$

   genau dann linear abhängig sind, wenn $ad - bc = 0$.

   Lösung: Sind die Vektoren linear abhaengig, dann ist einer ein Vielfacher des anderen. Ohne Einschraenkung koennen wir annehmen, dass beide Vektoren ungleich Null sind und dass $\binom{c}{d} = \lambda\binom{a}{b}$ ist fuer ein $\lambda \neq 0$. Das bedeutet dann $ad - bc = \lambda ab - \lambda ab = 0$.

   Umgekehrt gelte $ad - bc = 0$ und es seien beide Vektoren ungleich Null. Ist $ad = 0$, dann auch bc und dann bleiben folgende Moeglichkeiten: $\binom{0}{b}, \binom{0}{d}$ oder $\binom{a}{0}, \binom{c}{0}$. In beiden Faellen sind die Vektoren linear abaengig. Es sei also $ad \neq 0$ und damit $a \neq 0 \neq d$. Dann folgt

   $$\frac{b}{d}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{bc}{d} \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ad}{d} \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

   und damit sind die Vektoren linear abhaengig. □

4. Seien $v_1, ..., v_k \in \mathbb{Q}^n$ linear unabhängig ueber $\mathbb{Q}$. Zeige: $v_1, ..., v_k$ sind linear unabhängig ueber $\mathbb{R}$.

   Lösung: Ergaenze die Vektoren zu einer Basis $v_1, \dots, v_n$ von $\mathbb{Q}^n$. Dann lassen sich die Standard-Basisvektoren $e_1, \dots, e_n$ als Linearkombinationen der v_j ausdruecken. Da diese auch den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ aufspannen, erzeugen $v_1, \dots, v_n$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Dieser hat Dimension n und daher ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ und insbesondere linear unabhaengig ueber $\mathbb{R}$. □

4 Blatt 4

1. Seien V ein Vektorraum und U, U', W Unterräume. Beweise oder widerlege:

   (a) $U + W = U \Leftrightarrow W \subset U$,

   (b) $U + W = U' + W \Rightarrow U = U'$.

   Lösung: (a) ist korrekt:
   "$\Rightarrow$": Es gilt $W \subset U + W = U$.
   "$\Leftarrow$": Ist $W \subset U$, dann folgt $U + W \subset U + U = U$. Da die Inklusion $U \subset U + W$ ohnehin klar ist, folgt Gleichheit.

   (b) ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist $U = W = K$ der Koerper und $U' = 0$. □

2. Sei $T\colon K^2 \to K^2$ gegeben durch
$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   bestimme Kern und Bild von T.

3. Sei $F : V \to V$ eine lineare Abbildung und sei $v \in V$ ein Vektor, sowie $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $F^n(v) \neq 0$, aber $F^{n+1}(v) = 0$. Zeige, dass die Vektoren $v, F(v), F^2(v), \dots, F^n(v)$ linear unabhängig sind.

   Lösung: Seien $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_0 v + \lambda_1 Fv + \dots + \lambda_n F^n v = 0$. Damit folgt
$$\begin{aligned} 0 &= F^n\Big(\lambda_0 v + \lambda_1 Fv + \dots + \lambda_n F^n v\Big) \\ &= \lambda_0 F^n v + \underbrace{\lambda_1 F^{n+1} v + \dots + \lambda_n F^{2n} v}_{0} \\ &= \lambda_0 F^n v. \end{aligned}$$
   Da $F^n v \neq 0$, ist $\lambda_0 = 0$. Man ersetzt v durch Fv und n durch $n-1$. Dann kann man denselben Schluss nochmal anwenden und erhaelt $\lambda_1 = 0$ und so weiter bis $\lambda_n = 0$. □

4. Sei V ein Vektorraum und $P : V \to V$ linear mit der Eigenschaft, dass
$$P \circ P = P.$$
   Zeige, dass es eindeutig bestimmte Unterräume $U, W \subset V$ gibt mit $V = U \oplus W$ und
$$P(u + w) = w$$
   für jedes $u \in U$ und jedes $w \in W$. (Man nennt eine solche Abbildung eine **Projektion**.)

   Lösung: Wir behaupten, dass $V = \ker P \oplus \mathrm{Bild} P$. Sei zunaechst $u \in \ker P \cap \mathrm{Bild} P$. Dann ist $u = Pw$ fuer ein $w \in V$, also ist
$$0 = Pu = P^2 w = Pw = u.$$
   Die beiden Räume haben also trivialen Schnitt. Sei nun $v \in V$ beliebig. Dann gilt
   $P(1-P)v = (P-P^2)v = (P-P)v = 0$, also ist $(1-P)v \in \ker P$. Andererseits ist $Pv \in \mathrm{Bild} P$ und wir haben
$$v = (1 - P + P)v = (1-P)v + Pv \in \ker P + \mathrm{Bild} P.$$
   Zur Eindeutigkeit: sind U, W wie in der Aufgabe, dann folgt sofort $U \subset \ker(P)$ und $W \subset \mathrm{Bild}(P)$. Ist umgekehrt $v \in \ker(P)$, dann schreibt man $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$. Es ist dann
   $0 = P(v) = P(u + w) = w$ und damit liegt $v = u$ in U, also $U = \ker(P)$. Schliesslich betrachte
   $v' \in \mathrm{Bild}(P)$, also $v' = P(v)$ fuer ein $v \in V$. Schreibe wieder $v = u + w$, dann ist $v' = p(u + w) = w \in W$, also $W = \mathrm{Bild}(P)$. □

5 Blatt 5

1. Sei $V = \{f \in K[x] : \mathrm{grad}(f) \leq 3\}$ und sei $T : V \to V$ gegeben durch

$$Tf(x) = f(x+1).$$

Berechne die Matrix von T bezueglich der Basis $(f_0, f_1, f_2, f_3) = (1, x, x^2, x^3)$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
Tf_0(x) &= f_0(x+1) = 1 && = f_0 \\
Tf_1(x) &= x + 1 && = f_1 + f_0 \\
Tf_2(x) &= (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 && = f_2 + 2f_1 + f_0 \\
Tf_3(x) &= (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 && = f_3 + 3f_2 + 3f_1 + f_0.
\end{aligned}$$

Also ist die gesuchte Matrix gleich

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

2. Seien K ein Koerper und $S \in \mathrm{M}_n(K)$ eine Matrix mit der Eigenschaft, dass

$$v^t w = 0 \quad \Rightarrow \quad v^t S w = 0.$$

Zeige, dass $S = \lambda I$ fuer ein $\lambda \in K$.

Loesung. Sei $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ und seien e_i, e_j die Standard-Basisvektoren. Dann gilt

$$S_{i,j} = e_i^t S e_j = 0.$$

Daher ist S eine Diagonalmatrix. Seien $d_1, \dots, d_n$ die Diagonaleinträge. Sei $1 \leq j \leq n-1$ und seien $v = (0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0)^t$ und $w = (0, \dots, 0, 1, 1, 0, \dots, 0)^t$, wobei de erste 1 an der j-ten Stelle steht. Dann gilt $v^t w = 0$ und daher

$$0 = v^t S w = d_j - d_{j+1}.$$

Daher sind alle d_j gleich. □

3. (Blockmatrizen) Seien S und T zwei Matrizen so dass ST definiert ist. Teilen wir S und T in kleinere Untermatrizen auf, schreiben also

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix},$$

wobei wir annehmen, dass die Blockaufteilung so ist, dass AX existiert. Zeige, dass

$$ST = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{pmatrix}.$$

Lösung: Die Bedingung, dass ST und AX definiert sind, impliziert, dass die Blockgrößen wie folgt verteilt sind:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad}^{k} & \overbrace{\qquad}^{m} \end{array} \\ \begin{array}{r} n\,\{ \\ p\,\{ \end{array} & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad}^{q} & \overbrace{\qquad}^{r} \end{array} \\ \begin{array}{r} k\,\{ \\ m\,\{ \end{array} & \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \end{array}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
1 \le i \le n,\ 1 \le j \le k &\quad\Rightarrow\quad && S_{i,j} = A_{i,j}\\
1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m &\quad\Rightarrow\quad && S_{i,j+k} = B_{i,j}\\
1 \le i \le p,\ 1 \le j \le k &\quad\Rightarrow\quad && S_{i+n,j} = C_{i,j}\\
1 \le i \le p,\ 1 \le j \le m &\quad\Rightarrow\quad && S_{i+n,j+k} = D_{i,j}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
1 \le i \le k,\ 1 \le j \le q &\quad\Rightarrow\quad && T_{i,j} = X_{i,j}\\
1 \le i \le k,\ 1 \le j \le r &\quad\Rightarrow\quad && T_{i,j+q} = Y_{i,j}\\
1 \le i \le m,\ 1 \le j \le q &\quad\Rightarrow\quad && T_{i+k,j} = Z_{i,j}\\
1 \le i \le m,\ 1 \le j \le r &\quad\Rightarrow\quad && T_{i+k,j+q} = W_{i,j}
\end{aligned}$$

Ist nun $1 \le i \le n,\ 1 \le j \le k$, dann folgt

$$\begin{aligned}
(ST)_{i,j} &= \sum_{\nu=1}^{k+m} S_{i,\nu}T_{\nu,j}\\
&= \sum_{\nu=1}^{k} S_{i,\nu}T_{\nu,j} + \sum_{\nu=1}^{m} S_{i,\nu+k}T_{\nu+k,j}\\
&= \sum_{\nu=1}^{k} A_{i,\nu}X_{\nu,j} + \sum_{\nu=1}^{m} B_{i,\nu}Z_{\nu,j}\\
&= (AX)_{i,j} + (BZ)_{i,j}.
\end{aligned}$$

Die anderen Faelle folgen analog. □

4. Seien U, V, W endlich-dimensionale Vektorräume. Eine Sequenz von linearen Abbildungen:

$$U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W$$

heisst **exakt** bei V, wenn $\mathrm{Bild}(\alpha) = \ker(\beta)$ gilt. Insbesondere ist dann $\beta \circ \alpha = 0$. Eine Sequenz

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W \longrightarrow 0 \tag{1}$$

heisst **kurze exakte Sequenz**, falls sie bei U, V und W exakt ist.
Zeige: Ist (1) eine kurze exakte Sequenz, so ist α injektiv, β surjektiv und es gilt

$$\dim V = \dim U + \dim W.$$

Lösung: Der Kern von α ist das Bild von $0 \to U$, also Null und damit ist α injektiv. Das Bild von β ist der Kern von $W \to 0$, also ganz W und damit ist β surjektiv.

Nach der Dimensionsformel gilt zunaechst $\dim \mathrm{Bild}\alpha = \dim U$, da α injektiv. Da β surjektiv ist, gilt $\dim \mathrm{Bild}\beta = \dim W$. Nach der Dimensionsformel gilt daher

$$\dim V = \dim(\ker\beta) + \dim(\mathrm{Bild}\beta) = \dim U + \dim W.$$ □

6 Blatt 6

1. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Gibt es eine lineare Abbildung $T : V \to V$ mit $\mathrm{Bild}(T) = \ker(T)$?

   Lösung: Es gibt eine solche Abbildung genau dann, wenn die Dimension $\dim V$ gerade ist.

   Sei T eine solche Abbildung. Nach der Dimensionsformel gilt
   $$\dim V = \dim\ker(T) + \dim\mathrm{Bild}(T) = 2\dim\ker(T),$$
   also ist die Dimension von V gerade. Umgekehrt sei $\dim V$ gerade, also $V \cong K^{2n} = K^n \times K^n$. Sei T die lineare Abbildung auf $K^n \times K^n$ mit der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, wobei I die $n \times n$ Einheitsmatrix ist. Dann ist $\ker T = \mathrm{Bild} T = K^n \times \{0\}$. $\square$

2. Sei $A \in M_3(\mathbb{Q})$ die Matrix und $b \in \mathbb{Q}^3$ der Spaltenvektor:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
   Bestimme die Loesungsmenge $L = \{x \in \mathbb{Q}^3 : Ax = b\}$. Beschreibe L in der Form $L = v_0 + U$, wobei $v_0 \in \mathbb{Q}^4$ und U ein Unterraum ist. Gib eine Basis von U an.

   Lösung: Wir bringen die Matrix $(A|b)$ auf Zeilenstufenform:
   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -11 & -7 \\ 0 & -3 & -11 & -7 \end{array}\right)$$
   $$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 11/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
   Wir sehen, dass A den Rang 2 hat, also ist $U = \ker(A)$ eindimensional. Um einen Basisvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ von U zu bestimmen, koennen wir z beliebig waehlen, sagen wir $z = 1$. Dann folgt $y + \frac{11}{3}z = 0$, also $y = -\frac{11}{3}$. Ferner ist $x + 2y + 3z = 0$, also $x = -2y - 3z = \frac{22}{3} - 3 = \frac{13}{3}$. Damit ist
   $$U = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ -\frac{11}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 13 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
   Schliesslich bestimmen wir eine Grundloesung $v_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Es ist $y + \frac{11}{3}z = \frac{7}{3}$, also $y = -\frac{4}{3}$.

   Schliesslich gilt $x + 2y + 3z = 2$, also $x = 2 - 2y - 3z = 2 + \frac{8}{3} - 3 = \frac{5}{3}$. Es folgt $v_0 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit ist die Loesungsmenge L gleich
   $$\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 13 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
   $\square$

3. Berechne die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Lösung: Wir rechnen mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

   Damit ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   die gesuchte Inverse, wie eine Probe bestätigt. □

4. Zeige, dass jeder Unterraum der Dimension $> n(n-1)$ von $\mathrm{M}_n(K)$ eine invertierbare Matrix enthaelt.

   Erste Loesung: Wir zeigen allgemeiner, dass jeder affine Unterraum $X + V$ der Dimension $> n(n-1)$ eine invertierbare Matrix enthaelt. Wir benutzen Induktion nach n. Der Fall $n = 1$ ist klar. Sei die Behauptung also fuer n gezeigt.

   Lemma. Sei $U \subset \mathrm{M}_{(n+1)\times n}(K)$ ein Unterraum der Dimension n^2. Fuer jedes $1 \le j \le n+1$ sei $p : U \to \mathrm{M}_n(K)$, $\begin{pmatrix} b \\ D \end{pmatrix} \mapsto D$. Dann gilt: Nach einer geeigneten Zeilenvertauschung ist $\dim \mathrm{Bild}(p) > n(n-1)$.

   Beweis des Lemmas: Fuer jedes $1 \le j \le n+1$ sei $p_j : U \to \mathrm{M}_n(K)$ die Projektion, die durch Wegstreichen der j-ten Zeile entsteht. Es gilt $n^2 = \dim U = \dim \ker(p_j) + \dim \mathrm{Bild}(p_j)$ und daher ist $\dim \mathrm{Bild}(p_j) \le n(n-1)$ äquivalent zu $\dim \ker p_j \ge n$. Angenommen, dies ist fuer alle j der Fall, dann enthaelt U also alle Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ mit beliebiger j-ten Zeile a und Nullen sonst. Dann ist aber U schon der ganze Raum $M_{(n+1),n}(K)$, Widerspruch!

   Das bedeutet also dass es ein j gibt mit $\dim \mathrm{Bild}(p_j) > n(n-1)$, was aequivalent ist zur Behauptung. Das Lemma ist bewiesen. □

   Um den Induktionsschritt auszuführen sei $V \subset \mathrm{M}_{n+1}(K)$ mit $\dim(V) > (n+1)n$ und sei S eine gegebene Matrix in $\mathrm{M}_{n+1}(K)$. Wir koennen $\dim(V) = (n+1)n + 1$ annehmen. Ferner koennen wir nach Zeilen und Spaltentransformationen annehmen, dass $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ fuer ein $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Sei $W \subset \mathrm{M}_{n+1}(K)$ der Unterraum aller Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$, also mit erster Zeile und Spalte Null.

Es gilt

$$\begin{aligned}\dim(V \cap W) &= \dim V + \dim W - \dim(V + W)\\ &\geq \dim V + n^2 - (n+1)^2\\ &= (n+1)n + 1 + n^2 - (n+1)^2\\ &= n(n-1)\end{aligned}$$

1.Fall. Wir haben $\dim V \cap W > n(n-1)$. Nach Induktionsvoraussetzung enthaelt $V \cap W$ eine Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, so dass $S + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$ invertierbar ist.

2. Fall. Es gilt $\dim(V \cap W) = n(n-1)$. Sei $\pi : V \to \mathrm{M}_n(K)$ die Abbildung $\begin{pmatrix} a & b \\ c & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $V \cap W = \ker(\pi)$ und daher

$$\dim \mathrm{Bild}(\pi) = \dim V - \dim(V \cap W) = n(n+1) + 1 - n(n-1) = 2n + 1.$$

Insbesondere ist daher die Abbildung $V \to K^{2n+1}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & D \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c)$ surjektiv. Sei $q : V \to \mathrm{M}_{(n+1)\times n}(K)$ gegeben durch $\begin{pmatrix} a & b \\ c & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ D \end{pmatrix}$. Dann ist $\dim \mathrm{Bild}(q) = \dim(V \cap W) + n = n(n-1) + n = n^2$. Nach dem Lemma koennen wir annehmen, dass nach Zeilenvertauschung die auftretenden D's einen Raum $\mathcal{D}$ der Dimension $> n(n-1)$ bilden.

Wir ersetzen S durch die Matrix, die aus S durch diese Zeilenvertauschung hervorgeht. Es gibt dann ein $T = \begin{pmatrix} r & s \\ t & Q \end{pmatrix} \in V$, so dass $S + T$ von der Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ ist, fuer ein $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Matrix $B \in \mathcal{D}$, so dass $A + B$ invertierbar ist. Dann enthaelt $S + V = S + T + V$ die invertierbare Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$. □

Zweite Loesung: Es reicht anzunehmen, dass $\dim V = n(n-1) + 1$ ist. Fuer $1 \leq i, j \leq n$ sei $\alpha_{ij} : \mathrm{M}_n(K) \to K$ gegeben durch $\alpha_{ij}(A) = A_{ij}$. Die Menge der α_{ij} ist eine Basis des Raums $\mathrm{Lin}(M_n(K), K)$. Dann sind die Einschraenkungen $\alpha_{ij}|_V$ nach V ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Lin}(V, K)$, es gibt also eine Teilmenge $T \subset \{1, \dots, n\}^2$ so dass $\alpha(T) = \{\alpha_{ij} : (i, j) \in T\}$ eine Basis von V^* ist. Nach der Annahme folgt $|T| = n(n-1) + 1$. Sei S das Komplement von T, dann gilt $|S| = n - 1$. Wir bezeichnen die Elemente von S als "schlechte Stellen" die anderen als gute. Die Abbildung $V \to K^{n(n-1)+1} = \bigoplus_{(i,j)\in T} K\alpha_{i,j}$, $v \mapsto \sum_{(i,j)\in T} \alpha_{i,j}(v)$ ist ein linearer Isomorphismus. Man kann also an allen guten Stellen beliebige Werte $x_{i,j}$ vorgeben und findet stets eine Element $v \in V$ mit $\alpha_{i,j}(v) = x_{i,j}$ fuer alle $(i, j) \in T$.

Wir zeigen nun durch Induktion nach n, dass wir alle schlechten Stellen durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen unter die Diagonale bringen koennen. Hieraus folgt die Behauptung, da wir dann die Werte einer Matrix in V fuer die Diagonale und oberhalb vorschreiben koennen. Es gibt dann insbesondere eine untere Dreiecksmatrix in V mit Einsen auf der Diagonalen. Diese ist invertierbar.

Nun also zum Beweis, dass alle schlechten Stellen unter die Diagonale gebracht werden koennen. Fuer $n = 1$ ist nichts zu zeigen, sei also $n > 1$ und die Behauptung gezeigt fuer $n - 1$. Da nicht jede Zeile eine schlechte Stelle enthalten kann, koennen wir annehmen, dass die erste Zeile keine schlechte Stelle enthaelt. Durch Spaltenvertauschungen koennen wir eine schlechte Stelle in die erste Spalte transportieren. Nach Induktionsvoraussetzung koennen die $n - 2$ schlechten Stellen, die in der Matrix mit Indizes in $\{2, \dots, n\}$ liegen, unter die Diagonale gebracht werden, wobei nur Spaltenvertauschungen verwendet werden, die die erste Spalte unveraendert lassen und nur solche Zeilenvertauschungen, die die erste Zeile unveraendert lassen. Dabei bleibt auch die schlechte Stelle in der ersten Spalte unterhalb der Diagonalen und die Behauptung folgt. □

7 Blatt 7

1. Für $a, b \in \mathbb{Q}$ sei das lineare Gleichungssystem:

$$2x + y = 1$$
$$ax - y = b$$

über $K = \mathbb{Q}$ gegeben.

(a) Für $b = 1$ bestimme alle $a \in \mathbb{Q}$, für die das System lösbar ist.

(b) Für $a = -1$ bestimme alle $b \in \mathbb{Q}$, für die das System lösbar ist und ermittle alle Lösungen.

Lösung: (a) Wir behandeln die Matrix des Sytems durch Zeilentransformationen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1-a/2 & 1-a/2 \end{array}\right).$$

Ist $-1 - \frac{a}{2} \neq 0$, also $a \neq -2$, dann ist das System lösbar, da die Zeilenstufen-Matrix invertierbar ist. Im Fall $a = -2$ liegt der Vektor $\binom{1}{1-a/2} = \binom{1}{2}$ nicht in Bild der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1-a/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, da sein zweiter Eintrag ungleich Null ist.

(b) Wir benutzen wieder Zeilentransformationen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & b \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3/2 & b+1/2 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -(2b+1)/3 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{(2b+1)}{6} - 1/2 \\ 0 & 1 & -(2b+1)/3 \end{array}\right)$$

Der eindeutig bestimmte Loesungsvektor lautet also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2b+1}{6} - \frac{1}{2} \\ -\frac{2b+1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b-1}{3} \\ -\frac{2b+1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} b-1 \\ -2b-1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

2. Bestimme den Rang der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir verwenden Zeilentransformationen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist der Rang von A gleich 3. Ferner

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Rang von B ist demnach gleich 3. Schliesslich zu C:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -91 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Rang, also die Dimension des Bildes ist 4. □

3. Sei $D : \mathrm{M}_n(K) \to K$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

   (a) $D(I) = 1$,

   (b) D ist in jeder Zeile linear,

   (c) $D(A) = 0$, falls A zwei gleiche Zeilen hat.

   Zeige, dass $D(A) = \det(A)$ fuer jedes $A \in \mathrm{M}_n(K)$ gilt.

   Lösung: Wir zeigen $D(EA) = D(E)D(A)$, falls E eine erweiterte Elementarmatrix ist. Indem man den Beweis von Satz 3.2.1 so umschreibt, dass man jedesmal "D" statt "det" schreibt, sieht man

   (a) Falls die Matrix B aus A durch Addition des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen hervorgeht (Zeilentrafo 1), so gilt
   $$D(B) = D(A).$$

   (b) Falls B aus A durch Multiplikation einer Zeile mit $\mu \in K$ hervorgeht (Zeilentrafo 2), so gilt
   $$D(B) = \mu D(A).$$

   (c) Falls die Matrix B aus A durch Vertauschung zweier Zeilen hervorgeht (Zeilentrafo 3), so gilt
   $$D(B) = -D(A).$$

   Dies impliziert die Behauptung. Die Elementarmatrizen entstehen jeweils durch die entsprechende Zeilentranformation angewandt auf die Einheitsmatrix, was aus $EI = E$ folgt. Damit folgt auch $D(E) = \det(E)$ fuer jede Elementarmatrix. Sei nun $A \in M_n(K)$ beliebig. Dann ist A ein Produkt von Elementarmatrizen $A = E_1, \dots, E_k$. Es folgt dann
   $$\begin{aligned} D(A) &= D(E_1 \cdots E_k) \\ &= E_1 D(E_2 \cdots E_K) = \cdots = D(E_1)D(E_2)\cdots D(E_K) \\ &= \det(E_1)\cdots\det(E_k) = \det(E_1 \cdots E_k) = \det(A). \end{aligned}$$
   □

4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum und sei $U_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum, der von U erzeugt wird. Zeige, dass
   $$U_{\mathbb{C}} = U \oplus iU = \left\{u + iv : u, v \in U\right\}$$
   und dass
   $$\dim_{\mathbb{R}}(U) = \dim_{\mathbb{C}}(U_{\mathbb{C}}).$$
   Zeige ferner, dass jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : U \to \mathbb{R}^m$ eindeutig zu einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $T_{\mathbb{C}} : U_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^m$ fortgesetzt werden kann und dass dann
   $$\ker T = \mathbb{R}^k \cap \ker T_{\mathbb{C}} \quad \text{sowie} \quad \left(\ker T\right)_{\mathbb{C}} = \ker\left(T_{\mathbb{C}}\right)$$
   gilt.

   (Es darf benutzt werden, dass Aufgabe 4, Blatt 3 auch fuer die Koerper $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ gilt.)

   Lösung: Der reelle Vektorraum iU liegt in $\mathrm{U}_{\mathbb{C}}$, daher liegt $U + iU$ in $U_{\mathbb{C}}$. Die Summe ist direkt, da $\mathbb{R}^n \cap i\mathbb{R}^n = \left(\mathbb{R} \cap i\mathbb{R}\right)^n = 0$. Schliesslich ist der reelle Unterraum $U \oplus iU \subset U_{\mathbb{C}}$ abgeschlossen unter Skalarmultiplikation mit Elementen von $\mathbb{C}$, denn fuer $\lambda = x + yi \in \mathbb{C}$ und $u + iv \in U \oplus iU$ gilt
   $$\lambda\left(u + iv\right) = (x + yi)(u + iv) = xu + xiv + yiu - yv = \left(xu - yv\right) + i\left(yv + yu\right).$$

Sei $v_1, \dots, v_k$ eine Basis von U. Da $U_\mathbb{C}$ von allen reellen Linearkombinationen der v_j erzeugt wird, wird er auch von den $v_1, \dots, v_n$ erzeugt, diese bilden also ein Erzeugersystem des komplexen Vektorraums $U_\mathbb{C}$. Andererseits sind sie auch ueber $\mathbb{C}$ linear unabhaengig nach Aufgabe 4, Blatt 3, also eine Basis und damit ist $\dim_\mathbb{R} U = k = \dim_\mathbb{C} U_\mathbb{C}$. Sei nun weiter $T : U \to \mathbb{R}^m$ linear. Da die $v_1, \dots, v_k$ auch eine Basis von $U_\mathbb{C}$ bilden, definieren die Bilder $T(v_1), \dots, T(v_k)$ eine eindeutig bestimmte $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $U_\mathbb{C} \to \mathbb{C}^m$.

Die Inklusion $\ker T \subset \mathbb{R}^k \cap \ker T_\mathbb{C}$ ist klar.

Sei $v \in \mathbb{R}^k \cap \ker T_\mathbb{C}$. Nach Definition ist $T_\mathbb{C}|_{\mathbb{R}^k} = T$ und daher folgt $0 = T_\mathbb{C}(v) = T(v)$ und damit $v \in \ker T$.

Zur Inklusion $\left(\ker T\right)_\mathbb{C} \subset \ker\left(T_\mathbb{C}\right)$: Sei $v \in \left(\ker T\right)_\mathbb{C}$. Dann ist $v = v_1 + iv_2$ mit $v_1, v_2 \in \ker T$. also folgt

$$T_\mathbb{C}(v) = T_\mathbb{C}(v_1) + iT_\mathbb{C}(v_2) = T(v_1) + iT(v_2) = 0.$$

Nun zu $\left(\ker T\right)_\mathbb{C} \supset \ker\left(T_\mathbb{C}\right)$. Sei $v \in \ker(T_\mathbb{C})$. Dann ist $v = v_1 + iv_2$ mit $v_1, v_2 \in U$. Es gilt dann

$$0 = T_\mathbb{C}(v_1 + iv_2\big) = T_\mathbb{C}(v_1) + iT_\mathbb{C}(v_2) = T(v_1) + iT(v_2) \in \mathbb{R}^m \oplus i\mathbb{R}^m.$$

Damit ist $T(v_1) = 0 = T(v_2)$, also ist $v \in \ker(T) + i\ker(T) = \ker(T)_\mathbb{C}$. $\square$

5. (Bonusaufgabe)

   (a) Sei $U \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ein Untervektorraum. Der Raum $U_\mathbb{C} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ enthalte eine invertierbare Matrix. Zeige, dass auch U eine invertierbare Matrix enthaelt.
   (Es darf benutzt werden, dass ein Polynom $\neq 0$ nur endlich viele Nullstellen hat. Nimm an, dass die Determinante auf U verschwindet. Waehle eine Basis $u_1 \dots, u_k$ von U und betrachte das Polynom $\det(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + x u_k)$, wobei die $\lambda_j \in \mathbb{R}$ sind.)

   (b) Seien $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Zeige, dass die beiden Matrizen genau dann in $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ konjugiert sind, wenn sie in $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ konjugiert sind.
   (Betrachte the Raum aller Matrizen S mit $SA = BS$.)

Lösung: (a) Angenommen, wir haben $\det(A) = 0$ fuer jedes $A \in U$. Wir zeigen, dass dann $\det(A) = 0$ auch fuer alle $A \in U_\mathbb{C}$ gilt, womit die Behauptung folgt. Sei $u_1, \dots, u_k$ eine Basis von U. Fuer $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{R}$ verschwindet das Polynom $\det(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + x u_k)$ fuer $x \in \mathbb{R}$, hat also unendlich viele Nullstellen. Es ist damit das Nullpolynom. Sei $z_k \in \mathbb{C}$, dann folgt $\det(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{k-2} u_{k-2} + x u_{k-1} + z_k u_k) = 0$ fuer jedes $x \in \mathbb{R}$. Nun ist dies aber wieder ein Polynom in x, verschwindet also auch fuer komplexe Werte $z_{k-1} \in \mathbb{C}$. Wir wiederholen diesen Schluss, bis wir bei

$$\det(z_1 u_1 + \cdots + z_k u_k) = 0 \qquad \forall_{z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}}$$

ankommen. Damit ist die Determinante auf $U_\mathbb{C}$ gleich Null und die Behauptung folgt.

(b) Sind die Matrizen ueber $\mathbb{R}$ konjugiert, dann auch ueber $\mathbb{C}$. Seien sie also ueber $\mathbb{C}$ konjugiert. Das heisst, dass der Raum

$$V_\mathbb{C} = \left\{S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) : SA = BS\right\}$$

also der Kern der linearen Abbildung $S \mapsto SA - BS$, invertierbare Elemente enthaelt. Nacht Teil (a) enthaelt dann auch $V = V_\mathbb{C} \cap \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ein invertierbares Element S, es gilt also $SA = BS$ oder $B = SAS^{-1}$. $\square$

8 Blatt 8

6. Beweise oder widerlege:

   (a) Für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $AA^t = I$ gilt $\det(A) \in \{1, -1\}$. (4)

   (b) Sind u, v Eigenvektoren der Matrix A, dann ist auch $u + v$ ein Eigenvektor

Lösung: (a) Dies ist richtig, denn $1 = \det(AA^t) = \det(A)\det(A^t) = \det(A)^2$ und damit $\det(A) = \pm 1$.

(b) Dies ist falsch, denn zB fuer die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ sind e_1 und e_2 Eigenvektoren, $e_1 + e_2$ aber nicht. □

7. Seien $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene Elemente von K. Zeige

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$$

Hinweis: Betrachte das Polynom

$$P(x) = \det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{pmatrix}.$$

Was ist der Grad von $P(x)$? Bestimme den Leitkoeffizienten von $P(x)$. Was sind die Nullstellen?

Lösung: Der Fall $n = 1$ ist klar. Nimm also an, dass $n \geq 3$ und die Behauptung für $n - 1$ gilt. Indem man nach der letzten Zeile entwickelt, sieht man, dass der Grad von P gleich n ist und dass der Leitkoeffizient

$$\begin{aligned} L = \det&\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \prod_{0 \leq i < j \leq n-1}(x_j - x_i) \end{aligned}$$

ist, wobei zuletzt die Induktionsvoraussetzung gebraucht wurde. Die Zahlen $x_0, \ldots, x_{n-1}$ sind Nullstellen von P und da es n-Stück sind, sind es alle. Es folgt also

$$P(x) = L\prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j).$$

Setzt man $x = x_n$, folgt die Behauptung. □

8. Sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$ und Sei $C(i, j)$ die Matrix aus der Laplace-Entwicklung. Sei schliesslich $A^\#$ die Matrix mit den Einträgen

$$A^\#_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(C(j, i)).$$

Man nennt $A^\# \in \mathrm{M}_n(K)$ die **Adjunkte** zu A. Zeige, dass

$$AA^\# = A^\# A = \det(A)I.$$

Insbesondere gilt fuer invertierbares A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\#}.$$

Lösung: Sind $a_1, \dots, a_n$ die Spalten von A, so gilt

$$A^{\#}_{j,i} = \det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
(A^{\#}A)_{j,k} &= \sum_{i=1}^{n} A^{\#}_{j,i} A_{i,k} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \dots, a_n) a_{i,k} \\
&= \det\Big(a_1, \dots, a_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} e_i, a_{j+1}, \dots, a_n\Big) \\
&= \det\Big(a_1, \dots, a_{j-1}, a_k, a_{j+1}, \dots, a_n\Big) \\
&= \delta_{j,k} \det A,
\end{aligned}$$

wobei

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & j = k, \\ 0 & j \neq k. \end{cases}$$

Das Symbol $\delta_{j,k}$ wird auch **Kronecker-Delta** genannt. Das Produkt $AA^{\#}$ berechnet man analog. □

9. (a) Sei $T : V \to V$ eine lineare Abbildung, so dass jeder Vektor $v \neq 0$ in V ein Eigenvektor ist. Zeige, dass $T = \lambda \mathrm{Id}$ für ein $\lambda \in K$ ist.

   (b) Sei $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ ein Polynom und sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Zeige: Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, dann ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A) = a_0 + a_1 A + \cdots + a_n A^n$.

Lösung: (a) Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ und w einer zum Eigenwert μ. Sind v und w linear abhaengig, so gilt $w = cv$ fuer ein $k \in K^{\times}$ und damit folgt $\lambda = \mu$. Sind sie linear unabhaengig, dann gibt es ein $\nu \in K$ mit

$$\lambda v + \mu w = T(v) + T(w) = T(v + w) = \nu(v + w) = \nu v + \nu w,$$

also $(\lambda - \nu)v + (\mu - \nu)w = 0$ und daher $\lambda - \nu = \mu - \nu = 0$, also $\lambda = \mu$. Daher gilt $Tx = \lambda x$ fuer jedes $x \in V$, also $T = \lambda \mathrm{Id}$.

(b) Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Durch eine Induktion nach $k \in \mathbb{N}_0$ zeigen wir, dass $A^k v = \lambda^k v$ gilt. Dies ist klar fuer $k = 0$. Sei die Behauptung gültig fir $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$A^{k+1} v = A^k A v = A^k \lambda v = \lambda A^k v = \lambda^{k+1} v.$$

Sei nun $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Dann folgt

$$p(A)v = a_1 v + a_1 A v + \cdots + a_n A^n v = a_1 v + a_1 \lambda v + \cdots + a_n \lambda^n v.$$

□