Lineare Algebra 1 | **Klausurvorbereitung**
Winter 2024/25
Professor Deitmar | keine Abgabe

1. (Abteilung Sätze und Definitionen)

   (a) Wann heissen Vektoren $v_1, \dots, v_n$ linear unabhaengig?

   (b) Was ist das Signum einer Permutation?

   (c) Was ist die Summe zweier Unterraeume eines Vektorraumes?

   (d) Was besagt der Satz von Cayley-Hamilton?

   (e) Was besagt der Laplace-Entwicklungssatz?

   (f) Was ist ein Eigenwert?

   (g) Was ist das Minimalpolynopm einer Matrix?

2. (Abteilung Rechnen)

   (a) Bestimme die Jordan-Normalform von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (b) Invertiere die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (c) Seien $K = \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \\ \lambda & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}$, sowie $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimme alle $\lambda \in \mathbb{R}$ für die die Gleichung $Ax = b$ eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ hat und gib jeweils alle Lösungen an.

3. Sei $K = \mathbb{R}$. Bestimme das charakteristische Polynom von

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

   und zeige, dass die Eigenwerte 1 und 2 sind.

4. Fuer welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \\ \lambda & 1 & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

   positiv definit, fuer welche ist sie semidefinit?

5. (Abteilung Beweise, ab hier vollstaendige Begruendungen!)
   Es seien A und B Matrizen aus $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Beweise oder widerlege:

   (a) Ist A^2 diagonalisierbar so ist A diagonalisierbar.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x^t(A + A^t)x = 2x^T Ax$.

(c) Sind A und B orthogonale Matrizen, dann ist $AB = BA$.

(d) Ist A eine orthogonale Matrix mit $\det(A) = -1$, dann hat A den Eigenwert -1.

6. Sei
$$B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right).$$

(a) Zeige, dass die Matrix B positiv definit ist.

(b) Bestimme eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarproduktes $b(x, y) = x^t By$.

(c) Finde eine Matrix $W \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $B = W^t W$.

7. Sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$ und $f \in K[x]$ mit $\deg f > 0$ und $f(A) = 0$. Zeige: gilt $f(0) \neq 0$, dann ist A invertierbar.

8. Seien $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $AB = BA$. Sei v ein Eigenvektor von A. Zeige: Ist $Bv \neq 0$, dann ist Bv ebenfalls ein Eigenvektor von A.

9. Gib Basen der folgenden Räume an:

(a) $\{0\}$

(b) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K^2 : x + y = 0\right\}$.

10. Rechne alle Aufgaben aus Langs Buch *Linear Algebra*.