Lineare Algebra 1 Blatt **6**
Winter 2024/25
Professor Deitmar Abgabe: **28.11.2024, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Gibt es eine lineare Abbildung $T : V \to V$ mit $\mathrm{Bild}(T) = \ker(T)$?

2. Sei $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$ die Matrix und $b \in \mathbb{Q}^3$ der Spaltenvektor:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Bestimme die Loesungsmenge $L = \{x \in \mathbb{Q}^3 : Ax = b\}$. Beschreibe L in der Form $L = v_0 + U$, wobei $v_0 \in \mathbb{Q}^4$ und U ein Unterraum ist. Gib eine Basis von U an.

3. Berechne die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Zeige, dass jeder Unterraum $V \subset \mathrm{M}_n(K)$ der Dimension $> n(n-1)$ eine invertierbare Matrix enthaelt.

Lineare Algebra 1 | Blatt **5**
Winter 2024/25
Professor Deitmar | Abgabe: **21.11.2024, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Sei $V = \{f \in K[x] : \mathrm{grad}(f) \leq 3\}$ und sei $T : V \to V$ gegeben durch
$$Tf(x) = f(x+1).$$
Berechne die Matrix von T bezueglich der Basis $(f_0, f_1, f_2, f_3) = (1, x, x^2, x^3)$.

2. Seien K ein Koerper und $S \in \mathrm{M}_n(K)$ eine Matrix mit der Eigenschaft, dass fuer alle $v, w \in K^n$ gilt
$$v^t w = 0 \quad \Rightarrow \quad v^t S w = 0.$$
Zeige, dass $S = \lambda I$ fuer ein $\lambda \in K$.

3. (Blockmatrizen) Seien S und T zwei Matrizen so dass ST definiert ist. Teilen wir S und T in kleinere Untermatrizen auf, schreiben also
$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix},$$
wobei wir annehmen, dass die Blockaufteilung so ist, dass AX existiert. Zeige, dass
$$ST = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{pmatrix}.$$

4. Seien U, V, W endlich-dimensionale Vektorräume. Eine Sequenz von linearen Abbildungen:
$$U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W$$
heisst *exakt* bei V, wenn $\mathrm{Bild}(\alpha) = \ker(\beta)$ gilt. Insbesondere ist dann $\beta \circ \alpha = 0$. Eine Sequenz
$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W \longrightarrow 0 \tag{1}$$
heisst *kurze exakte Sequenz*, falls sie bei U, V und W exakt ist.
Zeige: Ist (1) eine kurze exakte Sequenz, so ist α injektiv, β surjektiv und es gilt
$$\dim V = \dim U + \dim W.$$

Lineare Algebra 1 Blatt **4**
Winter 2024/25
Professor Deitmar Abgabe: **14.11.2024, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Seien V ein Vektorraum und U, U', W Unterräume. Beweise oder widerlege:
   (a) $U + W = U \Leftrightarrow W \subset U$,
   (b) $U + W = U' + W \Rightarrow U = U'$.

2. Sei $T\colon K^2 \to K^2$ gegeben durch
$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   bestimme Kern und Bild von T.

3. Sei $F : V \to V$ eine lineare Abbildung und sei $v \in V$ ein Vektor, sowie $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $F^n(v) \neq 0$, aber $F^{n+1}(v) = 0$. Zeige, dass die Vektoren $v, F(v), F^2(v), \dots, F^n(v)$ linear unabhängig sind.

4. Sei V ein Vektorraum und $P : V \to V$ linear mit der Eigenschaft, dass
$$P \circ P = P.$$
   Zeige, dass es eindeutig bestimmte Unterräume $U, W \subset V$ gibt mit $V = U \oplus W$ und
$$P(u + w) = w$$
   für jedes $u \in U$ und jedes $w \in W$. (Man nennt eine solche Abbildung eine *Projektion*.)

Lineare Algebra 1 Blatt **3**
Winter 2024/25
Professor Deitmar Abgabe: **7.11.2024, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Seien V ein Vektorraum und $v_1, ..., v_k \in V$ linear unabhängig. Sei $w \in V$ so daß $v_1 + w, ..., v_k + w$ linear abhängig sind. Zeige: w liegt im Span von $v_1, ..., v_k$.

2. (a) Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis des Vektorraums V. Zeige, dass die Abbildung

$$K^n \to V,$$
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

eine Bijektion ist.

   (b) Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit p Elementen. Sei V ein Vektorraum ueber $\mathbb{F}_p$ der Dimension n. Wieviele Elemente hat V?

3. Zeige, dass zwei Vektoren
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in K^2$$
genau dann linear abhängig sind, wenn $ad - bc = 0$.

4. Seien $v_1, ..., v_k \in \mathbb{Q}^n$ linear unabhängig ueber $\mathbb{Q}$. Zeige: $v_1, ..., v_k$ sind linear unabhängig ueber $\mathbb{R}$.

Lineare Algebra 1 Blatt **2**
Winter 2024/25
Professor Deitmar Abgabe: **31.10.2024, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Schreibe die Additions- und Multiplikationstabellen fuer die Koerper $\mathbb{F}_5$ und $\mathbb{F}_7$ auf.

2. Seien K ein Körper und $x_0, ..., x_n, y_0, ..., y_n \in K$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Zeige, dass es ein Polynom $f \in K[x]$ vom Grad $\leq n$ gibt, so daß $f(x_i) = y_i$, fuer $i = 0, ..., n$.

   Hinweis: Konstruiere zunächst Polynome $g_k \in K[x]$ von Grad $\leq n$ mit

$$g_k(x_i) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

3. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ oder $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind Untervektorräume? (Antwort mit Begründung!)

   (a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 2x_3 \right\} \subset \mathbb{R}^3$

   (b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^4 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$

   (c) $C = \left\{ \begin{pmatrix} \mu + \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \mu, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

   (d) $D = \{ f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) = f(-x) \text{ fuer alle } x \in \mathbb{R} \} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

   (e) $E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq x_2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$

4. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *periodisch*, falls $f(x + 1) = f(x)$ fuer alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige: Die Menge der periodischen Abbildungen ist ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Lineare Algebra 1 Blatt **1**

Winter 2024/25

Professor Deitmar Abgabe: **24.10.2024, 10:00**

Vier Punkte pro Aufgabe.

1. Seien X, Y, Z Mengen, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen und $g \circ f : X \to Z$ die Komposition von f und g. Beweise:

   (a) Zeige
   $$\begin{aligned} f \text{ und } g \text{ injektiv} &\Rightarrow g \circ f \text{ injektiv} \\ &\Rightarrow f \text{ injektiv.} \end{aligned}$$

   (b) Zeige
   $$\begin{aligned} f \text{ und } g \text{ surjektiv} &\Rightarrow g \circ f \text{ surjektiv} \\ &\Rightarrow g \text{ surjektiv.} \end{aligned}$$

   (c) Gib ein Beispiel, in dem $g \circ f$ injektiv ist, g aber nicht.

   (d) Gib ein Beispiel, in dem $g \circ f$ surjektiv ist, f aber nicht.

2. (a) Sei f eine invertierbare Abbildung. Zeige, dass die Abbildung g mit $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ eindeutig bestimmt ist. Wir nennen sie die *inverse Abbildung* oder *Umkehrabbildung* und schreiben $g = f^{-1}$.

   (b) Zeige, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann invertierbar ist, wenn sie bijektiv ist.

3. Sei $\sigma \in \mathrm{Per}(n)$, der Permutationsgruppe von $\{1, 2, \dots, n\}$. Zeige, dass es fuer jedes Element $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ ein $l \in \mathbb{N}$ gibt, so dass
   $$\sigma^l(x) = x.$$
   Folgere, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass
   $$\sigma^N = \mathrm{Id}.$$

4. Sei G eine Gruppe, so dass fuer jedes Element $x \in G$ gilt $x^2 = 1$. Zeige, dass G abelsch ist.