

LINEARE ALGEBRA 2

BLATT 11

Abgabe: Donnerstag, den 14.07.2022, 10:00 Uhr

- ⊛ **Aufgabe 1.** Es sei $V := \mathbb{R}^2$. Betrachte das Tensorprodukt $V \otimes V$ und den Vektor

$$u := (1, 2) \otimes (2, 3) - (2, 1) \otimes (1, -1) \in V \otimes V.$$

Entwickle den Vektor u nach der Basis $(v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, v_2 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2)$, wobei

$$v_1 := (1, 2), \quad v_2 := (0, 1), \quad w_1 := (2, 1), \quad w_2 := (3, 1).$$

Aufgabe 2. Zeige, dass das Element $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ nicht zerlegbar ist.

- ⊛ **Aufgabe 3.** Das *Kronecker-Produkt* zweier Matrizen $A \in \text{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ und $B \in \text{Mat}(k, l; \mathbb{K})$ ist die Matrix

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in \text{Mat}(mk, nl; \mathbb{K}).$$

Betrachte die lineare Abbildung $\mu_A \otimes \mu_B: \mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^l \rightarrow \mathbb{K}^m \otimes \mathbb{K}^k$. Zeige: $A \otimes B$ ist die darstellende Matrix der linearen Abbildung $\mu_A \otimes \mu_B$ bezüglich der Basen

$$(e_i \otimes e_j; i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, l), \quad (e_\iota \otimes e_j; \iota = 1, \dots, m, j = 1, \dots, k).$$

Aufgabe 4. Es sei $V := \mathbb{R}^2$. Bestimme die darstellende Matrix $M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}}(\varphi)$ der linearen Abbildung

$$\varphi := \mu_A \otimes \mu_B: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$$

bezüglich der Basis $\mathbb{B} = (e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2)$, wobei die Matrizen A und B gegeben sind als

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die mit ⊛ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.