Lineare Algebra 2

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra

Sommersemester 2022

Blatt 10

Abgabe: Donnerstag, den 07.07.2022, 10:00 Uhr

⊛ **Aufgabe 1.** Untersuche die folgenden Abbildungen auf Bilinearität und gib gegebenenfalls die Gramsche Matrix bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ an:

(i) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \det(v, w)$,

(ii) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto v_1v_2 + w_1w_2$,

(iii) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto v_1w_1 - v_2w_2 + v_1w_2 + v_2w_1$.

Aufgabe 2. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Betrachte den $\mathbb{K}$-Vektorraum $V := \mathbb{K}^2$. Zeige, dass man die Bilinearform

$$\beta : V \times V \to \mathbb{K}, \quad ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1y_2 + x_2y_1$$

nicht als Produkt von Linearformen darstellen kann, d. h., es gibt kein Paar $u, u' \in V^*$ mit $\beta(x, y) = u(x)u'(y)$ für alle $x, y \in V$.

Aufgabe 3. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{C})$ eine symmetrische Matrix vom Rang r. Zeige: Es gibt eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ mit

$$S^t \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

⊛ **Aufgabe 4.** Betrachte $V := \mathbb{R}^4$ und die Bilinearform $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^t \cdot A \cdot y$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4, 4; \mathbb{R}).$$

Bestimme eine Zerlegung $V = V^+ \oplus V^- \oplus V^0$ so, dass Folgendes gilt:

- β ist positiv definit auf V^+,
- β ist negativ definit auf V^-,
- $V^0 = \{v \in V;\ \beta(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in V\}$.

Die mit ⊛ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.