Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra 2

https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/ss22/lina2

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra

Sommersemester 2022

Blatt 9

Abgabe: Donnerstag, den 30.06.2022, 10:00 Uhr

⊛ **Aufgabe 1.** Bestimme rationale und Jordansche Normalform für die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4,4;\mathbb{C}).$$

Bestimme eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(4;\mathbb{C})$ so, dass $S \cdot A \cdot S^{-1}$ die Jordansche Normalform annimmt.

Aufgabe 2. Bestimme A^{1229} für die reelle (3×3)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4,4;\mathbb{R}).$$

⊛ **Aufgabe 3.** Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $J \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ eine Matrix in Jordanscher Normalform, d. h.,

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}, \qquad J_i := \begin{pmatrix} J(k_{i_1},\lambda_i) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(k_{id_i},\lambda_i) \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in \mathbb{K}$ paarweise verschieden sind. Zeige: Die Eigenwerte von J sind $\lambda_1,\dots,\lambda_r$. Dabei besitzt λ_i die algebraische Vielfachheit $k_{i_1}+\dots+k_{id_i}$ und die geometrische Vielfachheit d_i.

Aufgabe 4. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ eine Matrix in Jordanscher Normalform und es sei $A = D + N$, wobei $D \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ eine Diagonalmatrix ist und $N \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{K})$ höchstens auf der (unteren) Nebendiagonalen nichttriviale Einträge besitzt. Zeige:

(i) Es gilt $D \cdot N = N \cdot D$.

(ii) Es gilt $(D+N)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^i N^{k-i}$.

Die mit ⊛ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.