

LINEARE ALGEBRA 2

<https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/ss22/lina2>

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra
Sommersemester 2022

BLATT 7

Abgabe: Mittwoch, den 15.06.2022, 10:00 Uhr

In der Pfingstpause (06. bis 11. Juni) finden keine Vorlesungen und Übungsgruppen statt. Der Vorlesungs- und Übungsbetrieb beginnt wieder am Montag, den 13. Juni.

- ⊗ **Aufgabe 1.** Bestimme Elementarteiler und primäre Elementarteiler für die folgenden \mathbb{Z} -Moduln:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/200\mathbb{Z}.$$

- Aufgabe 2.** Bestimme Elementarteiler und primäre Elementarteiler des \mathbb{Z} -Moduls \mathbb{Z}^3/N , wobei

$$N := \text{Lin}((2, 0, 2), (2, -3, 8), (0, 3, -6)) \leq_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^3.$$

- Aufgabe 3.** Bestimme bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 200.

- ⊗ **Aufgabe 4.** Es seien R ein euklidischer Ring, F ein freier R -Modul vom Rang n und $M \leq_R F$ ein Untermodul. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (i) F/M ist frei.
- (ii) F/M ist torsionsfrei.
- (iii) Es gibt eine Basis (v_1, \dots, v_n) von F mit $M = \text{Lin}(v_1, \dots, v_m)$ für ein $m \leq n$.
- (iv) Für je zwei Elemente $v \in F$ und $0_R \neq r \in R$ gilt $r \cdot v \in M \implies v \in M$.

Die mit ⊗ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.