

# LINEARE ALGEBRA 2

<https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/ss22/lina2>

Fachbereich Mathematik  
Arbeitsbereich Algebra  
Sommersemester 2022

---

## BLATT 7

Abgabe: Mittwoch, den 15.06.2022, 10:00 Uhr

---

*In der Pfingstpause (06. bis 11. Juni) finden keine Vorlesungen und Übungsgruppen statt. Der Vorlesungs- und Übungsbetrieb beginnt wieder am Montag, den 13. Juni.*

- ⊗ **Aufgabe 1.** Bestimme Elementarteiler und primäre Elementarteiler für die folgenden  $\mathbb{Z}$ -Moduln:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/200\mathbb{Z}.$$

- Aufgabe 2.** Bestimme Elementarteiler und primäre Elementarteiler des  $\mathbb{Z}$ -Moduls  $\mathbb{Z}^3/N$ , wobei

$$N := \text{Lin}((2, 0, 2), (2, -3, 8), (0, 3, -6)) \leq_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^3.$$

- Aufgabe 3.** Bestimme bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 200.

- ⊗ **Aufgabe 4.** Es seien  $R$  ein euklidischer Ring,  $F$  ein freier  $R$ -Modul vom Rang  $n$  und  $M \leq_R F$  ein Untermodul. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i)  $F/M$  ist frei.

(ii)  $F/M$  ist torsionsfrei.

(iii) Es gibt eine Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  von  $F$  mit  $M = \text{Lin}(v_1, \dots, v_m)$  für ein  $m \leq n$ .

(iv) Für je zwei Elemente  $v \in F$  und  $0_R \neq r \in R$  gilt  $r \cdot v \in M \implies v \in M$ .

---

Die mit ⊗ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.