

LINEARE ALGEBRA 2

<https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/ss22/lina2>

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra
Sommersemester 2022

BLATT 6

Abgabe: Donnerstag, den 02.06.2022, 10:00 Uhr

Aufgabe 1. Als abelsche Gruppe ist $(\mathbb{Q}, +)$ ein \mathbb{Z} -Modul. Zeige: $(\mathbb{Q}, +)$ ist torsionsfrei, aber nicht frei.

Aufgabe 2. Berechne die Länge des \mathbb{Z} -Moduls $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ und gib eine Kette maximaler Länge an. Bestimme weiter die Länge der \mathbb{Z} -Moduln $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$.

⊛ **Aufgabe 3.** Bestimme Hermite- und Smith-Normalform der ganzzahligen Matrix A in den folgenden Fällen:

$$A := \begin{pmatrix} 12 & -4 & 8 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Gib ganzzahlige Matrizen S und T an so, dass $S \cdot A$ bzw. $S \cdot A \cdot T$ die jeweilige Hermite- bzw. Smith-Normalform annimmt.

⊛ **Aufgabe 4.** Es seien R ein Integritätsring, $A \in \text{Mat}(m, n; R)$ und $S \in \text{GL}(n; R)$ so, dass $B := S \cdot A^t$ Zeilenstufenform mit r Pivoteinträgen besitzt. Betrachte die zu A gehörige lineare Abbildung

$$\mu_A : R^n \rightarrow R^m, \quad v \mapsto A \cdot v.$$

Zeige folgende Aussagen:

- (i) Die Zeilen B_{1*}, \dots, B_{r*} bilden eine Basis für $\text{Bild}(\mu_A) \leq_R R^m$.
- (ii) Die Zeilen S_{r+1*}, \dots, S_{n*} bilden eine Basis für $\text{Kern}(\mu_A) \leq_R R^n$.

Die mit ⊛ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.