Lineare Algebra 2

https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/ss22/lina2

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra

Sommersemester 2022

Blatt 5

Abgabe: Donnerstag, den 26.05.2022, 10:00 Uhr

⊛ **Aufgabe 1.** Es seien $v_1 := (1, 1)$, $v_2 := (1, -1) \in \mathbb{Z}^2$. Zeige folgende Aussagen:

(i) Der Aufspann $M := \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathbb{Z}^2$ vom Rang $\mathrm{rg}(M) = 2$.

(ii) Es gilt $M \neq \mathbb{Z}^2$.

(iii) Es gilt $\mathbb{Z}^2/M \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Hinweis: Betrachte in (iii) die Abbildung $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $(x_1, x_2) \mapsto \overline{r(x_1 + x_2; 2)}$.

Aufgabe 2. Es seien R ein $K1$-Ring und M ein R-Modul. Zeige: Es gibt einen freien R-Modul F so, dass $M \cong F/N$ für einen Untermodul $N \leq F$ gilt.

Hinweis: Verwende Beispiel 3.2.2, um einen surjektiven Modulhomomorphismus $F \to M$ zu konstruieren.

⊛ **Aufgabe 3.** Bestimme, in welchen der folgenden Fälle die Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, n; R)$ über R invertierbar ist. Gib gegebenenfalls die zugehörige Inverse $A^{-1} \in \mathrm{Mat}(n, n; R)$ an.

(i) $R = \mathbb{Z}$ und $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) $R = \mathbb{Q}[T]$ und $A = \begin{pmatrix} T^2 + 1 & T + 1 \\ T - 1 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $R = \mathbb{Z}[I]$ und $A = \begin{pmatrix} 1 + I & I \\ 3I & -2 + I \end{pmatrix}$

Aufgabe 4. Es seien R ein Hauptidealring und $a, b \in R$. Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) Es gibt $c, d \in R$ so, dass $((a, b), (c, d))$ eine Basis des R-Moduls R^2 ist.

(ii) Die Elemente $a, b \in R$ sind teilerfremd.

Die mit ⊛ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.