Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra 2

https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/ss22/lina2

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra
Sommersemester 2022

Blatt 4

Abgabe: Donnerstag, den 19.05.2022, 10:00 Uhr

⊛ **Aufgabe 1.** Die *Eulersche Φ-Funktion* ordnet jeder Zahl $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ die Anzahl $\Phi(n)$ der zu n teilerfremden ganzen Zahlen m mit $1 \leq m \leq n$ zu:

$$\Phi(n) = |\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 1};\ m \leq n,\ 1 \in \operatorname{ggT}(m,n)\}|.$$

Zeige folgende Aussagen:

(i) Ist $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ eine Primzahl, so ist $\Phi(p) = p - 1$.

(ii) Ist $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ eine Primzahl und $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, so ist $\Phi(p^\nu) = p^\nu - p^{\nu-1}$.

(iii) Für paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und $\nu_1, \ldots, \nu_r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gilt

$$\Phi(p_1^{\nu_1}) \cdots \Phi(p_r^{\nu_r}) = \Phi(p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}).$$

Hinweis: Verwende Bemerkung 2.3.14.

(iv) Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ sei $n = p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$ eine Darstellung mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$. Zeige: Es gilt

$$\Phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Aufgabe 2. Zeige: Zu jedem Tripel (a_1, a_2, a_3) ganzer Zahlen gibt es eine ganze Zahl a mit

$$a \equiv a_1 \mod 13, \qquad a \equiv a_2 \mod 37, \qquad a \equiv a_3 \mod 42,$$

wobei die Schreibweise „$a \equiv b \mod c$“ wie üblich bedeutet, dass c ein Teiler der Differenz $b-a$ ist.

⊛ **Aufgabe 3.** Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(3,3;\mathbb{Q}), \qquad p := T^3 - 2T^2 + 2 \in \mathbb{Q}[T], \qquad v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3.$$

Betrachte die von $\varphi\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$, $v \mapsto A \cdot v$ induzierte $\mathbb{Q}[T]$-Modulstruktur auf $\mathbb{Q}^3$ und berechne $p \cdot v$.

Aufgabe 4. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Betrachte die zugehörige $\mathbb{K}[T]$-Modulstruktur auf V und zeige, dass für jede Teilmenge $U \subseteq V$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) U ist ein Untermodul des $\mathbb{K}[T]$-Moduls V,

(ii) U ist ein Untervektorraum des $\mathbb{K}$-Vektorraums V und es gilt $\varphi(U) \subseteq U$.

Die mit ⊛ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.