Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra 2

https://www.math.uni-tuebingen.de/de/forschung/algebra/lehre/ss22/lina2

Prof. Dr. Jürgen Hausen

Fachbereich Mathematik
Arbeitsbereich Algebra

Sommersemester 2022

Blatt 3

Abgabe: Donnerstag, den 12.05.2022, 10:00 Uhr

Aufgabe 1. Es sei R ein Integritätsring und es seien Elemente $a, a_1, \ldots, a_n \in R$ gegeben. Zeige:

$$a \in \mathrm{kgV}(a_1, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow \langle a \rangle = \langle a_1 \rangle \cap \cdots \cap \langle a_n \rangle.$$

⊛ **Aufgabe 2.** Betrachte den Unterring $R := \mathbb{Z}[I\sqrt{5}] \subseteq \mathbb{C}$ und zeige folgende Aussagen:

(i) Für die Einheitengruppe von R gelten die beiden folgenden Gleichheiten

$$R^* = \{x \in R;\ |x|^2 = 1\} = \{\pm 1\},$$

wobei $|\cdot|$ der komplexe Betrag ist.

(ii) Die Elemente $3 \in R$ und $2 \pm I\sqrt{5} \in R$ sind irreduzibel.

(iii) Die Elemente $3 \in R$ und $2 \pm I\sqrt{5} \in R$ sind nicht prim.

Aufgabe 3. Es sei (R, δ) ein euklidischer Ring. Zeige: Ein Element $a \in R$ ist genau dann eine Einheit, wenn $\delta(a) = \delta(1_R)$ gilt.

⊛ **Aufgabe 4.** Bestimme mittels euklidischem Algorithmus jeweils einen größten gemeinsamen Teiler für

(i) 17556 und 8694 in $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$,

(ii) $6T^5 + 2T^4 - T^3 - 4T^2 + 3$ und $2T^4 + 2T^3 + T^2 - T - 1$ in $(\mathbb{Q}[T], \deg)$,

(iii) $12 + 6I$ und $-1 + 3I$ in $(\mathbb{Z}[I], \delta)$.

Die mit ⊛ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.