

# LINEARE ALGEBRA 2

## BLATT 2

Abgabe: Donnerstag, den 05.05.2022, 10:00 Uhr

⊗ **Aufgabe 1.** Es sei  $R$  ein K1-Ring. Zeige:

- (i) Ist  $S_i, i \in I$ , eine Familie von Unterringen  $S_i \subseteq R$ , so ist  $\bigcap_{i \in I} S_i$  wieder ein Unterring in  $R$ .
- (ii) Ist  $S \subseteq R$  ein Unterring und ist  $A \subseteq R$  eine Teilmenge, so gilt

$$S[A] = \bigcap_{\substack{S' \subseteq R \text{ Unterring,} \\ S \cup A \subseteq S'}} S'.$$

⊗ **Aufgabe 2.** Es sei  $1 \neq d \in \mathbb{Z}$  quadratfrei, d. h., ohne Teiler der Form  $k^2$  mit  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ . Weiter bezeichne  $\sqrt{d} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  wie üblich die Quadratwurzel und für  $d \in \mathbb{Z}_{<0}$  setzen wir  $\sqrt{d} := I\sqrt{|d|} \in \mathbb{C}$ . Zeige:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{m + n\sqrt{d}; m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Betrachte weiter die Abbildung  $N: \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \rightarrow \mathbb{Z}, m + n\sqrt{d} \mapsto m^2 - n^2d$  und zeige:

- (i) Für je zwei  $a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  gilt  $N(ab) = N(a)N(b)$ .
- (ii) Es gilt  $N(a) = 0 \iff a = 0$  für alle  $a \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ .
- (iii) Die Einheitengruppe des Ringes  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  ist  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^* = \{a \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]; N(a) = \pm 1\}$ .

**Aufgabe 3.** Es seien  $R$  ein K1-Ring und  $\mathfrak{a} \trianglelefteq_R R$  ein Ideal in  $R$ . Das *Radikal* von  $\mathfrak{a}$  ist definiert als

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{b \in R; b^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

Zeige: Das Radikal  $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq R$  ist wieder ein Ideal in  $R$ .

*Hinweis:* Verwende den binomischen Lehrsatz.

**Aufgabe 4.** Für  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  bezeichne  $\varphi(n)$  die Anzahl aller ganzen Zahlen  $a$  mit  $1 \leq a \leq n$  und  $\text{ggT}(a, n) = 1$ . Zeige: Für jedes  $a \in \mathbb{Z}$  mit  $\text{ggT}(a, n) = 1$  gilt  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ .

*Hinweis:* Verwende Aufgabe 4 von Blatt 1 und Beispiel 1.3.4.

Die mit ⊗ gekennzeichneten Aufgaben sind zur besonders sorgfältigen schriftlichen Ausarbeitung vorgesehen und werden mit 0–4 Punkten bewertet. Die restlichen Aufgaben werden auf sinnvolle Bearbeitung geprüft.