Eberhard-Karls-Universität Tübingen

Vorlesungsmitschrieb

Algebraische Topologie II

von
Prof. Dr. Frank Loose

LaTeX-Version von G.D.

Letztes Änderung: 11. Mai 2012

Inhaltsverzeichnis

Dies ist eine Vorlesungsmitschrift der Vorlesung Algebraische Topologie II vom SS 2010. Das Skript wurde noch nicht ernsthaft Korrektur gelesen und wird noch viele Tippfehler und ähnliche Fehler enthalten. Wer Fehler findet, kann diese an Prof. Loose per Email melden.

1 Relative Homologie

(1.1) Erinnerung. (a) Sei X ein topologischer Raum. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\Delta_k \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ das k-dimensionale Standard-Simplex.

Ein singuläres k-Simplex ist eine stetige Abbildung $\sigma\colon \Delta_k \to X$ und

$$\Sigma_k(X) := C(\Delta_k, X) := \{\sigma\colon \Delta_k \to X \mid \sigma \text{ stetig}\}.$$

Ist $\mathbb{F}\colon \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ab}$ der Funktor, der jeder Menge M die frei-abelsche Gruppe $\mathbb{F}(M)$ zuordnet,

$$\mathbb{F}(M) = \{\lambda\colon M \to \mathbb{Z} \mid \lambda(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in M\} \subseteq \mathrm{Abb}(M;\mathbb{Z}),$$

so heißt

$$S_k(X) := \mathbb{F}\big(\Sigma_k(X)\big)$$

die k-te singuläre Kettengruppe von X.

(b) Ist $0 \leq i \leq k$ und $\delta^i_{k-1}\colon \Delta_{k-1} \to \Delta^i_{k-1} \subset \Delta_k$ die i-te Seitenabbildung ($e_j \mapsto e_j$ für $j = 0, \dots, i-1$ und $e_j \mapsto e_{j+1}$ für $j = i, \dots, k-1$) und

$$\partial^X_k\colon S_k(X) \to S_{k-1}(X), \sigma \mapsto \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (\sigma \circ \delta^i_{k-1})$$

der Randoperator, so wird

$$S(X) := (S_k(X), \partial_k)_{k\in\mathbb{Z}} \qquad (S_k = 0 \text{ für } k < 0$$

zu einem Kettenkomplex, also $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

(c) Ist $f\colon X \to Y$ stetig, so ist $S_k f\colon S_k(X) \to S_k(Y)$,

$$S_k f(\sigma) = f \circ \sigma$$

eine Kettenabbildung (also $S_{k+1} f \circ \partial^X_k = \partial^Y_k \circ S_k f$, $\forall k$) und damit wird $S\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{KK}$ zu einem Funktor.

(d) Sei $H_k\colon \mathbf{KK} \to \mathbf{Ab}$ der Homologie-Funktor auf den Kettenkomplexen, also für $C = (C_k, \partial_k)$:

$$H_k(C) := \ker \partial_k / \operatorname{im} \partial_{k+1},$$

so heißt die Komposition $H_k \circ S\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$ die k-te Homologiegruppe von X,

$$H_k(X) := Z_k(X)/B_k(X),$$

$Z_k(X) = \ker \partial^X_k$ (singuläre k-Zykeln von X), $B_k(X) = \operatorname{im} \partial^X_{k+1}$ (singuläre k-Ränder von X).

Für $H_k(Sf)\colon H_k(X) \to H_k(Y)$ schreiben wir häufig f_*, also

$$f_*([z]) = \big[S_k f(z)\big].$$

(1.2) Definition. (a) Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum. Wir nennen dann (X, A) ein (topologisches) *Raumpaar*.

(b) Seien (X, A) und (Y, B) Raumpaare und $f\colon X \to Y$ stetig. Wir nennen dann $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ *stetig*, wenn $f(A) \subseteq B$ ist.

(1.3) Kommentar. Die Raumpaare bilden die Objekte einer Kategorie, ihre Morphismen sind die stetigen Abbildungen zwischen Raumpaaren. Bezeichnung: $\mathbf{Top^2}$.

(1.4) Erinnerung. Ist $C' = (C'_k, \partial'_k)$ ein Kettenkomplex und $C \subseteq C'$ ein Unterkomplex (also $\partial'_k(C_k) \subseteq C_{k-1}$; setze dann $\partial_k := \partial'_k | C_k$), so wird der Quotient

$$\overline{C} := C'/C = (\overline{C}_k, \overline{\partial}_k)$$

mit

$$\overline{C}_k := C'_k / C_k$$

und

$$\overline{\partial}_k(\overline{c'}) := \overline{\partial'_k c'}$$

wieder zu einem Kettenkomplex. Ist $i\colon C \hookrightarrow C'$ die Inklusion und $\pi\colon C' \to \overline{C}$ die natürliche Projektion, so ist dann

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\ i\ } C' \xrightarrow{\ \pi\ } \overline{C} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen.

(1.5) Definition. Sei (X, A) ein Raumpaar und $i\colon A \hookrightarrow X$ die Inklusion. Wir fassen $S(A)$ vermöge $Si\colon S(A) \hookrightarrow S(X)$ als einen Unterkomplex von $S(X)$ auf. Dann nennt man

$$S(X, A) := S(X)/S(A)$$

mit dem induzierten $\partial_k^{(X,A)}\colon S_k(X, A) \to S_{k-1}(X, A)$,

$$\partial_k^{(X,A)}(\overline{c}) := \overline{\partial_k^X c}$$

den *relativen singulären Kettenkomplex von* (X, A).

(1.6) Kommentar. (a) Ein Zykel $\overline{z} \in Z_k(X, A)$ wird also von einer k-Kette $z \in S_k(X)$ repräsentiert, so dass $\partial_k^X z \in S_{k-1}(A)$ ist.

(b) Für einen Rand $\overline{z} \in B_k(X, A)$ gibt es also einen Repräsentant $z \in S_k(X)$ und Ketten $c \in S_{k+1}(X)$ und $\widetilde{c} \in S_{k+1}(A)$, so dass gilt:

$$z = \partial c + \widetilde{c}.$$

(c) Ist $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ stetig, so ist $Sf\big(S(A)\big) \subseteq S(B)$. Also induziert $Sf\colon S(X) \to S(Y)$ eine Kettenabbildung auf den relativen Komplexen (die wir auch mit Sf bezeichnen),

$$
\begin{tikzcd}
S(X) \arrow[r, "Sf"] \arrow[d, "\pi"'] & S(Y) \arrow[d, "\pi"] \\
S(X,A) \arrow[r, dashed, "Sf"'] & S(Y,B)
\end{tikzcd}
$$

$S\colon \mathbf{Top^2} \to \mathbf{KK}$ wird damit zu einem Funktor.

(1.7) Definition. Sei (X, A) ein Raumpaar und $k \in \mathbb{N}_0$. Man nennt

$$H_k(X, A) := H_k\big(S(X, A)\big)$$

die k-te singuläre Homologiegruppe von (X, A).

(1.8) Kommentar. (a) Ein stetiges $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ induziert (für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ einen Homomorphismus

$$f_*\colon H_k(X, A) \to H_k(Y, B)$$

über $Sf\colon S(X, A) \to S(Y, B)$. H_k wird so (als Komposition von $S\colon \mathbf{Top^2} \to \mathbf{KK}$ und dem allgemeinen Homologie-Funktor $H_k\colon \mathbf{KK} \to \mathbf{Ab}$ zu einem Funktor.

(b) Im Allgemeinen ist keineswegs $H_k(X, A) = H_k(X)/H_k(A)$, da $H_k(A)$ im Allgemeinen schon gar keine Untergruppe von $H_k(X)$ ist, denn für die Inklusion $i\colon A \hookrightarrow X$ muss $i_*\colon H_k(A) \to H_k(X)$ nicht injektiv sein (man denke zum Beispiel an $X = \mathbb{B}^2$ und $A = \mathbb{S}^1$ und $k = 1$).

Auch ist im Allgemeinen die Vermutung $H_k(X, A) = H_k(X)/i_*H_k(A)$ falsch. Allerdings hat man wegen der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow S(A) \xrightarrow{Si} S(X) \xrightarrow{\pi} S(X, A) \longrightarrow 0$$

die *lange exakte Homologiesequenz des Raumpaares* (X, A)

$$\ldots \xrightarrow{\pi_*} H_{k+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{\pi_*} H_k(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \ldots \qquad (*)$$

Deshalb induziert π_* nur einen Isomorphismus

$$H_k(X)/i_*H_k(A) \xrightarrow{\overline{\pi}_*} \ker(\partial_*) \subseteq H_k(X, A).$$

(c) Ist allerdings $i_*\colon H_k(A) \to H_k(X)$ injektiv, für alle $k \in \mathbb{Z}$, so folgt aus der Exaktheit von $(*)$, dass der Verbindende Homomorphismus $\partial_* = 0$ ist und damit exakt:

$$0 \longrightarrow H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{\pi_*} H_k(X, A) \longrightarrow 0 \qquad (**)$$

und damit (doch, wenn $H_k(A) \subseteq H_k(X)$ via i_*):

$$H_k(X, A) \cong H_k(X)/H_k(A).$$

Für den verbindenden Homomorphismus $\partial_*\colon H_k(X, A) \to H_{k-1}(A)$ gilt (Übungsaufgabe):

$$\partial_*([\overline{z}]_{(X,A)}) = [\partial z]_A,$$

für $z \in S_k(X)$, sodass $\overline{z} \in Z_k(X, A)$ ist.

(d) Ist insbesondere $A \subseteq X$ ein Retrakt (das heißt: es gibt eine Retraktion $r\colon X \to A$, das ist: $r \circ i = \mathrm{id}_A$), so ist wegen

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = (\mathrm{id}_A)_* = \mathrm{id}_{H_k(A)}$$

i_* injektiv und die Sequenz $(**)$ spaltet nun sogar (via r_*), also gilt:

$$H_k(X) \cong H_k(A) \oplus H_k(X, A).$$

(e) Insbesondere gilt dies damit für einen einpunktigen Raum $A = \{x_0\}$ (für ein $x_0 \in X$, denn dann ist A offenbar ein Retrakt). Da $H_k(\{x_0\}) = 0$ ist für $k > 0$ und $H_0(\{x_0\}) \cong \mathbb{Z}$ erhält man so:

$$H_k(X) = \begin{cases} H_k(X, x_0) := H_k(X, \{x_0\}) & \text{für } k \neq 0 \\ H_0(X, x_0) \oplus \mathbb{Z} & \text{für } k = 0 \end{cases}.$$

Insbesondere für einen wegzusammenhängenden Raum X gilt damit:

$$H_k(X) = \begin{cases} H_k(X) & \text{für } k \neq 0 \\ 0 & \text{für } k = 0 \end{cases}.$$

Für $A = \emptyset$ ist natürlich

$$H_k(X, \emptyset) \cong H_k(X), \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

und für $A = X$ gilt

$$H_k(X, X) = (0), \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

(f) Keineswegs ist im Allgemeinen $H_k(X, A)$ so etwas wie $H_k(X \setminus A)$, allenfalls in manchen Fällen (siehe (1.20)) so etwas wie der "zusammengeschlagene Raum X/A" mit dem einen Punkt $[A] \in X/A$:

$$H_k(X, A) \cong H_k(X/A, [A])?$$

(1.9) Beispiel. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$H_k(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis. (In diesem Fall ist $\mathbb{B}^n/\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n$ und daher tatsächlich $H(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \cong H(\mathbb{B}^n/\mathbb{S}^{n-1}, [\mathbb{S}^{n-1}])$.) Die lange Homologie-Sequenz für $(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ und die bekannten Homologiegruppen von $\mathbb{B}^n$ und $\mathbb{S}^{n-1}$ (sowie die Kenntnis von $i_*^0\colon H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \to H_0(\mathbb{B}^n), [x] \mapsto [i(x)]$) liefert die Exaktheit der folgenden Sequenzen:

- $H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{i_*^0} H_0(\mathbb{B}^n) \longrightarrow H_0(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow 0$

  Da i_+^0 surjektiv ist, folgt: $H_0(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

- $0 = H_1(\mathbb{B}^n) \longrightarrow H_1(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} \ker(i_*^0) \longrightarrow 0$

  Für $n = 1$ ist $\ker(i_*^0) \cong \mathbb{Z}$, für $n \geq 2$: $\ker(i_*^0) = 0$. Also gilt:

$$H_1(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- für $k \geq 2$:

$$0 = H_k(\mathbb{B}^n) \longrightarrow H_k(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(S^{n-1}) \longrightarrow 0 = H_{k-1}(\mathbb{B}^n)$$

  Also gilt:

$$H_k(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = n \\ 0 & \text{für } k \neq n \end{cases}$$

□

(1.10) Definition. Seien (X, A) und (Y, B) zwei Raumpaare. Zwei stetige Abbildungen $f, g\colon (X, A) \to (Y, B)$ heißen *homotop*, wenn es eine Homotopie $H = (h_t)_{t \in I}$ von f nach g (als Abbildungen von X nach Y) gibt, so dass für alle $t \in I$ gilt:

$$h_t(A) \subseteq B.$$

(1.11) Erinnerung. Eine *natürliche Transformation* zwischen zwei Funktoren $F, G\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ zwischen zwei Kategorien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ ist eine Zuordnung $\tau\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{C}_2)$ mit $\tau(X) \in \mathrm{Mor}\big(F(X), G(X)\big)$, so dass für alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ in $\mathcal{C}_1$ gilt: $G(f) \circ \tau(X) = \tau(Y) \circ F(f)$,

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\tau(X)"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\tau(Y)"'] & F(Y) \end{tikzcd}$$

Im Beweis des Homotopiesatzes (für die absolute singuläre Homologie, siehe 3.2.15 des Algebraische Topologie I Skriptes) hatten wir für einen topologischen Raum X eine Kettenhomotopie

$$D^X\colon S(X) \to S(X \times I)$$

zwischen $S\varphi$ und $S\psi$ konstruiert, wobei $\varphi, \psi\colon X \to X \times I$ gegeben waren durch

$$\varphi(x) = (x, 0), \qquad \psi(x) = (x, 1),$$

also:
$$\partial D^X + D^X \partial = S\psi - S\varphi.$$
Weil diese Konstruktion eine natürliche Transformation zwischen den Funktoren
$$F = S_k \colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}, X \mapsto S_k(X), f \mapsto S_k f$$
und
$$G \colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}, X \mapsto S_{k+1}(X \times I), f \mapsto S_{k+1}(f \times \mathrm{id})$$
ist, das heißt $D_k^Y \circ S_k f = S_{k+1}(f \times \mathrm{id}) D_k^X$,
$$\begin{tikzcd}
S_k(X) \arrow[r, "D_k^X"] \arrow[d, "S_k f"'] & S_{k+1}(X \times I) \arrow[d, "S_{k+1}(f \times \mathrm{id}"] \\
S_k(Y) \arrow[r, "D_k^Y"'] & S_{k+1}(Y \times I)
\end{tikzcd}$$
folgt:
$$D^X\big(S(A)\big) = D^X\Big(Si\big(S(A)\big)\Big) = S(i \times \mathrm{id}) D^A\big(S(A)\big) = D^A\big(S(A)\big) \subseteq S(A \times I).$$
Deshalb induziert D^X eine Kettenhomotopie $D^{(X,A)} \colon S(X,A) \to S(X \times I, A \times I)$,
$$\begin{tikzcd}
S(X) \arrow[r, "D^X"] \arrow[d, "\pi"'] & S(X \times I) \arrow[d, "\pi"] \\
S(X,A) \arrow[r, "D^{(X,A)}"'] & S(X \times I, A \times I)
\end{tikzcd}$$
zwischen $S\varphi, S\psi \colon S(X,A) \to S(X \times I, A \times I)$ für $\varphi, \psi \colon (X,A) \to (X \times I, A \times I)$,
$$\partial D^{(X,A)} + D^{(X,A)} \partial = S\psi - S\varphi.$$
Es gilt daher:

(1.12) Satz (Homotopiesatz)**.** *Seien $f, g \colon (X,A) \to (Y,B)$ homotop. Dann stimmen die induzierten Homomorphismen $f_*, g_* \colon H_k(X,A) \to H_k(Y,B)$ $(k \in \mathbb{Z})$ überein,*
$$f_* = g_*.$$

Beweis. Ist H eine Homotopie von f nach g und D eine Kettenhomotopie von $S\varphi$ nach $S\psi$, so sind wegen $f = H \circ \varphi$ und $g = H \circ \psi$ auch $S\varphi$ und $S\psi$ kettenhomotop (vermöge $SH \circ D$):
$$f_* = Sf = S(H \circ \varphi) = SH \circ S\varphi \simeq SH \circ S\psi = S(H \circ \psi) = Sg = g_*$$
$\square$

(1.13) Erinnerung. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ ein Teilraum. Dann heißt

$$\overline{A} := i\bigcap\{Z \subseteq X \mid Z \text{ abgeschlossen}, Z \supseteq A\}$$

der *Abschluss von* A und

$$\mathring{A} := \bigcup\{Z \subseteq X \mid Z \text{ offen}, Z \subseteq A\}$$

der *offene Kern (oder das Innere) von* A.

(1.14) Satz (Ausschneidungssatz)**.** *Sei* (X, A) *ein Raumpaar und* $U \subset A$ *derart, dass* $\overline{U} \subseteq \mathring{A}$ *ist. Dann induziert die Inklusion* $i\colon X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ *einen Isomorphismus in die Homologie,*

$$i_*\colon H_k(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\cong} H_k(X, A).$$

(1.15) Lemma (Fünferlemma)**.** *Seien* $G_1, \ldots, G_5$ *und* $H_1, \ldots, H_5$ *abelsche Gruppen und seien* $\alpha_1, \ldots, \alpha_4, \beta_1, \ldots, \beta_4$ *und* $\gamma_1, \ldots, \gamma_5$ *Homomorphismen, so dass die beiden Reihen des folgenden Diagramms exakt sind und das Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\gamma_1"] & G_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\gamma_2"] & G_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\gamma_3"] & G_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "\gamma_4"] & G_5 \arrow[d, "\gamma_5"] \\
H_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & H_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & H_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & H_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & H_5
\end{tikzcd}$$

Dann gilt: Sind $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_5$ *Isomorphismen, so ist auch* γ_3 *ein Isomorphismus.*

Beweis. Injektivität: Sei $g_3 \in \ker \gamma_3 \implies \gamma_4\alpha_3(g_3) = \beta_3\gamma_3(g_3) = 0$
$\overset{\gamma_4 \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} \alpha_3(g_3) = 0 \implies \exists g_2 \in G_2\colon g_3 = \alpha_2(g_3)$. Wegen

$$\beta_2\gamma_2(g_2) = \gamma_3\alpha_2(g_2) = \gamma_3(g_3) = 0$$

folgt: $\exists h_1 \in H_1\colon \beta_1(h_1) = \gamma_2(g_2) \overset{\gamma_1 \text{ surjektiv}}{\Longrightarrow} \exists g_1 \in G_1\colon \gamma_1(g_1) = h_1$.
$\implies \gamma_2(g_2 - \alpha_1(g_1)) = \gamma_2(g_2) - \beta_1\gamma_1(g_1) = 0$
$\overset{\gamma_2 \text{ surjektiv}}{\Longrightarrow} g_2 = \alpha_1(g_1) \implies g_3 = \alpha_2\alpha_1(g_1) = 0.$

Surjektivität: Sei $h_3 \in H_3$ beliebig $\overset{\gamma_4 \text{surjektiv}}{\Longrightarrow} \exists g_4 \in G_4\colon \gamma_4(g_4) = \beta_3(h_3)$
$\implies \gamma_5\alpha_4(g_4) = \beta_4\gamma_4(g_4) = \beta_4\beta_3(h_3) = 0$
$\overset{\gamma_5 \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} \alpha_4(g_4) = 0 \implies \exists \tilde{g}_3 \in G_3\colon \alpha_3(\tilde{g}_3) = g_4$
$\implies \beta_3(h_3 - \gamma_3(\tilde{g}_3)) = \beta_3(h_3) - \gamma_4\alpha_3(\tilde{g}_3) = 0.$
$\implies \exists h_2 \in H_2\colon \beta_2(h_2) = h_3 - \gamma_3(\tilde{g}_3) \overset{\gamma_2 \text{ surjektiv}}{\Longrightarrow} \exists g_2 \in G_2\colon \gamma_2(g_2) = h_2.$

Setze nun $g_3 = \tilde{g}_3 + \alpha_2(g_2)$. Dann gilt

$$\gamma_3(g_3) = \gamma_3(\tilde{g}_3) + \gamma_3\alpha_2(g_2) = (h_3 - \beta_2(h_2)) + \beta_2\gamma_2(g_2) = h_3.$$

$\square$

Beweis von (1.14). 1. Schritt. Behauptung: $(X \setminus U, A)$ ist ein Ausschneidungspaar, das heißt

$$j := j^{(X \setminus U, A)} \colon S(X \setminus U) + S(A) \to S(X)$$

induziert einen Isomorphismus in der Homologie.

Da $\overline{U} \subseteq \mathring{A}$ ist, ist $X = (X \setminus \overline{U}) \cup \mathring{A}$, also $(X \setminus \overline{U}, \mathring{A})$ ein Ausschneidepaar, weil $X \setminus \overline{U}, \mathring{A}$ offen in X sind (vergleiche Beweis des Satzes von Mayer-Vietoris (3.2.30)).

Surjektivität von j_*: Sei $z \in Z_k(X)$. Da $j_*^{(X \setminus \overline{U}, \mathring{A})}$ surjektiv ist, gibt es $z_1 \in S_k(X \setminus \overline{U}) \subseteq S_k(X \setminus U)$, $z_2 \in S_k(\mathring{A}) \subseteq S_k(A)$ so, dass

$$j_*([z_1 + z_2]) = j_*^{(X \setminus \overline{U}, \mathring{A})}([z_1 + z_2]) = [z].$$

Injektivität von j_*: Sei $z \in Z_k\big(S(X \setminus U) + S(A)\big) \subseteq Z_k(X)$ mit $j_*([z]) = 0$. Es gibt nun $r \in \mathbb{N}$, $z_1 \in S_k(X \setminus \overline{U})$ und $z_2 \in S_k(\mathring{A})$, sodass $B^r z = z_1 + z_2$ (vergleiche 3.2.29, kleine Ketten). Wegen

$$0 = j_*([z]) = j_*([B^r z]) = j_*^{(X \setminus \overline{U}, \mathring{A})}([z_1 + z_2])$$

und der Injektivität von $j_*^{(X \setminus \overline{U}, \mathring{A})}$ existieren $c_1 \in S_{k+1}(X \setminus \overline{U}) \subset S_{k+1}(X \setminus U)$ $c_2 \in S_{k+1}(\mathring{A}) \subset S_{k+1}(A)$ mit $z_1 + z_2 = \partial(c_1 + c_2)$. Damit folgt

$$[z] = [B^r z] = 0 \text{ in } H_k\big(S(X \setminus U) + S(A)\big).$$

2. Schritt. Nach einem Noetherschen Isomorphiesatz induziert für zwei Untergruppen H_1, H_2 einer abelschen Gruppe G die Inklusion $H_1 \hookrightarrow H_1 + H_2$ einen Isomorphismus

$$k \colon H_1/(H_1 \cap H_2) \to (H_1 + H_2)/H_2$$

(Übung). Wegen $A \setminus U = (X \setminus U) \cap A$ ist deshalb

$$\begin{aligned} S(X \setminus U, A \setminus U) &= S(X \setminus U)/S(A \setminus U) = S(X \setminus U)/S((X \setminus U) \cap A) \\ &= S(X \setminus U)/S(X \setminus U) \cap S(A) \overset{k}{\cong} \big(S(X \setminus U) + S(A)\big)/S(A). \end{aligned}$$

Mit diesem Isomorphismus und dem von j induzierten Isomorphismus

$$\bar{j} \colon \big(S(X \setminus U) + S(A)\big)/S(A) \to S(X)/S(A) = S(X, A)$$

ist damit das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} S(X \setminus U, A \setminus U) \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\cong" above, "k"'] & & S(X, A) \\ & \big(S(X \setminus U) + S(A)\big)/S(A) \arrow[ur, "\bar{j}"'] & \end{tikzcd}$$

Es folgt: i_* ist ein Isomorphismus $\iff$ $\bar{j}_*\colon H\left(\big(S(X \setminus U) + S(A)\big)/S(A)\right) \to H(X,A)$ ist ein Isomorphismus.

3. Schritt. Betrachte den folgenden Morphismus zweier kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S(A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & S(X \setminus U) + S(A) \arrow[r] \arrow[d, "j"] & \big(S(X \setminus U) + S(A)\big)/S(A) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{j}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S(A) \arrow[r] & S(X) \arrow[r] & S(X,A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Der zugehörige Morphismus zwischen den langen exakten Homologiesequenzen (*Homologieleiter*) liefert dann mit dem Fünferlemma: j_* ist ein Isomorphismus $\iff$ $\bar{j}_*$ ein Isomorphismus ist.

Also: Nach Schritt 1 ist j_* ein Isomorphismus $\overset{\text{Schritt 3}}{\Longrightarrow}$ $\bar{j}_*$ Isomorphismus $\overset{\text{Schritt 2}}{\Longrightarrow}$ i_* Isomorphismus. □

(1.16) Beispiel. Sei $X = \mathbb{S}^n$ und $A = \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$. Weil A azyklisch ist, liefert die lange Homologie-Sequenz von (X,A):

$$H_k(\mathbb{S}^n) \cong H_k(\mathbb{S}^n, A) \qquad (\text{für } k \geq 2).$$

Für $U = \{S\}$ ist $X \setminus U = \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \cong \mathbb{R}^n$ und $A \setminus U = A \setminus \{N,S\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$. Also liefert die lange Homologie-Sequenz für $(X \setminus U, A \setminus U)$:

$$H_k(\mathbb{S}^n \setminus U, A \setminus U) \cong H_{k-1}(A \setminus U) \cong H_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}, \quad (k \geq 2).$$

Der Ausschneidungssatz liefert daher:

$$H_k(\mathbb{S}^n) \cong H_k(\mathbb{S}^n, A) \cong H_k(\mathbb{S}^n \setminus U, A \setminus U) \cong H_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \quad (k \geq 2)$$

(und daraus, ähnlich wie 3.2.30, alle Homologiegruppen von $\mathbb{S}^n$).

(1.17) Vorbereitung. Sei (X,A) ein Raumpaar und $B \subseteq A$ ein Teilraum. Dann ist die folgende Sequenz von Kettenkomplexen exakt

$$0 \longrightarrow S(A,B) \xrightarrow{Si} S(X,B) \xrightarrow{Sj} S(X,A) \longrightarrow 0, \tag{$*$}$$

wo $i\colon (A,B) \hookrightarrow (X,B)$ und $j\colon (X,B) \to (X,A)$ die Inklusionen sind, denn nach Noethers 2. Isomorphiesatz ist für eine abelsche Gruppe G mit Untergruppen H_1, H_2 und $H_1 \subseteq H_2$ folgende Sequenz exakt:

$$0 \longrightarrow H_2/H_1 \longrightarrow G/H_1 \longrightarrow G/H_2 \longrightarrow 0,$$

(also $G/H_2 \cong (G/H_1)/(H_2/H_1)$). Setze nun $G = S_k(X)$, $H_2 = S_k(A)$ und $H_1 = S_k(B)$ ($k \in \mathbb{Z}$). Deshalb induziert das *Raumtripel* (X,A,B) folgende exakte Homologie-Sequenz:

(1.18) Satz (Lange Homologiesequenz des Tripels (X,A,B))**.** *Sei (X,A,B) ein Raumtripel sowie $i\colon (A,B) \hookrightarrow (X,B)$ und $j\colon (X,B) \to (X,A)$ die Inklusionen. Dann ist die Abbildung*

$$\partial_*\colon H_k(X,A) \to H_{k-1}(A,B), \quad \partial_*([\overline{z}]_{(X,A)}) = [\overline{\partial z}]_{(A,B)}$$

wohldefiniert und ein Homomorphismus und macht die folgende lange Sequenz

$$\ldots \longrightarrow H_k(A,B) \xrightarrow{i_*} H_k(X,B) \xrightarrow{j_*} H_k(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(A,B) \longrightarrow \ldots$$

exakt:

Beweis. Für den verbindenden Homomorphismus der Sequenz $(*)$ prüft man unmittelbar nach, dass

$$\partial_*([\overline{z}]_{(X,A)}) = [\overline{\partial z}]_{(A,B)}$$

ist (Übung). □

(1.19) Korollar. *Sei (X,A) ein Raumpaar und $U \supseteq A$ eine offene Menge, so dass A ein starker Deformationsretrakt von U ist (A ist ein* Umgebungs-Deformationsretrakt*). Dann induziert die Inklusion $i\colon (X,A) \hookrightarrow (X,U)$ einen Isomorphismus in der Homologie,*

$$i_*\colon H(X,A) \xrightarrow{\cong} H(X,U).$$

Beweis. Ist $j\colon A \hookrightarrow U$ die Inklusion, so ist $j_*\colon H(A) \to H(U)$ ein Isomorphismus (denn für eine starke Deformationsretraktion $r\colon U \to A$, also $r \circ j = \mathrm{id}_A$,i $j \circ r \simeq \mathrm{id}_U$ (relativ A), ist $r_*\colon H(U) \to H(A)$ invers zu j_*). Die lange Homologiesequenz des Paares (U,A) liefert deshalb, dass $H(U,A) = 0$ ist,

$$\ldots \longrightarrow H_k(A) \underset{\cong}{\xrightarrow{j_*}} H_k(U) \xrightarrow{0} H_k(U,A) \xrightarrow{0} H_{k-1}(A) \underset{\cong}{\xrightarrow{j_*}} \ldots$$

Die lange exakte Homologiesequenz des Triples (X,U,A) liefert dann, dass i_* ein Isomorphismus sein muss,

$$\ldots \longrightarrow H_k(U,A) = 0 \longrightarrow H_k(X,A) \underset{\cong}{\xrightarrow{i_*}} H_k(X,U) \longrightarrow 0 = H_{k-1}(U,A) \longrightarrow \ldots$$

□

(1.20) Satz. *Sei (X,A) ein Raumpaar, A abgeschlossen und $U \supseteq A$ ein starker (offener) Umgebungs-Deformations-Retrakt. Dann induziert die Projektion $\pi\colon (X,A) \to (X/A,[A])$ einen Isomorphismus in der Homologie,*

$$\pi_*\colon H(X,A) \to H(X/A,[A]) \quad \big(\cong H(X/A)\big).$$

Beweis. Sei $X := X/A$ und $y_0 := [A]$. Sei weiter $V := \pi(U) \subseteq Y$. Mit U ist auch V offen, denn $\pi^{-1}(V) = U$ (da $U \subseteq A$).

Behauptung: Auch $\{y_0\} \subseteq V$ ist ein starker Deformationsretrakt.

Sei dazu $j_0\colon \{y_0\} \hookrightarrow V$ die Inklusion und $r_0\colon V \to \{y_0\}$ die konstante Abbildung. Dann ist $r_0 \circ j_0 = \mathrm{id}$. Sei weiter $H = (h_t)\colon U \times I \to U$ eine Homotopie von $j \circ r$ nach id_U, also

$$h_0 = j \circ r,\ h_1 = \mathrm{id},\ H|(A \times I) = \mathrm{pr}_A\,.$$

Nun setze man $G\colon V \times I \to V$,

$$G([x], t) := \pi\bigl(H(x,t)\bigr).$$

G ist wohldefiniert und stetig (weil die von $\pi \times \mathrm{id}$ induzierte Abbildung $\Phi\colon (U \times I)/\sim_1 \to V \times I$ ein Homöomorphismus ist (Übung), $(x,t) \sim_1 (x',t') \iff x \sim x', t = t'$:

$$\begin{tikzcd}
 & U \times I \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi \times \mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
(U \times I)/\sim_1 \arrow[rr, "\Phi", "\cong"'] & {} & (U/\sim) \times I \\
{[(x,t)]} \arrow[rr, mapsto] & & ([x], t)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & U \times I \arrow[r, "H"] \arrow[dl, "\pi_1 \times \mathrm{id}"'] \arrow[d, "\pi_1"] & U \arrow[d, "\pi"] \\
V \times I \arrow[rr, bend right, "G"'] & (U \times I)/\sim_1 \arrow[l, "\Phi", "\cong"'] \arrow[r, "H_1"] & V
\end{tikzcd}$$

(H_1 existiert und ist stetig, weil für $(x,t) \sim_1 (x',t')$ folgt: $t = t'$ und ($x = x'$ oder $x, x' \in A$) $\implies \pi \circ H(x,t) = \pi \circ H(x',t')$ oder

$$\pi \circ H(x,t) = \pi(x) = y_0 = \pi(x') = \pi \circ H(x',t')$$

für $x, x' \in A$.) Es ist nun für alle $t \in I$ (und einem $x_0 \in A$):

$$G(y_0, t) = G(\pi(x_0), t) = \pi\bigl(H(x_0,t)\bigr) = \pi(x_0) = y_0,$$

und mit $G = (g_t)_{t \in I}$:

$$\begin{aligned}
g_0\bigl(\pi(x)\bigr) &= \pi \circ h_0(x) = \pi \circ j \circ r(x) = y_0 = j_0 \circ r_0\bigl(\pi(x)\bigr),\\
g_1\bigl(\pi(x)\bigr) &= \pi \circ h_1(x) = \pi(x),
\end{aligned}$$

also, da π surjektiv ist, tatsächlich: $G\colon j_0 \circ r_0 \simeq \mathrm{id}_V$(relativ y_0).

Betrachte nun das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H(X,A) \arrow[r, "i_*", "\cong"'] \arrow[d, "\pi_*^{(X,A)}"'] & H(X,U) \arrow[d, "\pi_*^{(X,U)}"] \\
H(Y,y_0) \arrow[r, "j_*", "\cong"'] & H(Y,V)
\end{tikzcd}$$

wo $i\colon (X,A) \hookrightarrow (X,U)$ und $j\colon (Y,y_0) \hookrightarrow (Y,V)$ die Inklusionen sind. Nach (1.19) sind i_* und j_* Isomorphismen. Also ist $\pi_*^{(X,A)}$ ein Isomorphismus, (genau) wenn $\pi_*^{(X,U)}$ einer ist.

Da nun A abgeschlossen und U offen ist, können wir für $H(X,U)$ den Ausschneidungssatz anwenden und ebenso für $H(Y,V)$ (denn $\{y_0\} \subseteq Y$ ist auch abgeschlossen). Es ist also folgendes Diagramm wieder kommutativ und die horizontalen Pfeile sind Isomorphismen:

$$\begin{tikzcd}
H(X\setminus A, U\setminus A) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\pi_*^{(X\setminus A, U\setminus A)}"'] & H(X,U) \arrow[d, "\pi_*^{(X,U)}"] \\
H(Y\setminus\{y_0\}, V\setminus\{y_0\}) \arrow[r, "\cong"] & H(Y,V)
\end{tikzcd}$$

Schließlich ist $\pi|(X\setminus A)\colon X\setminus A \to Y\setminus\{y_0\}$ ein Homöomorphismus und damit auch $\pi^{(X\setminus A, U\setminus A)}\colon (X\setminus A, U\setminus A) \to (Y\setminus\{y_0\}, V\setminus\{y_0\})$, also $\pi^{(X\setminus A,U\setminus A)}$ (und damit $\pi_*^{(X,A)}$) ein Isomorphismus. $\square$

2 Simplizialkomplexe

(2.1) Definition. Sei E eine nicht-leere, endliche Menge und $K \subset \mathfrak{P}(E)\setminus\{\emptyset\}$. Es heißt dann (E,K) ein (endlicher) *simplizialer Komplex*, wenn gilt:

(a) die einelementigen Teilmengen von E gehören zu K, $\{v\} \in K$, $\forall v \in E$;

(b) ist $s \in K$ und $\emptyset \neq s' \subseteq s$, so ist auch $s' \in K$.

Die Element von E werden die *Ecken* von (E,K) und die von K die *Simplexe* von (E,K) genannt.

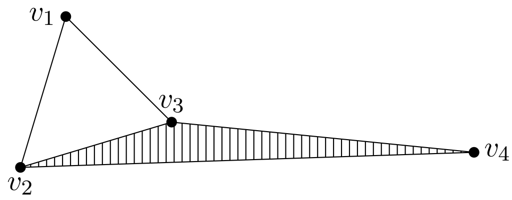
(2.2) Kommentar. (a) Identifiziert man $v \in E$ mit der einelementigen Teilmenge $\{v\} \in K$, so ist also E als die einelementigen Mengen in K enthalten. Wir notieren deshalb häufig einen simplizialen Komplex (E,K) nur mit K.

(b) Aus den Daten eines simplizialen Komplexes K werden wir bald einen toplogischen Raum $X = |K|$ bauen, der, grob gesprochen, für jedes $s \in K$ einen Standardsimplex $|s| \subseteq |K|$ enthält, wie wir ihn in Kapitel 3,I definiert haben.

(c) Ist etwa $E = \{v_1, \ldots, v_4\}$ und

$$K = \{\{v_1\}, \ldots, \{v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_1\}, \{v_3, v_4\}, \{v_2, v_3, v_4\}\},$$

so wäre $|K|$ etwa gegeben durch



(Auch der Komplex K wird so visualisiert.)

(d) Man möchte dann die topologischen Eigenschaften von $X = |K|$ (insbesondere seine Homologie- und Homotopiegruppen $H_k(X)$ und $\pi_k(X)$, $k \in \mathbb{N}_0$) durch die kombinatorischen Daten von K ausdrücken. Man spricht deshalb beim Studium von topologischen Räumen X, die homöomorph zu $|K|$ (für einen simplizialen Komplex K) sind, von *kombinatorischer Topologie*.

(e) Besteht $s \in K$ aus $k + 1$ Elementen ($k \in \mathbb{N}_0$), so heißt $k := \dim(s)$ die *Dimension von s*. Jedes $s' \subseteq s$ (mit $s' \neq \emptyset$) heißt eine *Seite von s* und wir schreiben:

$$s' \leq s$$

und wenn s' eine *echte Seite* ist, $s' \subsetneq s$: $s' < s$. Schließlich heißt

$$\dim K := \max \{\dim s \in \mathbb{N}_0 \mid s \in K\} \in \mathbb{N}_0$$

die *Dimension von K*.

(2.3) Definition. Sei (E, K) ein simplizialer Komplex. Wir nennen (E', K') einen *Teilkomplex von* (E, K), wenn $E' \subseteq E$, $K' \subseteq \mathfrak{P}(E') \cap K$ und (E', K') selbst ein simplizialer Komplex ist.

(2.4) Beispiel. (a) Sei (E, K) ein simplizialer Komplex. Für jedes $s \in K$ setzt man

$$\overline{s} := \left\{ s' \in K \mid s' \leq s \right\}.$$

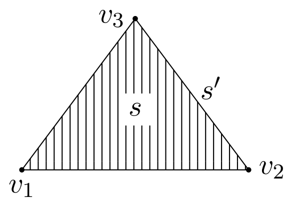
Dann ist $\overline{s}$ ein Teilkomplex von K.

Beachte: $\dim \overline{s} = \dim s$. Ist $K = \mathfrak{E} \setminus \{\emptyset\}$, so ist offenbar $K = \overline{s}$ mit $s = E$.

(b) Sei $s \in K$. Dann setzt man weiter

$$\dot{s} := \left\{ s' \in K \mid s' < s \right\}.$$

Auch $\dot{s}$ ist ein Teilkomplex von K. Nun ist: $\dim \dot{s} = \dim s - 1$.



$s = \{v_1, v_2, v_3\} \implies$

$$\begin{aligned} \overline{s} &= \{s, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_1\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}\} \\ \dot{s} &= \overline{s} \setminus \{s\} \end{aligned}$$

(c) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt

$$K^k := \{s \in K \mid \dim s \leq k\}$$

das *k-dimensionale Gerüst von K*. Auch K^k ist ein Teilkomplex und es gilt $\dim K^k = \min\{k, \dim K\}$. Ist $n = \dim K$, so hat man die Inklusionskette

$$\emptyset \neq K^0 \subsetneq K^1 \subsetneq \cdots \subsetneq K^{n-1} \subsetneq K^n = K.$$

(2.5) Definition. Seien (E, K) und (F, L) simpliziale Komplexe. Eine Abbildung $\varphi\colon K \to K'$ heißt *simplizal*, wenn es eine (*Ecken*-) Abbildung $\varphi_0\colon E \to F$ gibt, so dass für alle $s \in K$ gilt:

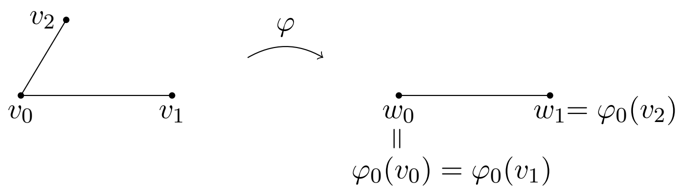
$$\varphi(s) = \varphi_0(s).$$

(2.6) Kommentar. 1. Mit $\varphi(s)$ ist hier ein Element in L gemeint, während $\varphi_0(s)$ eine Teilmenge von F ist.

2. Nicht jede Eckenabbildung $\varphi_0\colon E \to F$ induziert eine simpliziale Abbildung $\varphi\colon K \to L$. Mit $s \in K$ muss eben auch $\varphi_0(s) \subset F$ ein Element in L sein.

3. Natürlich ist φ_0 durch φ eindeutig bestimmt, denn es ist

$$\{\varphi_0(v)\} = \varphi(\{v\}), \quad \forall v \in E.$$



4. Die Komposition von simplizialen Abbildungen $\varphi\colon K \to K'$ und $\psi\colon K' \to K''$ ist wieder simplizial, denn ist φ von $\varphi_0\colon E \to E'$ und ψ von $\psi_0\colon E' \to E''$ induziert, so ist $\psi \circ \varphi\colon K \to K''$ von $\psi_0 \circ \varphi_0$ induziert.

5. Simpliziale Abbildungen und simpliziale Komplexe bilden also eine Kategorie (Übung), die mit **SK** bezeichnet wird.

(2.7) Definition. Sei (E, K) ein simplizialer Komplex. Wir versehen $\operatorname{Abb}(E, \mathbb{R})$ mit der *euklidischen Norm*

$$\|\alpha\| = \sqrt{\sum_{v \in E} \alpha(v)^2}$$

und der *euklidischen Metrik* d,

$$d(\alpha, \beta) = \|\beta - \alpha\| .$$

Nun setzen wir

$$|K| := \left\{ \alpha \in \operatorname{Abb}(E, \mathbb{R}) \mid \forall v \in E \colon 0 \leq \alpha(v) \leq 1, \sum_{v \in E} \alpha(v) = 1, \{v \in E \mid \alpha(v) \neq 0\} \in K \right\}$$

und nennen $|K|$ (zusammen mit den von $\operatorname{Abb}(E, \mathbb{R})$ induzierten Toplogie) den K *zugeordneten topologischen Raum.*

(2.8) Kommentar. (a) Ist $\alpha \in |K|$, so heißen $\alpha(v)$ $(v \in E)$ die *baryzentrischen Koordinaten von α.*

(b) Ist $\alpha \in |K|$ und

$$\operatorname{Tr}_K(\alpha) := \{v \in E \mid \alpha(v) \neq 0\} \in K,$$

so heißt $\operatorname{Tr}(\alpha)$ der *Träger von α.*

(c) Nummerrieren wir die Ecken von E irgendwie durch, $E = \{v_1, \ldots, v_r\}$ $(r = \#E)$ und hat $\alpha \in |K|$ die baryzentrischen Koordinaten $\lambda_i = \alpha(v_i) \in [0, 1]$, so notieren wir α auch als

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$$

($v \in E$ wird so mit dem Punkt $\alpha_v \in |K|$ identifiziert, der $\alpha_v(v) = 1$ und $\alpha_v(w) = 0$ für alle $w \neq v$ erfüllt.)

$\operatorname{Abb}(K, \mathbb{R})$ wird so mit $\mathbb{R}^r$ identifiziert,

$$\alpha \overset{\Phi}{\mapsto} \big(\alpha(v_1), \ldots, \alpha(v_r)\big)$$

und $|K|$ so ein Teilraum von $\mathbb{R}^r$.

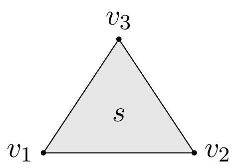
(d) Ist nun $s \in K$, so setzt man

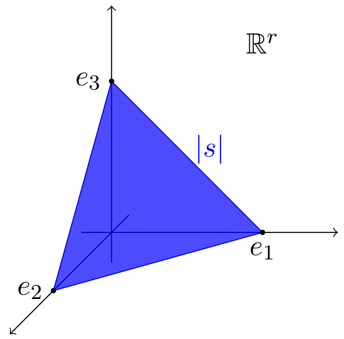
$$|s| := \{\alpha \in |K| \mid \alpha(v) \neq 0 \implies v \in s\} \subseteq |K|$$

den von s induzierten *abgeschlossenen Simplex* von s. Ist E nummeriert und $s = \{w_0, \ldots, w_k\}$, so ist offenbar

$$|s| = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i w_i \in |K| \right\} \subseteq \mathbb{R}^r.$$

Sind $e_0, \dots, e_k$ die kanonischen Basisvektoren von $\mathbb{R}^r$, die zu $w_0, \dots, w_k$ gehören (also $\Phi(w_i) = e_i$), so ist |s| damit der Standard-Simplex in $\mathbb{R}^r$, der von $e_0, \dots, e_k$ aufgespannt wird (das ist die *konvexe Hülle* von $\{e_0, \dots, e_k\}$).





(e) Man setzt weiter

$$\langle s \rangle := \{\alpha \in |K| \mid \alpha(v) \neq 0 \iff v \in s\} \subseteq |s| \subseteq |K|$$

den s zugeordneten *offenen Simplex von s*. (Beachte: $\langle s \rangle$ ist offen in $|s|$, im Allgemeinen aber nicht in $|K|$.) Es ist dann:

$$\langle s \rangle = |s| \setminus |\dot{s}|$$

und

$$|K| = \bigcup_{s \in K} \langle s \rangle ,$$

wobei für $s \neq t \in K$ gilt, dass $\langle s \rangle \cap \langle t \rangle = \emptyset$ (Beachte: Für $\alpha \in |K|$ gilt: $\alpha \in \langle s \rangle \iff s = \mathrm{Tr}(\alpha)$).

(2.9) Definition. Seien (E, K) und (F, L) simpliziale Komplexe und $\varphi\colon K \to L$ eine simpliziale Abbildung. Man setzt dann $|\varphi|\colon |K| \to |L|$,

$$|\varphi|(\alpha)(w) := \sum_{\substack{v \in E \\ \varphi_0(v) = w}} \alpha(v), \quad \forall w \in F.$$

(2.10) Kommentar. (a) Identifizieren wir wieder $\alpha \in |K|$ mit $\sum_{i=0}^k \lambda_i w_i$, wenn $\mathrm{Tr}_K(\alpha) = \{w_0, \dots, w_k\}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ ist, also $\lambda_i = \alpha(w_i)$ $(i = 0, \dots, k)$, so schreibt sich $|\varphi|(\alpha)$ so:

$$|\varphi|\Big(\sum_{i=0}^k \lambda_i w_i\Big) = \sum_{i=0}^k \lambda_i \varphi_0(w_i).$$

(b) Beachte aber, dass $\varphi_0\colon E \to F$ nicht injektiv zu sein braucht.

(c) $\varphi_0\colon E \to F$ induziert eine lineare (und damit stetige) Abbildung $|\varphi_0|\colon \mathrm{Abb}(E, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(F, \mathbb{R})$ durch $|\varphi_0|(\alpha_v) = \alpha_{\varphi_0(v)}$ ($\{\alpha_v\}_{v \in E}$ ist Basis von $\mathrm{Abb}(E, \mathbb{R})$). Es ist dann $|\varphi| = |\varphi_0|\big||K|$ und damit linear und stetig.

(d) $|\cdot|\colon \mathbf{SK} \to \mathbf{Top}$ ist nun ein Funktor (Übung).

(2.11) Definition. Ein topologischer Raum X heißt ein *Polyeder*, wenn es einen simplizialen Komplex K gibt, so dass gilt:

$$X \cong |K|.$$

Ist $f\colon |K| \to X$ ein Homöomorphismus, so heißt das Paar (K, f) eine *Triangulierung von X*.

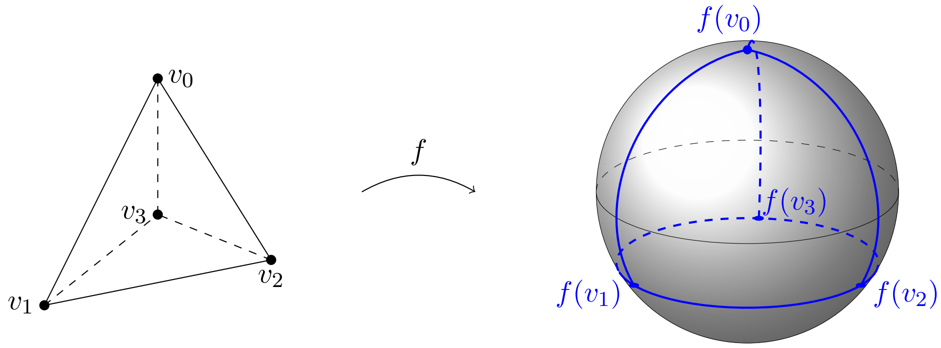
(2.12) Kommentar. (a) Da für $s \in K$ der abgeschlossene Simplex $|s| \subseteq |K| \subseteq \mathrm{Abb}(E, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^r$ $(r = \#E)$ abgeschlossen und beschränkt ist, ist $|s|$ kompakt. Wegen $|K| = \bigcup_{s\in K} |s|$ ist damit auch $|K|$, und damit also jedes Polyeder X, kompakt.

(b) Ist $\#E = r$ und $K = \mathfrak{P} \setminus \{\emptyset\}$, so ist mit $s := E$ offenbar $|K| = |s| = \Delta_r \cong \mathbb{B}^r$. $\mathbb{B}^r$ ist also für alle $r \in \mathbb{N}_0$ ein Polyeder.

(c) Ebenso ist für dieses $K = |s|$ (Übung):

$$|\dot{s}| \cong \mathbb{S}^{r-1}.$$

Also sind auch alle Sphären Polyeder.



(d) Eine Trinagulierung (K, f) eines Polyeders X ist im Allgemeinen keineswegs eindeutig (und auch nicht der simpliziale Komplex K mit $|K| \cong X$). Zum Beispiel ist auch $\mathbb{S}^2 \cong |K'|$, wo K' ein *Oktaeder* ist. (K' hat 6 Ecken, 12 Kanten und 8 Flächen, der *Tetraeder* aus (c) hat 4 Ecken, 6 Kanten und 4 Flächen).

(e) Weitere Beispiele von Polyedern sind $\mathbb{T}^2$, $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{K}$, $\mathbb{M}$, Σ_g $(g \geq 2)$ (Übung).

(f) Alle (topologischen) kompakten Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \leq 3$ sind Polyeder ($n = 2$: Rado ca. '20, $n = 3$: Morse '53). Alle differenzierbaren kompakten Mannigfaltigkeiten sind es auch (Cairus '35), Beispiele sind: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $\mathbb{T}^n$, ...

(2.13) Definition. Sei K ein simplizialer Komplex und $|K|$ sein zugeordneter topologischer Raum.

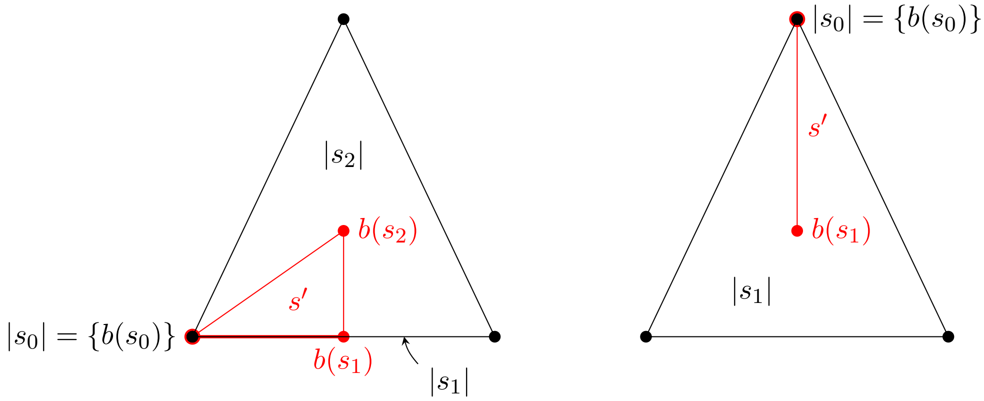
1. Für jedes $s \in K$, $s = \{v_0, \ldots, v_k\}$, nennen wir

$$b(s) := \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} v_i \in |K|$$

den *Schwerpunkt von* s.

2. Sei nun $E' := \{b(s) \in |K| \mid s \in K\}$. Wir definieren dann $K' \subseteq \mathfrak{P}(E') \setminus \{\emptyset\}$ durch

$$s' \in K' :\iff \exists k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } s_0, \ldots, s_k \in K \colon s' = \{(b(s_0), \ldots, b(s_k)\}\,.$$



(2.14) Kommentar. (a) Es ist dann (E', K') wieder ein simplizialer Komplex. Er heißt die *baryzentrische Unterteilung* von (E, K) und wird notiert mit

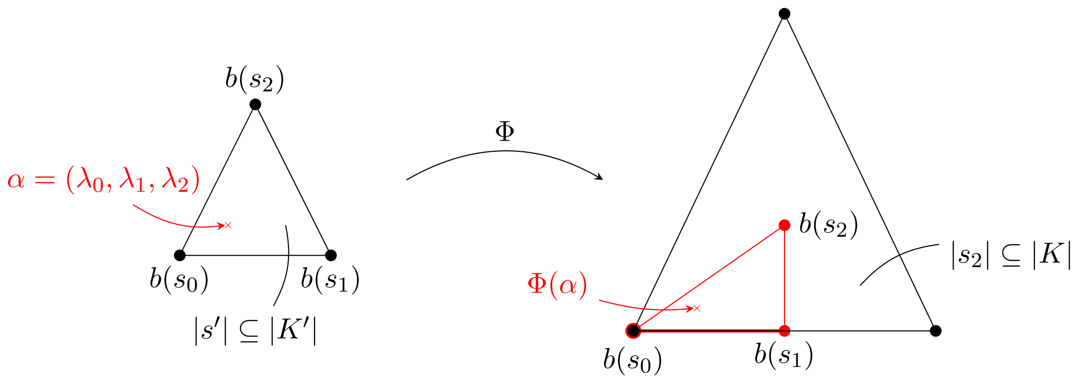
$$\mathrm{sd}(K) := K'.$$

(b) Beachte, dass nur die Ecken $b(s) \in |K|$ sind (für alle $s \in K$). Dagegen ist $|K'|$ keine Teilmenge von $|K|$, sondern liegt in $\mathrm{Abb}(E', \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^N$, wenn $N = \#E' = \#K$ ist, während $|K| \subseteq \mathrm{Abb}(E, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^r$ ist, wenn $r = \#E$ ist.

(c) Es gibt aber eine natürliche Abbildung $\Phi \colon |K'| \to |K|$, gegeben durch $\Phi\big(b(s)\big) = b(s)$, für alle $s \in K$ (wobei hier wieder $v = b(s) \in E'$ mit dem Punkt $\alpha_v \in |K'|$ identifiziert wird, der $\alpha_v(v) = 1$ und $\alpha_v(w) = 0$ für $w \neq v$ erfüllt) und der eindeutig bestimmten linearen Forsetzung auf jedem abgeschlossenen Simplex $|s'| \subset |K'|$, das ist:

$$\Phi\Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{k} \lambda_i b(s_i)}_{\in |s'|}\Big) := \sum_{i=0}^{k} \lambda_i b(s_i) \in |s_k| \subseteq |K|,$$

wenn $s' = \{b(s_0), \ldots, b(s_k)\}$ ist (mit $s_0 < \cdots < s_k$). Φ ist also stückweise linear.



(2.15) Bemerkung. *Sei K ein simplizialer Komplex, K' seine baryzentrische Unterteilung und $\Phi\colon |K'| \to |K|$ die natürliche Abbildung. Dann gilt: Φ ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Sei $s \in K$ beliebig und $\alpha \in |s|$. Dann gibt es genau ein $k \in \mathbb{N}_0$ und $s_0, \dots, s_k \in K$ mit $s_0 < \dots s_k < s$ und $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in (0, 1]$, so dass gilt:

$$\alpha = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i b(s_i) \qquad \text{(Übung).}$$

Setzt man

$$|K'(s)| := \bigcup \left\{ \langle s' \rangle \subseteq |K'| \mid s' = \{b(s_0), \dots, b(s_k)\} \text{ mit } s_0 < \dots < s_k < s \right\},$$

so ist

$$\Phi \big| |K'(s)| \colon |K'(s)| \to |s|$$

bijektiv. Damit ist Φ bijektiv, stetig und, da $|K'|$ kompakt (und $|K|$ hausdorffsch) ist, daher ein Homöomorphismus. □

(2.16) Definition. Sei (E, K) ein simplizialer Komlex und $|K|$ sein topologischer Raum. Dann nennen wir für $v \in E$

$$\mathrm{st}(v) := \{\alpha \in |K| \mid \alpha(v) \neq 0\} \subseteq |K|$$

den *Stern von v*.

(2.17) Kommentar. (a) Da die Projektion $|K| \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto \alpha(v)$ stetig ist, ist $\mathrm{st}(v) \subseteq |K|$ offen und natürlich ist

$$|K| = \bigcup_{v \in E} \mathrm{st}(v).$$

(Also ist $\mathcal{U} = \big(\mathrm{st}(v)\big)_{v \in E}$ eine offene Überdeckung von $|K|$.)

(b) $\mathrm{st}(v) \subseteq |K| \subseteq \mathrm{Abb}(E, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^r$ ist sternförmig mit sternpunkt $v \in |K|$.

(2.18) Definition. Sei X ein Polyeder und $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Es heißt dann eine Triangulierung (K, f) von X *feiner als* $\mathcal{U}$, wenn es für jedes $v \in E$ ein $i \in I$ gibt mit

$$f\big(\operatorname{st}(v)\big) \subseteq U_i$$

(also $\big(\operatorname{st}(v)\big)_{v\in E}$ Verfeinerung von $\big(f^{-1}(U_i)\big)_{i\in I}$ ist).

(2.19) Vorbereitung. Sei (E, K) ein simplizialer Komplex.

(a) Erinnere, dass $|K| \subseteq \operatorname{Abb}(E,\mathbb{R})$ mit einer Metrik d ausgestattet ist, die von der Norm $\|\cdot\| : \operatorname{Abb}(E,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\|\alpha\| = \sqrt{\sum_{v\in E} \alpha(v)^2}$$

kommt,

$$d(\alpha, \beta) = \|\beta - \alpha\|, \quad \text{für } \alpha, \beta \in |K|.$$

(b) Deshalb ist für jede Teilmenge $A \subseteq |K|$ der *Durchmesser von A* gegeben durch

$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(\alpha,\beta) \colon \alpha, \beta \in A\}$$

und wir definieren:

$$\operatorname{mesh}(K) := \max\{\operatorname{diam}|s| \in \mathbb{R} \mid s \in K\}.$$

(2.20) Lemma (vergleiche auch I,3.2.28)**.** *Sei K ein simplizialer Komplex, K' seine baryzentrische Unterteilung und $\Phi\colon |K'| \to |K|$ der natürliche Homöomorphismus. Sei weiter $s \in K$, $k =\sim s$ und $s' \in K'$ mit $\Phi(|s'|) \subseteq |s|$. Dann gilt:*

$$\operatorname{diam}\Phi(|s'|) \le \frac{k}{k+1}\operatorname{diam}|s|.$$

Beweis. (i) Das Supremum $\operatorname{diam}|s|$ wird angenommen, da $|s| \times |s|$ kompakt (und d stetig) ist. Es wird (nur) in den Ecken angenommen, das heißt: es exisieren $v, w \in s$ mit

$$\operatorname{diam}|s| = d(v, w).$$

Denn: Sei $s = \{v_0, \ldots, v_k\}$, $\alpha \in |s|$ und $\beta = \sum_{j=0}^k \mu_j v_j$ beliebig (beachte: $\sum \mu_j = 1$). Dann gilt

$$d(\alpha,\beta) = \Bigg\|\beta - \underbrace{\Bigg(\sum_j \mu_j\Bigg)}_{=1}\alpha\Bigg\| = \Bigg\|\sum_j \mu_j(v_j - \alpha)\Bigg\| \le \sum_j \mu_j \|v_j - \alpha\|$$
$$\le \max_{j=0}^{k} \|v_j - \alpha\| \sum_j \mu_j = \max_{j=0}^{k}\|v_j - \alpha\|.$$

Erneut angewendet auf $\alpha = \sum \lambda_i v_i$ liefert dieses Argument tatsächlich:

$$d(\alpha, \beta) \leq \max_{i,j=0}^{k} d(v_i, v_j), \quad \forall \alpha, \beta \in |s|.$$

(ii) Sei nun $s' \in K'$ mit $\Phi(|s'|) \subseteq |s|$. Dann wird ebenso das Supremum $\operatorname{diam} \Phi(|s'|)$ in zwei Ecken von $\Phi(|s'|)$ angenommen, welches die Schwerpunkte von Seiten s_1 und s_2 von s mit $s_1 < s_2$ sind ($\Phi(|s'|)$ ist wie bei (i) die konvexe Hülle seiner Eckpunkte). Es gilt deshalb $0 \leq r_1 < r_2 \leq k$ mit

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam} \Phi(|s'|) &= \Bigg\| \underbrace{\frac{1}{r_2+1} \sum_{i=0}^{r_2} v_i}_{=b(s_2)} - \underbrace{\frac{1}{r_1+1} \sum_{i=0}^{r_1} v_i}_{=b(s_1)} \Bigg\| \\
&= \left\| \frac{1}{r_1+1} \sum_{0}^{r_1} v_i - \frac{1}{r_2+1} \sum_{0}^{r_1} v_i - \frac{1}{r_2+1} \sum_{r_1+1}^{r_2} v_i \right\| \\
&= \left\| \frac{(r_2+1)-(r_1+1)}{(r_1+1)(r_2+1)} \sum_{0}^{r_1} v_i - \frac{1}{r_2+1} \sum_{r_1+1}^{r_2} v_i \right\| \\
&= \frac{r_2-r_1}{r_2+1} \Bigg\| \underbrace{\frac{1}{r_1+1} \sum_{0}^{r_1} v_i}_{=b(s_1)} - \underbrace{\frac{1}{r_2+r_1} \sum_{r_1+1}^{r_2} v_i}_{=b(s_2 \setminus s_1) \in |s|} \Bigg\| \\
&\leq \frac{r_2-r_1}{r_2+1} \operatorname{diam} |s|.
\end{aligned}$$

Wegen $r_1 \geq 0$ und $r_2 \leq k$ folgt mit

$$\frac{r_2-r_1}{r_2+1} = 1 - \frac{r_1+1}{r_2+1} \leq 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$$

die Behauptung.

$\square$

(2.21) Satz. *Sei X ein Polyeder und $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gibt es eine Triangulierung (K, f) von X, die feiner als $\mathcal{U}$ ist.*

Beweis. Sei $\tilde{K}, \tilde{f})$ zunächst irgendeine Triangulierung von X. Da $|\tilde{K}|$ kompakt ist, existiert eine Lebesgue-Zahl $\lambda > 0$ für die offene Überdeckung $\left(\tilde{f}^{-1}(U_i)\right)_{i \in I}$. Sei schließlich $n := \dim \tilde{K}$. Wegen $\left(\frac{n}{n+1}\right)^m \to 0$ für $m \to \infty$ existiert nun ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^m \operatorname{mesh}(\tilde{K}) < \frac{\lambda}{2}.$$

Ist dann $K := \operatorname{sd}^m(\tilde{K})$ und $\Phi\colon |K| \to |\tilde{K}|$ der natürliche Homöomorphismus, so wähle für jedes $s \in K$ ein $\tilde{s} \in \tilde{K}$ mit $\Phi(|s|) \subseteq |\tilde{s}|$ und schließe:

$$\operatorname{diam} \Phi(|s|) \leq \left(\frac{k}{k+1}\right)^m \operatorname{diam} |\tilde{s}| \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^m \operatorname{mesh}(\tilde{K}) < \frac{\delta}{2},$$

wobei $k = \dim \tilde{s}$ ist.

Ist nun $v \in E$ und $\alpha, \beta \in \Phi\big(\operatorname{st}(v)\big)$, so gibt es einen Weg von α nach β über v, der geradlinig von α nach v und dann geradlinig von v nach β verläuft, wobei die beiden Teilstrecken jeweils in einem abgeschlossenen Simplex $\Phi(|s|)$ verlaufen. Es folgt:

$$\operatorname{diam} \Phi\big(\operatorname{st}(v)\big) \leq 2 \cdot \max \{\operatorname{diam} \Phi(|s|) \mid s \in K\} < \lambda.$$

Damit folgt: $\exists i \in I\colon \Phi\big(\operatorname{st}(v)\big) \subseteq \tilde{f}^{-1}(U_i)$. Mit $f := \tilde{f} \circ \Phi$ ist deshalb (K, f) feiner als $\mathcal{U}$. □

(2.22) Definition. Seien K und L simpliziale Komplexe und $f\colon |K| \to |L|$ stetig. Eine simpliziale Abbildung $\varphi\colon K \to L$ heißt eine *simpliziale Approximation von f*, wenn für alle $\alpha \in |K|$ gilt:

$$|\varphi|(\alpha) \in |\operatorname{Tr}_L\big(f(\alpha)\big)|.$$

(2.23) Bemerkung. *Seien K und L simpliziale Komplexe, $f\colon |K| \to |L|$ stetig und φ eine simpliziale Approximation von f. Dann sind $|\varphi|$ und f homotop,*

$$f \simeq |\varphi|.$$

Beweis. Jeden abgeschlossenen Simplex $|s| \subseteq L$ ($s \in L$) ist konvex (bezüglich der linearen Struktur von $\operatorname{Abb}(F, \mathbb{R})$, $F = \{\text{Ecken von } L\}$), alsoist für alle $\beta, \gamma \in |s|$ und $t \in [0,1]$:

$$(1-t)\beta + t\gamma \in |s|.$$

Deshalb ist $H\colon |K| \times [0,1] \to |L|$,

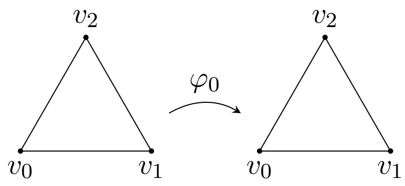
$$H(\alpha, t) := (1-t) f(\alpha) + t|\varphi|(\alpha)$$

eine Homotopie von f nach $|\varphi|$. □

(2.24) Kommentar. (a) Seien K und L simpliziale Komplexe. Nicht jedes stetige $f\colon |K| \to |L|$ kann im Allgemeinen durch ein simpliziales $\varphi\colon K \to L$ approximierbar sein, denn im Allgemeinen ist $[|K|, |L|]$ nicht endlich, aber $\operatorname{Abb}(E, F)$ schon ($E = \{\text{Ecken von } K\}$, $F = \{\text{Ecken von } L\}$).

(b) Ist etwa $E = F = \{v_0, v_1, v_2\}$, $s = E \in \mathfrak{E}$ und $K = L = \dot{s}$, so ist $|K| \cong \mathbb{S}^1 \cong |L|$ und für jedes simpliziale $\varphi\colon K \to L$ gilt:

$$\deg |\varphi| \in \{-1, 0, 1\}.$$



Denn:

- Ist φ_0 nicht bijektiv, dann ist φ_0 nicht surjektiv. Also ist $|\varphi|\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ nicht surjektiv und daher $\deg|\varphi| = 0$. Zum Beispiel:

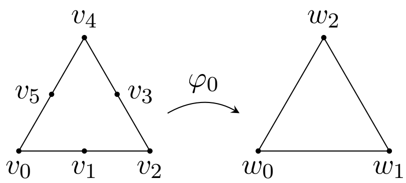
$$\varphi_0\colon v_0 \mapsto v_0, v_1 \mapsto v_1, v_2 \mapsto v_1.$$

- Ist φ_0 bijektiv, so sei ohne Einschränkung $\varphi_0(v_0) = v_0$. Dann ist entweder $\varphi_0 = \mathrm{id}$ und damit $|\varphi| = \mathrm{id}$, also $\deg|\varphi| = 1$ oder $\varphi_0(v_1) = v_2$ und damit $\deg|\varphi| = -1$.

Also ist etwa $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, z \mapsto z^2$ nicht durch ein simpliziales $\varphi\colon K \to L$ approximierbar.

(c) Beachte aber, dass $f = \mathrm{pot}_2\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ simplizial approximierbar wird, wenn man K durch $K' = \mathrm{sd}(K)$ ersetzt, $f\colon |K'| \cong \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \cong |L|$, nämlich durch

$$\varphi_0\colon v_0 \mapsto w_0, v_1 \mapsto w_1, v_2 \mapsto w_2, v_3 \mapsto w_0, v_4 \mapsto w_1, v_5 \mapsto w_2.$$



(2.25) Satz. *Seien X und Y Polyeder und $\Phi\colon X \to Y$ stetig. Dann exisitiern Triangulierungen (K, f) von X und (L, g) von Y und eine simpliziale Approximation $\varphi\colon K \to L$ von $g^{-1} \circ \Phi \circ f$.*

(2.26) Lemma. *Sei (E, K) ein simplizialer Komplex. Dann ist eine nicht-leere Teilmenge $s \subseteq E$ genau dann in K, wenn gilt:*

$$\bigcap_{v \in S} \mathrm{st}(v) \neq \emptyset$$

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei $s = \{v_0, \dots, v_k\} \in K$. Für $\alpha \in \langle s \rangle$ ist dann: $\alpha(v_i) \neq 0$, $\forall i = 0, \dots, k$, also $\alpha \in \mathrm{st}(v_i)$ für alle $i = 0, \dots, k$, also $\alpha \in \bigcap_{i=0}^k \mathrm{st}(v_i)$.

"$\Leftarrow$": Ist $\alpha \in \bigcap_{i=0}^k \mathrm{st}(v_i)$, also $\alpha(v_i) \neq 0$, $\forall i = 0, \dots k$, so folgt $v_i \in \mathrm{Tr}(\alpha) \in K$ für $i = 0, \dots k$. Wir erhalten

$$s = \{v_0, \dots v_k\} \leq \mathrm{Tr}(\alpha) \in K$$

und somit $s \in K$. □

(2.27) Lemma. *Seien (E, K) und (F, L) simpliziale Komplexe und $f\colon |K| \to |L|$ stetig. Dann induziert eine Abbildung $\varphi_0\colon E \to F$ genau dann eine simpliziale Approximation $\varphi\colon K \to L$ von f, wenn für alle $v \in E$ gilt:*

$$f\big(\operatorname{st}(v)\big) \subseteq \operatorname{st}\big(\varphi_0(v)\big).$$

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei $\varphi\colon K \to L$ simpliziale Approximation von $f\colon |K| \to |L|$ und von $\varphi_0\colon E \to F$ induziert und sei $v \in K$ beliebig. Für jedes $\alpha \in \operatorname{st}(v)$ ist dann $\alpha(v) \neq 0$ und $|\varphi|(\alpha) \in \big|\operatorname{Tr}\big(f(\alpha)\big)\big|$.

Nach Definition von $|\varphi|$ folgt: $\varphi_0(v) \in \operatorname{Tr}\big(f(\alpha)\big)$, also: $f(\alpha)\big(\varphi_0(v)\big) \neq 0$, das ist $f(\alpha) \in \operatorname{st}\big(\varphi_0(v)\big)$. Also:

$$f\big(\operatorname{st}(v)\big) \subseteq \operatorname{st}\big(\varphi_0(v)\big).$$

"$\Leftarrow$": Zeige zunächst: φ_0 induziert eine simplizale Abbildung (das ist: $\varphi_0(s) \in L, \forall s \in K$). Sei dazu $s = \{v_0, \dots, v_k\} \in K$. Nach (2.26) ist dann $\bigcap \operatorname{st}(v_i) \neq \emptyset$ und damit gilt

$$\emptyset \neq f\left(\bigcap \operatorname{st}(v_i)\right) \subseteq \bigcap f\big(\operatorname{st}(v_i)\big) \overset{\text{VS}}{\subseteq} \bigcap \operatorname{st}\big(\varphi_0(v_i)\big).$$

womit wieder nach (2.26) gilt, dass $\varphi_0(s) = \{\varphi_0(v_0), \dots, \varphi_0(v_k)\} \in L$ ist.

Zeige nun: φ ist simpliziale Approximation von f. Sei dazu $\alpha \in |K|$ beliebig und $s := \operatorname{Tr}(\alpha)$, also $\alpha \in \langle s\rangle$. Für alle $v \in s$ ist dann $\alpha \in \operatorname{st}(v)$, womit folgt, dass

$$f(\alpha) \in f\big(\operatorname{st}(v)\big) \subseteq \operatorname{st}\big(\varphi_0(v)\big).$$

Also ist $\varphi_o(v) \in \operatorname{Tr}\big(f(\alpha)\big)$ und daher ist $|\varphi|(\alpha) \in \big|\operatorname{Tr}\big(f(\alpha)\big)\big|$, womit φ eine simpliziale Approximation von f ist. $\square$

Beweis von (2.25). Wähle zunächst (irgend) eine Triangulierung (L, g) von Y. Betrachte dann die offene Überdeckung

$$\mathcal{U} = \big((g^{-1} \circ \Phi)^{-1}\big(\operatorname{st}(w)\big)\big)_{w \in F}$$

von X. Nach (2.21) gibt es dann eine Triangulierung (K, f) von X, die feiner ist als $\mathcal{U}$. Für jedes $v \in E$ existiert dann ein $w \in F$ mit

$$f\big(\operatorname{st}(v)\big) \subseteq (g^{-1} \circ \Phi)^{-1}(\operatorname{st}(w)) = \Phi^{-1}\left(g\big(\operatorname{st}(e)\big)\right).$$

Setze $\varphi_0(v) = w$, $\varphi_0\colon E \to F$. Es ist dann

$$g^{-1} \circ \Phi \circ f\big(\operatorname{st}(v)\big) \subseteq \operatorname{st}\big(\varphi_0(v)\big).$$

Nach (2.27) induziert dann φ_0 ein simpliziales $\varphi\colon K \to L$, welches $g^{-1} \circ \Phi \circ f$ approximiert. $\square$

(2.28) Anwendung. *Sei $n \geq 2$ und $1 \leq k \leq n-1$. Dann gilt für die k-te Homologiegruppe $\pi_k(\mathbb{S}^n)$ von $\mathbb{S}^n$:*

$$\pi_k(\mathbb{S}^n) = (0).$$

Beweis. Sei $f\colon \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ beliebig (natürlich stetig). Es reicht zu zeigen: Es exisitiert ein stetiges $f'\colon \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ mit $f' \simeq f$ und f' nicht surjektiv. Ist nämlich etwa $N \notin \mathrm{im}(f')$ und $\pi\colon \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ die sterographische Projektion, so ist $h := \pi \circ f'$ nullhomotop (da $\mathbb{R}^n$ zusammenziehbar ist) und damit auch $f' = \pi^{-1} \circ h$.

Nach (2.25) gibt es nun einen simplizialen Komplex L der Dimension n von $\mathbb{S}^n$ (zum Beispiel $L = \dot{s}$ mit $s = \{e_0, \dots, e_{n+1}\}$), einen simplizialen Komplex K der Dimension k von $\mathbb{S}^k$ (zum Beispiel $K = \mathrm{sd}^m \tilde{K}$ mit $\tilde{K} = \dot{t}$, $t = \{e_0, \dots, e_{k+1}\}$ und m groß genug) und eine simpliziale Approximation $\varphi\colon K \to L$ von f (genauer: $g^{-1} \circ \Phi \circ f$). Da aber $\mathrm{im}(\varphi_0) \subset L^k$, also $|\varphi|(\mathbb{S}^k) \subseteq |L^k| \subseteq \mathbb{S}^n$ (dem k-Gerüst von L), ist $|\varphi|$ nicht surjektiv und $|\varphi| \simeq f$, womit die Behauptung folgt. □

(2.29) Kommentar.

1. Für $n = 1$ wissen wir schon, dass $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ und $\pi_k(\mathbb{S}^1) = (0)$ ist für $k \geq 2$. Letzteres, weil man für jedes $f\colon \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^1$ über $\mathrm{ex}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ liften kann (siehe Liftungssatz I.2.?), $f = \mathrm{ex} \circ \hat{f}$, für $\hat{f}\colon \mathbb{S}^k \to \mathbb{R}$. Aber dann ist $\hat{f}$ nullhomotop und damit auch f.
2. Es ist richtig, dass $\pi_(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ ist (mit $\mathrm{id}\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ als Erzeuger; Beweis (eventuell) später), $\forall n \in \mathbb{N}$. Allerdings ist im Allgemeinen für $n \geq 2$ durchaus $\pi_k(\mathbb{S}^n) \neq (0)$ für (gewisse) $k > n$. Die Homotopiegruppen der Sphären sind nicht alle bekannt.

3 Simpliziale Homologie

(3.1) Definition. Sei (E, K) ein simplizialer Komplex und $s \in K$ der Dimesnion $k \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zwei lineare Ordnungen $v_0 < \cdots < v_k$ und $w_0 < \dots w_k$ auf $s = \{v_0, \dots, v_k\} = \{w_0, \dots, w_k\}$ heißen *äquivalent*, wenn die Permutation $\pi \in \Gamma_{k+1}$ (Γ_n die symmetrische Gruppe in $n \in \mathbb{N}_0$ Einträgen), gegeben durch $w_i = v_{\pi(i)}$ $(i = 0, \dots, k)$, gerade ist, $\mathrm{sgn}(\pi) = +1$.

(b) Eine Äquivalenzklasse von linearen Ordnungen auf s wird mit σ bezeichnet und heißt eine *Orientierung* von s. Ein Paar (s, σ) heißt dann ein *orientiertes Simplex* von K. Ist $v_0 < \cdots < v_k$ ein Repräsentant von σ, so schreiben wir für (s, σ) einfacher:

$$(s, \sigma) =: [v_0, \dots, v_k].$$

(3.2) Kommentar. (a) Ist $k = 0$, so gibt es auf $s = \{v_0\}$ ($v_0 \in E$) nur eine Orientierung und man kann $[v_0]$ mit $\{v_0\}$ beziehungsweise v_0 identifizieren.

(b) Für $k \geq 1$ gibt es offenbar auf jedem $s \in K$ zwei Orientierungen. Ist σ eine davon, so notieren wir die andere mit σ^{-1}, also:

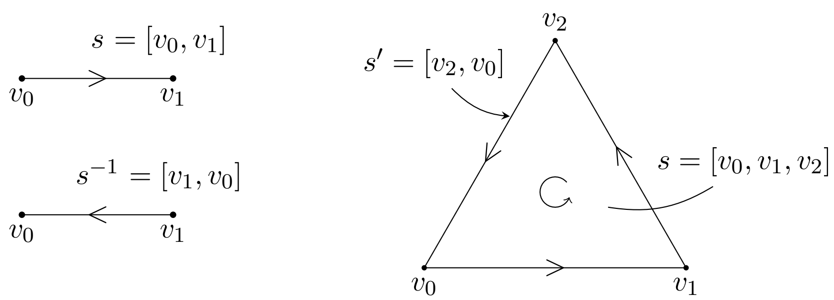
$$(s, \sigma) = [v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k] \implies (s, \sigma^{-1}) = [v_1, v_0, v_2, \ldots, v_k].$$

(c) Für einen orientierten Simplex (s, σ) schreiben wir häufig nur s (wenn keine Verwechslungsgefahr mit dem unorientierten $s \in K$ mehr besteht) und für (s, σ^{-1}) dann s^{-1}.

(d) Sei s ein orientierter Simplex und $v \in s$. Dann *erbt* das Seitensimplex $s' = s \setminus \{v\}$ von s eine Orientierung wie folgt: Wähle einen Repräsentanten der Orientierung von s, bei dem v an der ersten Stelle steht, $s = [v, v_1, \ldots, v_k]$, und setze dann die Orientierung auf s' fest durch

$$s' := [v_1, \ldots, v_k] \qquad (*)$$

(Ist $\pi \in \Gamma_{k+1}$ eine gerade Permutation mit $\pi(0) = 0$, so ist auch $\pi| \{1, \ldots, k\} \in \Gamma_k$ gerade, also $(*)$ wohldefiniert.)



(3.3) Lemma. *Ist K ein simplizialer Komplex, $s = [v_0, \ldots, v_k]$ ein orientiertes Simplex von K und $i \in \{0, \ldots, k\}$, so gilt für $s' := s \setminus \{v_i\}$ mit seiner induzierten Orientierung:*

$$s' = [v_0, \ldots, v_{i-1}, \widehat{v_i}, v_i + 1, \ldots, v_k]^{(-1)^i}.$$

Beweis. Nach i Vertauschungen (mit dem vorherigen Nachbarn) ist

$$s = [v_0, \ldots, v_k] = [v_i, v_0, \ldots, v_{i-1}, \widehat{v_i}, v_i + 1, \ldots, v_k]^{(-1)^i},$$

also

$$s' = [v_0, \ldots, v_{i-1}, \widehat{v_i}, v_i + 1, \ldots, v_k]^{(-1)^i}.$$

□

(3.4) Definition. Sei (E, K) ein simplizialer Komplex der Dimension n und $k \in \mathbb{Z}$. Man setzt dann:

(a) $C_k(K) = 0$ für $k < 0$ und $k > n$;

(b) $C_0(K) := \mathbb{F}(E)$ $(= \{\sum_{i=1}^{r} n_i v_i \mid n_i \in \mathbb{Z}\}$ bei $E = \{v_1, \ldots, v_r\})$;

(c)
$$C_k(K) := \mathbb{F}\left(\{\text{orientierte } k\text{-Simplexe von } K\}\right) / \sim,$$
wo $\sim$ durch die Relation $s + s^{-1} = 0$, $\forall s \in K$, gegeben sei (das heißt $C_k(K) = \mathbb{F}(\ldots)/U$, wo U die Untergruppe von $\mathbb{F}(\ldots)$ ist, die von $\left\{s + s^{-1} \in \mathbb{F}(\ldots) \mid s \in K\right\}$ erzeugt wird).

(3.5) Kommentar. (a) Man nennt die Elemente
$$c = \sum n_i s_i \in C_k(K)$$
(wir sparen uns ein Symbol für die Restklasse) eine *(orientierte) k-Kette in K*. Beachte, dass für $s \in K$ (mit $k = \dim s > 0$) in $C_k(K)$ gilt:
$$s^{-1} = -s.$$

(b) Wählt man für jedes $s \in K$ genau eine Orientierung aus, so hat offenbar jedes Element $c \in C_k(K)$ (mit $\alpha_k := \# E_k$ und $E_k = \{s \in K \mid \dim s = k\}$) eine eindeutige Darstellung
$$c = \sum_{i=1}^{\alpha_k} n_i s_i,$$
wenn $E_k = \{s_1, \ldots, s_{\alpha_k}\}$ ist. $C_k(K)$ ist also *frei* vom Rang α_k,
$$C_k(K) \cong \mathbb{Z}^{\alpha_k}.$$

(3.6) Definition. Sei K ein simplizialer Komplex der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ definiert man einen Homomorphismus $\partial_k \colon C_k(K) \to C_{k-1}(K)$ durch
$$\partial_k([v_0, \ldots, v_k]) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^i [v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k] \tag{$*$}$$
für $1 \leq k \leq n$ und $\partial_k = 0$ sonst. Es heißt dann $\partial = (\partial_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ der *Randoperator von K*.

(3.7) Kommentar. (a) Die Wohldefiniertheit von $(*)$ für einen orientierten k-Simplex folgt zunächst aus (3.3) und liefert zunächst einen Homomorphismus
$$\tilde{\partial}_k \colon \mathbb{F}(\{\text{orientierte } k\text{-Simplexe}\}) \to \mathbb{F}(\{\text{orientierte } k-1\text{-Simplexe}\}).$$
Ist nun $\pi_k \colon \mathbb{F}(\{\text{orientierte } k\text{-Simplexe}\}) \to C_k(K)$ die kanonische Projektion, so stellt man fest, dass für jedes $s \in K$ gilt: $\pi_{k-1} \circ \tilde{\partial}_k(s + s^{-1}) = 0$. Deshalb induziert $(*)$ einen (eindeutig bestimmten) Homomorphismus ∂_k auf dem Quotienten $C_k(K)$ mit $\partial_k \circ \pi = \pi_{k-1} \circ \tilde{\partial}_k$ (Übung),

(b) ∂ macht dann $C(K) := \big(C_k(K), \partial_k\big)_{k \in \mathbb{Z}}$ zu einem Kettenkomplex (Übung),
$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$
Er heißt der *(orientierte) Kettenkomplex von K*.

(c) Im Folgenden setzen wir für einen simplizialen Komplex (F, L)

$$[w_0, \ldots, w_k] = 0 \text{ in } C_k(L),$$

wenn für $\{w_0, \ldots, w_k\} \in L$ und ein Paar (i, j) mit $i \neq j$ gilt: $w_i = w_j$. Mit dieser Vereinbarung definieren wir nun:

(3.8) Definition. Seien (E, K) und (F, L) simpliziale Komplexe, $\varphi\colon K \to L$ simplizial und von $\varphi_0\colon E \to F$ induziert. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ setzen wir $C_k\varphi\colon C_k(K) \to C_k(L)$ fest durch

$$C_k\varphi([v_0, \ldots, v_k]) := [\varphi_0(v_0), \ldots, \varphi_0(v_k)]. \qquad (*)$$

(3.9) Kommentar. (a) Ähnlich wie bei (3.6) prüft man tatsächlich nach, dass $C_k\varphi$ durch $(*)$ wohldefiniert und eindeutig bestimmt ist (Übung).

(b) $C\varphi = (C_k\varphi)_{k\in\mathbb{Z}}\colon C(K) \to C(L)$ ist eine Kettenabbildung (Übung), also

$$\partial_k^L \circ C_k\varphi = C_{k-1}\varphi \circ \partial_k^K, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

(c) Es wird so $C\colon \mathbf{SK} \to \mathbf{KK}$ zu einem Funktor.

(3.10) Definition. Sei K ein simplizialer Komplex. Dann nennen wir die Homologiegruppen von $C(K)$,

$$H_k(K) := H_k\big(C(K)\big), \quad k \in \mathbb{Z},$$

die *Homologiegruppen von K*.

(3.11) Kommentar. (a) Die Homologie von K misst also rein kombinatorisch, wieviele "Löcher" der Komplex K hat. Sind etwa $v_0, v_1, v_2 \in E$ und $\{v_0, v_1\}$, $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_0\} \in K$, so ist $z := [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_0] \in C_1(K)$ geschlossen, $z \in Z_1(K)$. Gibt es nun keine 2-Kette $c \in C_2(K)$ mit $\partial c = z$, so ist also $[z] \neq 0$ in $H_1(K)$.

(b) Ein simplizialer Komplex (E, K) heißt *zusammenhängend*, wenn es zu beliebigen v, w in E ein $r \in \mathbb{N}$ und Ecken $v_0, \ldots, v_r$ mit $v_0 = v$ und $v_r = w$ gibt, so dass $\{v_{i-1}, v_i\} \in K$ ist $(i = 1, \ldots, r)$. Es ist dann (Übung): $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

(c) Beachte, dass zwar $C_k(K)$ frei und endlich erzeugt ist, $C_k(K) \cong \mathbb{Z}^{\alpha_k}$ $(\alpha_k = \#E_k)$ und damit auch

$$Z_k(K) = \ker(\partial_k), \quad B_k(K) = \operatorname{im}(\partial_{k+1}).$$

Der Quotient $H_k(K) = Z_k(K)/B_k(K)$ ist damit zwar auch endlich erzeugt, im Allgemeinen aber nicht frei.

(d) Für eine endlich erzeugte abelsche Gruppe G ist im Allgemeinen

$$\operatorname{Tor}(G) := \{g \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}\colon ng = 0\},$$

die *Torsions-Untergruppe von G* nicht trivial. Sie ist aber endlich und es existieren eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $r \in \mathbb{N}_0$, $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ mit

$$2 \leq n1|n_2|n_3 \cdots |n_r,$$

so dass gilt:

$$\operatorname{Tor}(G) \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r}.$$

$n_1, \ldots, n_r$ heißen die *Torsionskoeffizienten von G*.

Weiterhin gilt, dass $G/\operatorname{Tor}(G)$ frei ist (also eine Basis hat) und ihr Rang heißt *Rang von G*,

$$\operatorname{rg}(G) := \operatorname{rg}\big(G/\operatorname{Tor}(G)\big) = b,$$

wenn $G/\operatorname{Tor}(G) \cong \mathbb{Z}^b$ ist. Deshalb spaltet die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}(G) \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/\operatorname{Tor}(G) \longrightarrow 0,$$

also gilt:

$$G \cong \mathbb{Z}^b \times (\mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})$$

(Struktursatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen). Die Zahlen $(b; n_1, \ldots, n_r)$ charakterisieren also G.

(e) Ist K ein simplizialer Komplex und $0 \le k \le n = \dim K$, so heißt $b_k := \operatorname{rg}\big(H_k(K)\big)$ die *k-te Betti-Zahl von K* und ist

$$\operatorname{Tor}\big(H_k(K)\big) \cong \mathbb{Z}_{n_1^k} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_{r_k}^k}.$$

so heißen $n_1^k, \ldots, n_{r_k}^k$ die *k-ten Torsionskoeffizienten von K*.

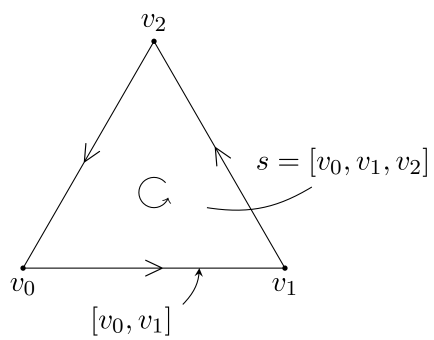
(f) Natürlich ist $H_k(K) = (0)$ für $k < 0$ und $k > n := \dim K$, denn e ist ja bereits $C_k(K) = (0)$ für $k < 0$ und $k > n$.

(g) Beachte, dass (neben $H_0(K)$) auch $H_n(K)$ frei sein muss, da $B_n(K) = \operatorname{im}(\partial_{n+1}) = 0$ ist, also $H_n(K) \cong Z_n(K) \subset C_n(K)$.

(3.12) Beispiel. (a) Sei $E = \{v_0, v_1, v_2\}$ und $K = \mathfrak{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, also $K = \overline{s}$ mit $s = E$ (und $|K| \cong \mathbb{B}^2$). Dann ist:

$$\begin{aligned}
C_0(K) &= \{n_0 v_0 + n_1 v_1 + n_2 v_2 \mid n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^3 \\
C_1(K) &= \{n_0[v_1, v_2] + n_1[v_2, v_0] + n_2[v_0, v_1] \mid n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^3 \\
C_2(K) &= \{ns \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

wo wir s mit der Orientierung $[v_0, v_1, v_2]$ versehen.



Da

$$\partial s = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_0] \neq 0$$

ist, folgt $Z_2(K) = \ker(\partial_2) = 0$ und somit $H_2(K) = Z_2(K) = 0$.

Wegen

$$\partial_1(n_0[v_1, v_2] + n_1[v_2, v_0] + n_2[v_0, v_1]) = (n_1 - n_2)v_0 + (n_2 - n_0)v_1 + (n_1 - n_2)v_0$$

folgt aus $\partial_1(\ldots) = 0$, dass $n_0 = n_1 = n_2$ gilt (*Kohärenzargument*). Es ist also:

$$Z_1 = \ker(\partial_1) = \langle \partial s \rangle = \operatorname{im}(\partial_2)$$

und somit $H_1(K) = 0$.

Schließlich ist $v_0 \equiv v_1 \mod B_1$, da $\{v_0, v_1\} \in K$ und $v_1 \equiv v_2 \mod B_1$, also $H_0(K) = \langle v_0 \rangle \cong \mathbb{Z}$. Alos sind H_0, H_1, H_2 frei und die Betti-Zahlen von K sind:

$$b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 0.$$

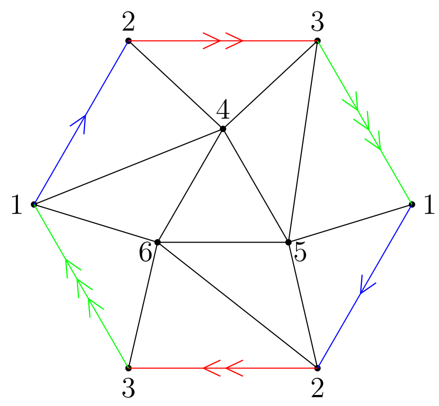
(b) Sei wie in (a), $s = E$ und $K = \dot{s}$ (also $|K| \cong \mathbb{S}^1$). Ähnlich wie in (a) sieht man nun:

$$\begin{aligned} H_1(K) &= Z_1(K) = \langle \partial s \rangle \cong \mathbb{Z} \\ H_0(K) &= \langle v_0 \rangle \cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

also

$$b_0 = b_1 = 1 \qquad \text{(keine Torsion).}$$

(c) Betrachten Sie den folgenden simplizialen Komplex K (mit $|K| = \mathbb{P}^2$). Dann gilt (Übung): $H_0 = \mathbb{Z}$ ($b_0 = 1$), $H_1 = \mathbb{Z}_2$ ($b_1 = 0, r_1 = 1, n_1^1 = 2$) und $H_2 = 0$.



(3.13) Problem. (a) Wie hängt die simpliziale Homologie von K mit der singulären Homologie von $X = |K|$ zusammen?

$$H(K) \cong H(|K|)\ ? \tag{\#}$$

Insbesondere würde daraus folgen, dass für zwei simpliziale Komplexe K und L mit $|K| \cong |L|$ gilt:

$$H(K)\big(\cong H(|K|) \cong H(|L|)\big) \cong H(L).$$

(Ist K eine *Verfeinerung von* L, so sieht man leicht, dass $H(K) \cong H(L)$ ist.)

(b) Historisch ist die kombinatorische Homologie $H(K)$ viel älter und man hat lange Zeit versucht, $H(K) \cong H(L)$ für $|K| \cong |L|$ dadurch zu zeigen, dass K und L eine gemeinsame Verfeinerung haben (sogenannte "Hauptvermutung der Topologie") und damit dann $H(X) := H(K)$ für einen Polyeder X (mit $X \cong |K|$) zu definieren.

Alexander führt 1915 (nach etlichen Fehlversuchen, die Hauptvermutung zu beweisen) die singuläre Homologie $H(X)$ (für jeden topologischen Raum X) ein und ebnet damit den Weg für die positive Antwort von (#).

Milnor (1961) zeigte übrigens an einem Beispiel $X \cong |K| \cong |L|$, dass die Hauptvermutung im Allgemeinen falsch ist.

(3.14) Definition. Sei K ein simplizialer Komplex der Dimension n.

(a) Sei $\alpha_k \in \mathbb{N}$ die Anzahl der k-Simplexe ($k = 0, \dots, n$). Man nennt dann

$$\chi(K) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \alpha_i$$

die *(kombinatorische) Euler-Charakteristik von* K.

(b) Sei $b_k \in \mathbb{N}_0$ die k-te Betti-Zahl von K, $b_k = \operatorname{rg}\big(H_k(K)\big)$, $k = 0, \dots, n$. Es heißt dann

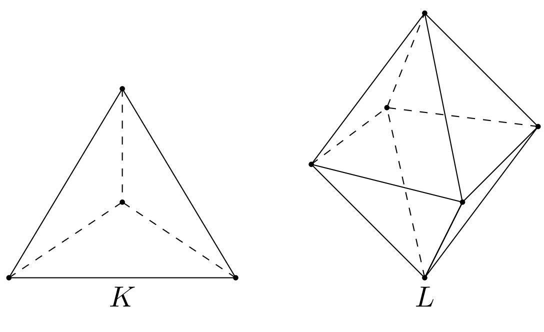
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_i$$

die *(homologische) Euler-Charakteristik von* K.

(3.15) Beispiel. (a) Die kombinatorische Euler-Charakteristik des *Tetraeders* K und des *Oktaeders* L sind (beachte $|K| \cong \mathbb{S}^2 \cong |L|$):

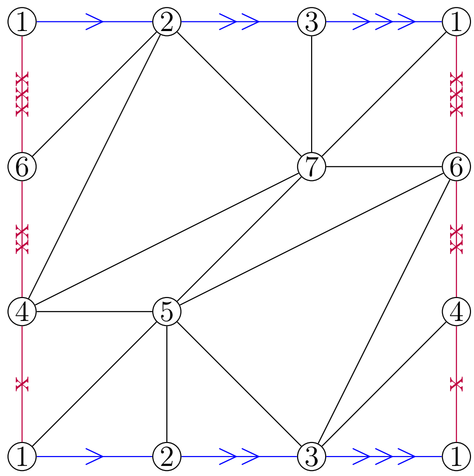
$$\chi(K) = 2 = \chi(L),$$

wobei für K gilt: $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = 6$ und $\alpha_2 = 4$; für L gilt: $\alpha_0 = 6$, $\alpha_1 = 12$ und $\alpha_2 = 8$.



(b) Für den folgenden simplizialen Komplex K (für den $|K| = \mathbb{T}^2$ gilt) ist:

$$\alpha_0 = 7, \alpha_1 = 21, \alpha_2 = 14 \implies \chi(K) = 0.$$



(c) Für den simplizialen Komplex K aus (3.12)(c) mit $|K| \cong \mathbb{P}^2$ gilt:

$$\alpha_0 = 6, \alpha_1 = 15, \alpha_2 = 10 \implies \chi(K) = 1.$$

(3.16) Satz. *Sei K ein simplizialer Komplex der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ und Betti-Zahlen $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{N}_0$. Dann stimmen die kombinatorische und die homologische Euler-Charakteristik von K überein,*

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_i.$$

(3.17) Erinnerung. (a) Ist Y ein endlich erzeugter Vektorraum (über einem Körper) und $W \subseteq V$ ein Unterraum, so ist auch W endlich erzeugt und es gilt:

$$\dim V = \dim \big(V/W\big) + \dim W.$$

(b) Auch für eine endlich erzeugte abelsche Gruppe G gilt (siehe zum Beispiel Scheja-Storch, §61): Ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so ist auch H endlich erzeugt (und G/H sowieso) und es gilt:

$$\mathrm{rg}(G) = \mathrm{rg}\,\big(G/H\big) + \mathrm{rg}(H).$$

(c) Für eine kurze exakte Sequenz endlich erzeugter abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0$$

gilt deshalb:

$$\mathrm{rg}(G') - \mathrm{rg}(G) + \mathrm{rg}(G'') = 0,$$

denn $G/G' \cong G''$.

Beweis von (3.16). Für die Zykel- und Rändergruppe $Z_k \subseteq C_k(K)$ und $B_k \subseteq Z_k$ setzen wir
$$\beta_k := \mathrm{rg}(B_k),\ \gamma_k := \mathrm{rg}(Z_k).$$
Wegen $H_k = Z_k/B_k$ ist
$$0 \longrightarrow B_k \longrightarrow Z_k \longrightarrow H_k \longrightarrow 0$$
exakt, also
$$\beta_k - \gamma_k + b_k = 0. \tag{$*$}$$
Wegen der Exaktheit von
$$0 \longrightarrow Z_k \longrightarrow C_k \xrightarrow{\partial_k} B_{k-1} \longrightarrow 0$$
hat man ebenso:
$$\gamma_k - \alpha_k + \beta_{k-1} = 0. \tag{$**$}$$
Also ist:
$$\begin{aligned}
\chi(K) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\alpha_k \overset{(**)}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\beta_{k-1}+\gamma_k) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\beta_{k-1}+\beta_k+b_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k b_k + \left(-\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\beta_{k-1} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\beta_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k b_k + \left(-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k}\beta_{k} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\beta_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k b_k,
\end{aligned}$$
denn $\beta_{-1} = 0$ und $\beta_n = \mathrm{rg}\big(\mathrm{im}(\underbrace{\partial_{n+1}}_{=0})\big) = 0$. $\square$

4 CW-Komplexe

(4.1) Definition. Seien X und Y topologische Räume, $i_X\colon X \to X+Y$ und $i_Y\colon Y \to X+Y$ die kanonischen Inklusionen, $B \subseteq Y$ abgeschlossen und $f\colon B \to X$ stetig. Wir definieren dann den Raum
$$X \cup_f Y := (X+Y)/\sim,$$
wobei die Äquivalenzrelation durch
$$i_X\big(f(b)\big) \sim i_Y(b), \quad \forall b \in B,$$
erzeugt sei, und sagen, dass $X \cup_f Y$ *aus X durch Ankleben von Y längs B via f* entsteht.

(4.2) Kommentar. (a) Sei $\pi\colon X+Y \to X \cup_f Y$ die kanonische Projektion. Dann ist

$$j := \pi \circ i_X \colon X \to X \cup_f Y$$

eine Einbettung und $j(X) \subseteq X \cup_f Y$ ist abgeschlossen (Übung).

(b) Es ist auch

$$g := \pi \circ i_Y|(Y \setminus B)\colon Y \setminus B \to X \cup_f Y$$

eine Einbettung und es gilt:

$$X \cup_f Y = j(X) \dot{\cup} g(Y \setminus B)$$

(Übung). Beachte aber, dass $f\colon B \to X$ nicht injektiv zu sein braucht und daher $\pi \circ i_Y \colon Y \to X \cup_f Y$ im Allgemeinen keine Einbettung ist.

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\mathring{\mathbb{B}}^n := \{x \in \mathbb{B}^n \mid \|x\| < 1\}$$

der *offene n-Ball.* Wir nennen einen topologischen Raum e (oder e^n) eine n-Zelle, wenn e homöomorph zu $\mathring{\mathbb{B}}^n$ ist. (Beachte: n ist dadurch eindeutig bestimmt, da $e \cong \mathbb{R}^n$ ist, vergleich I, $\dim e = n$), $e^0 :=$ pt.

(d) Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$ und $f\colon \mathbb{S}^{n-1} \to X$ stetig. Ist dann $g = \pi \circ i_{\mathbb{B}^n}|\mathring{\mathbb{B}}^n \colon \mathring{\mathbb{B}}^n \to X \cup_f \mathbb{B}^n$ wie in (b), so ist also

$$e = g\big(\mathring{\mathbb{B}}^n\big)$$

eine n-Zelle und wir notieren $X \cup_f \mathbb{B}^n$ dann einfach mit $X \cup e$ und sagen: $X \cup e$ ensteht aus X *durch Ankleben einer n-Zelle.*

(4.3) Beispiel. (a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $X :=$ pt $= e^0$ und $f\colon \mathbb{S}^{n-1} \to$ pt die einzige Abbildung (für $n = 0$: $f = \emptyset \implies X \cup_f Y := X + Y$). Dann ist

$$Y := e^0 \cup_f \mathbb{B}^n = e^0 \cup e^n = \mathbb{B}^n/\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n.$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{P}^n$ der reell-projektive Raum, $\pi_n \colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n \colon (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : \cdots : x_n)$ die kanonische Projektion,

$$H = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 = 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1}$$

seine ∞-ferne Hyperebene und $i\colon H \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ die Inklusion. Betrachte dann für $f := \pi_{n-1}|\mathbb{S}^{n-1} \colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$

$$X := \mathbb{P}^{n-1} \cup_f \mathbb{B}^n = \mathbb{P}^{n-1} \cup e^n$$

und setze $\Phi|\mathbb{P}^{n-1} := i$ und

$$(\Phi|e^n)(x_1, \dots, x_n) = (1 - \|x\| : x_1 \cdots : x_n).$$

Dann ist Φ ein Homöomorphismus (Übung).

Es ist also (induktiv):

$$\mathbb{P}^n = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n.$$

(c) Ähnlich sieht man für den komplex-projektiven Raum

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n}.$$

(4.4) Definition. Sei X ein toplogischer Raum.

(a) Eine *Zellzerlegung von* X ist eine Teilmenge $\mathcal{Z} \subseteq \mathfrak{P}(X)$, so dass gilt:

   (i) Für alle $e \in \mathcal{Z}$ ist e eine Zelle;

   (ii) $X = \bigcup_{e \in \mathcal{Z}} e$ und für $e, e' \in \mathcal{Z}$ gilt $e \cap e' = \emptyset$.

(b) Ist $\mathcal{Z} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ eine Zellzerlegung von X, so nennt man

$$X^k := \bigcup \{e \in \mathcal{Z} \mid \dim(e) \leq k\}$$

das *k-dimensionale Gerüst* von $(X, \mathcal{Z})$ $(k \in \mathbb{N}_0)$.

(c) Für jedes $e \in \mathcal{Z}$ sei $\overline{e} \subseteq X$ der Abschluss von e in X und $\dot{e} := \overline{e} \setminus e$ der *Rand von* e.

VORSICHT: $\dot{e}$ stimmt im Allgemeinen nicht mit dem Rand $\partial e = \overline{e} \setminus \mathring{e}$ überein.

(4.5) Definition. Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{Z} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ eine Zellzerlegung von X. Für eine n-Zelle $(n \in \mathbb{N}_0)$ $e^n \in \mathcal{Z}$ nennt man ein stetiges $F\colon \mathbb{B}^n \to X$ eine *charakteristische Abbildung von* e, wenn gilt:

(a) $F(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$

(b) $F(\mathring{\mathbb{B}}^n) \subseteq e$ und $F|\mathring{\mathbb{B}}^n \colon \mathring{\mathbb{B}}^n \to e$ ist ein Homöomorphismus.

Die Einschränkung $f|\mathbb{S}^{n-1}\colon \mathbb{S}^{n-1} \to X^{n-1}$ heißt dann die *induzierte Klebeabbildung von* F.

(4.6) Definition. Sei X ein Hausdorffraum. Dann nennt man eine Folge $(X^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ von abgeschlossenen Teilräumen $X^k \subseteq X$ eine *CW-Struktur auf* X, wenn gilt:

(a) $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$ und $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} X^k$;

(b) es gibt eine Zellzerlegung $\mathcal{Z}$ von X, so dass X^k das k-dimensionale Gerüst von $\mathcal{Z}$ ist (für alle $k \in \mathbb{N}_0$) und es gilt:

   (i) für jede Zelle $e \in \mathcal{Z}$ gibt es eine charakteristische Abbildung von e;

   (ii) für jedes $e \in \mathcal{Z}$ trifft $\overline{e}$ nur endlich viele weitere Zellen (C in CW: *closure-finite*);

   (iii) X trägt bezüglich der Familie $(\overline{e})_{e \in \mathcal{Z}}$ die *schwache Topologie*, das heißt $A \subseteq X$ ist abgeschlossen, genau wenn $A \cap \overline{e}$ abgeschlossen ist, für alle $e \in \mathcal{Z}$ (W in CW: *weak topology*).

Das Paar $(X, (X^k)_{k \in \mathbb{N}_0})$ heißt dann ein *CW-Komplex* (oder ein *CW-Raum* oder ein *Zellkomplex*) und $\mathcal{Z}$ eine Zellzerlegung für $\big(X, (X^k)\big)$.

(4.7) Kommentar. (a) ISt $X = X^n$ und $X \neq X^{n-1}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so heißt $n =: \dim(X)$ die *Dimension von* $\big(X,(X^k)\big)$. Ist $X \neq X^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so setzen wir $\dim(X) = \infty$.

(b) Beachte aber, dass eine Zellzerlegung $\mathcal{Z}$ eines endlich dimensionalen CW-Komplexes sehr wohl ∞-viele Zellen haben kann (vergleiche (4.8)(d)).

(c) Hat eine Zellzerlegung $\mathcal{Z}$ von X nur endlich viele Zellen, so ist in der Definition (b.ii) und (b.iii) automatisch erfüllt (Übung).

(d) Es ist $X = \lim_{k\to\infty} X^k$, das heißt $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} X^k$ und $A \subseteq X$ ist abgeschlossen, genau wenn $A \cap X^k$ abgeschlossen in X^k ist $(\forall k \in \mathbb{N}_0)$. (Übung)

(4.8) Beispiel. Sei K ein simplizialer Komplex der Dimension n und $X = |K|$ sein zugeordneter topologische Raum. Setzt man dann für die k-Gerüste $K^k \subseteq K$

$$X^k := \begin{cases} |K^k| \subseteq X & \text{für} 0 \leq k \leq n \\ X & \text{k>n} \end{cases}$$

so ist $(X^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine CW-Struktur auf X. Es ist nämlich $\mathcal{Z} = (\langle s\rangle)_{s\in K}$ eine Zellzerlegung für $\big(X,(X^k)\big)$, wie für jedes $s \in K$ die (Einschränkung der) linearen Abbildung

$$F_s \colon \Delta_k \cong \mathbb{B}^k \to |s|, F_s(e_i) = v_i$$

$(i = 0,\dots,k = \dim s,\ s = \{v_0,\dots,v_k\},\ (v_i)$ eine Nummerierung von $s)$ eine charakteristische Abbildung für $e = \mathring{s}$ ist $(\overline{e} = |s|,\ \dot{e} = |\dot{s}|)$, die sogar ein Homöomorphismus ist.

(a) Eine Zellzerlegung einer CW-Struktur eines Polyeders X kann viel sparsamer sein als die induzierte Triangulierung nach (a). Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist zum Beispiel für $X = \mathbb{S}^n$ mit $X^0 = \{N\} = X^k$ für $1 \leq k \leq n-1$ und $X^n = X = X^k$ für $k \geq n$ eine CW-Struktur (X^k) gegeben, denn $\mathcal{Z} = \big\{e^0, e^n\big\}$ mit $e^0 = \{N\}$ und $e^n = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ ist eine Zellzerlegung für (X^k), weil e^n mit $\mathbb{B}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{B}^n/\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n$ eine charakteristische Abbildung hat (vergleiche (4.3)).

(b) Sei $X = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $X^k = X$ für $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} X^1 &= \{[t,0],[0,s] \in X \mid s,t \in I\} \\ X^0 &= \{[0,0]\}\,. \end{aligned}$$

Dann ist (X^k) eine CW-Struktur, denn $\mathcal{Z} = \big\{e^0, e^1_1, e^1_2, e^2\big\}$ mit

$$\begin{aligned} e^0 &= \{[0,0]\} \\ e^1_1 &= \{[t,0] \mid t \in I\} \\ e^1_2 &= \{[0,s] \mid s \in I\} \\ e^2 &= \{[t,s] \mid 0 < t,s < 1\} \end{aligned}$$

ist eine Zellzerlegung für (X^k) (Übung).

(c) Sei $X = \mathbb{R}$, $X^0 := \mathbb{Z}$ und $X^k = \mathbb{R}$ für $k \geq 1$. Setzt man

$$e_i^0 := \{i\} \text{ für } i \in \mathbb{Z},$$

und

$$e_i^1 := (i-1, i) \text{ für } i \in \mathbb{Z},$$

so ist $\mathcal{Z} = \{e_i^0, e_i^1 \mid i \in \mathbb{Z}\}$ eine (unendliche) Zellzerlegung für $\big(\mathbb{R}, (X^k)\big)$, die $\mathbb{R}$ zu einem CW-Raum der Dimension 1 macht.

(4.9) Kommentar. (a) Ein topologischer Raum X kann verschiedene CW-Strukturen haben.

(b) Der Rand $\dot{e}$ einer Zelle e muss auch nicht Vereinigung anderer Zellen sein.

(c) Eine Zellzerlegung einer CW-Struktur muss nicht Zellen in jeder Dimension haben (mindestens eine 0-Zelle muss es aber geben (Übung)).

(4.10) Bemerkung. *Sei $(\big(X,(X^k)\big)$ ein CW-Raum und $\mathcal{Z}$ eine Zellzerlegung für X. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Für jede Zelle $e \in \mathcal{Z}$ der Dimension k sei $f_e \colon \mathbb{S}^{k-1} \to X^{k-1}$ eine Klebeabbildung für e (das heißt Einschränkung einer charakteristischen Abbildung $F_e \colon \mathbb{B}^{k-1} \to X^k$ für e). Dann entsteht X^k aus X^{k-1} durch Ankleben der Zellen $e \in \mathcal{Z}$ mit $\dim e = k$ via der Klebeabbildung f_e.*

Beweis. Sei J eine Index-Menge für die k-Zellen von $\mathcal{Z}$ (gegeben durch eine Bijektion $J \xrightarrow{j \mapsto e_j} \mathcal{Z}_k = \{e \in \mathcal{Z} \mid \dim(e) = k\}$ versehen mit der diskreten Topologie. Wir betrachten dann

$$f \colon \mathbb{S}^{k-1} \times J \to X^{k-1}, f(\xi, j) := f_j(\xi),$$

wo $f_j \colon \mathbb{S}^{k-1} \to X^{k-1}$ eine Klebeabbildung für die Zelle e_j sei. Sei dann

$$Y := X^{k-1} \cup_f (\mathbb{B}^k \times J)$$

und

$$\pi \colon X^{k-1} + (\mathbb{B}^k \times J) \to Y$$

die kanonische Projektion. Seien weiter $F_j \colon \mathbb{B}^k \to X^k$ charakteristische Abbildungen für die Zellen e_j mit $F_j | \mathbb{S}^{k-1} = f_j$. Setze ebenso

$$F \colon \mathbb{B}^k \times J \to X^k, F(x, j) := F_j(x).$$

Ist nun $i \colon X^{k-1} \to X^k$ die Inklusion, so induziert $i + F \colon X^{k-1} + (\mathbb{B}^k \times J) \to X^k$ ein stetiges $\Phi \colon Y \to X^k$ mit $\Phi \circ \pi = i + f$,

$$\begin{tikzcd}
X^{k-1} + (\mathbb{B}^k \times J) \arrow[r, "i+F"] \arrow[d, "\pi"'] & X^k \\
Y \arrow[ur, dashed, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

denn ist $x = f_j(\xi)$ für ein $j \in J$ und ein $\xi \in \mathbb{S}^{k-1}$, so ist

$$(i + F)(\xi) = F_j(\xi) = f_j(\xi) = x = i(x) = (i + F)(x).$$

Da $Y = \pi(X^{k-1}) \dot\cup (\mathring{\mathbb{B}}^k \times J)$ ist und $X^k = X^{k-1} \dot\cup \dot\bigcup_{j \in J} e_j$, sowie $\pi|X^{k-1}$ und $F_j|\mathring{\mathbb{B}}^k$ Einbettungen sind, folgt: Φ ist bijektiv und stetig.

Nun ist $\Phi^{-1}|X^{k-1} = \pi|X^{k-1}$ stetig und auch $\Phi^{-1}|\overline{e}_j$, da $\Phi|\pi(\mathbb{B}^k \times \{j\})\colon \pi(\mathbb{B}^k \times \{j\}) \to \overline{e}_j$ homöomorph ist, denn $\pi(\mathbb{B}^k \times \{j\})$ ist kompakt und $\overline{e}_j$ hausdorffsch.

Sei nun $A \subseteq Y$ abgeschlossen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\Phi(A) \cap X^{k-1} &= \big(\Phi(A \cap \pi(X^{k-1})\big) \text{ abgeschlossen in } X^{k-1}\\ \Phi(A) \cap \overline{e}_j &= \big(\Phi(A \cap \pi(\mathbb{B}^k \times \{j\})\big) \text{ abgeschlossen in } \overline{e}_j.\end{aligned}$$

Damit gilt (wegen dem W in CW): $\Phi(A) \subseteq X^k$ abgeschlossen. Also ist Φ ein Homöomorphismus. □

(4.11) Kommentar. Sei $\big(X, (X^k)\big)$ ein CW-Raum.

(a) Beachte, dass $X^0 \subseteq X$ ein diskreter Unterraum ist, denn für jede Teilmenge $A \subseteq X^0$ gilt, dass

$$A \cap \overline{e} = A \cap e = \begin{cases} e \\ \emptyset \end{cases}$$

ist, für alle 0-Zellen e und damit abgeschlossen in e. Also ist A abgeschlossen in X^0 (wegen dem W in CW).

(b) Ein CW-Raum entsteht also aus dem diskreten Raum X^0 durch sukzessives Ankleben von 1-Zellen, dann 2-Zellen, usw. Aus der Folge $X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \ldots$ erhält man dann $X = \lim_{n\to\infty} X^n$ (das heißt $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} X^n$ mit der schwachen Topologie).

(c) Umgekehrt ist ein Hausdorffraum X, der wie in (B) aus 0-Zellen, 1-Zellen, usw. entsteht, ein CW-Raum (Übung).

(4.12) Definition. Sei $\big(X, (X^k)\big)$ ein CW-Raum. Ein abgeschlossener Teilraum $A \subseteq X$ heißt ein *CW-Teilraum*, wenn es eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von X für (X^k) gibt, so dass A Vereinigung von Zellen aus X ist.

(4.13) Kommentar. (a) Setzt man $A^k := X^k \cap A$, so ist (A^k) eine CW-Struktur auf A und macht damit A selbst zu einem CW-Raum (Übung).

(b) Es heißt dann (X, A) ein CW-Paar.

(c) Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist offenbar $X^k \subseteq X$ ein CW-Teilraum.

(d) Jeder CW-Teilraum $A \subseteq X$ ist ein starker Umgebungs-Deformationsretrakt, insbesondere ist also

$$H(X, A) \cong H(X/A, [A])$$

(siehe Stöcker/Zieschang I.4.3.2).

(4.14) Definition. Seien $\big(X,(X^k)\big)$ und $\big(Y,(Y^k)\big)$ CW-Räume. Eine stetige Abbildung $f\colon X\to Y$ heißt *zellulär*, wenn für alle $k\in\mathbb{N}_0$ gilt:

$$f(X^k)\subseteq Y^k.$$

(4.15) Kommentar. (a) Sind K und L simpliziale Komplexe und ist $\varphi\colon K\to L$ simplizial, so ist das induzierte $|\varphi|\colon |K|\to|L|$ (bezüglich der induzierten CW-Strukturen) zellulär. Hier bildet $f=|\varphi|$ sogar Zellen auf Zellen ab.

(b) Die CW-Komplexe mit den zellulären Abbildungen bilden so eine Kategorie, die wir mit **CW** bezeichnen.

(c) Die Zuordnung $C\colon \mathbf{SK}\to\mathbf{CW}, K\mapsto|K|,\ \varphi\mapsto|\varphi|$, wird so zu einem Funktor.

(d) Mit Hilfe der simplizialen Approximation kann man beweisen (Satz über die *zelluläre Approximation*): Ist $f\colon X\to Y$ stetig, wo X und Y CW-Räume sind, so gibt es ein zelluläres $g\colon X\to Y$ mit $g\simeq f$ (siehe Störcher/Zieschang 4.3.4). Man nennt g dann eine *zelluläre Approximation von f*.

5 Zelluläre Homologie

(5.1) Erinnerung. Sei $n\in\mathbb{N}_0$, J eine (index-) Menge, $S_j:=\mathbb{S}^n$ und es sei $x_j\in S_j$ fest gewählt (für alle $j\in J$). Das *J-fache Bukett von n-Spären* ist dann der punktierte topologische Raum

$$(Y,y_0):=\bigvee_{j\in J}(S_j,x_j),$$

das ist: Sei $\tilde{Y}=\sum_j S_j$ (toplogische Summe), $i_j\colon S_j\to\tilde{Y}$ die natürliche Inklusion ($\forall j\in J$) und $\sim$ die von

$$i_j(x_j)\sim i_k(x_k),\ \forall j,k\in J$$

erzeugte Äquivalenzrelation. Es ist dann $Y:=\tilde{Y}/\sim$ und $y_0:=\pi(i_j(x_j))\ \forall j\in J$. Wir nennen dann

$$\iota_j:=\pi\circ i_j\colon S^n=S_j\to Y$$

die *natürliche Inklsusion* (von S_j in Y).

(5.2) Kommentar. Seien $n\in\mathbb{N}$ und J, $x_j\in\mathbb{S}^n$ ($j\in J$) gegeben und $Y=\bigvee_j\mathbb{S}^n$.

(a) Es ist dann

$$H_k(Y)\cong\begin{cases}\mathbb{Z} & \text{für } k=0\\ \bigoplus_j\mathbb{Z} & \text{für } k=n\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Für $k = 0$ ist das klar, weil Y wegzusammenhängend ist. Für $k > 0$ betrachte

$$A = \left\{ i_j(x_j) \in \tilde{Y} = \sum_j \mathbb{S}^n \mid j \in J \right\}.$$

Dan ist A diskret, also $H_0(A) \cong \bigoplus_j \mathbb{Z}$ und $H_k(A) = 0$ sonst. Außerdem ist A starker Umgebungs-Deformationsretrakt, also ist

$$H_k(Y) \cong H_k(Y, y_0) \cong H_k(\tilde{Y}, A) \quad \text{für } k > 0$$

(siehe (1.20)). Die lange Homologie-Sequenz des Paares $(\tilde{Y}, A)$ liefert deshalb

$$H_k(Y) \cong H_k(\tilde{Y}, A) \cong H_k(\tilde{Y}) = \bigoplus_j H_k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \bigoplus_j \mathbb{Z} & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst } (k > 0) \end{cases}$$

für $k > 0$, denn $i_*^0\colon H_0(A) \to H_0(\tilde{Y})$ ist isomorph.

(b) Y hat auch eine natürliche CW-Struktur mit einer 0-Zelle $e^0 = \{y_0\}$ und J n-Zellen $e_j^n = \iota_j(\mathbb{S}^n \setminus \{x_j\})$ (Übung).

(5.3) Proposition. *Sei $\big(X, (X^k)_{k\in\mathbb{N}_0}\big)$ ein CW-Raum und $k \in \mathbb{N}_0$. Sei weiter $\mathcal{Z}$ eine Zellzerlegung für (X^k) und J eine Indexmenge für die k-Zellen $\mathcal{Z}_k$ von $\mathcal{Z}$. Sei weiter $\pi\colon X^k \to X^k/X^{k-1}$ die kanonische Projektion und $F_j\colon \mathbb{B}^k \to X^k$ eine charakteristische Abbildung für die Zelle $e_j \in \mathcal{Z}_k$. Sei schließlich $\rho\colon \mathbb{B}^k \to \mathbb{B}^k/\mathbb{S}^{k-1} \cong \mathbb{S}^k$ die Projektion und $p\colon \tilde{Y} = \sum_j \mathbb{S}^k \to \bigvee_j \mathbb{S}^k =: Y$ die Projektion.*

Dann induziert die Abbildung $F := \Sigma_j F_j\colon \sum_j \mathbb{B}^k \to X^k$ einen Homomorphismus $\Phi\colon Y \to X^k/X^{k-1}$ mit

$$\Phi \circ p \circ \Sigma_j \rho = \pi \circ F,$$

$$\begin{tikzcd}
\sum_j \mathbb{B}^k \arrow[r, "F = \Sigma F_j"] \arrow[d, "\Sigma_j \rho"'] & X^k \arrow[d, "\pi"] \\
\tilde{Y} = \sum_j \mathbb{B}^k/\mathbb{S}^{k-1} \arrow[r, dashed, "\overline{F}"] \arrow[d, "p"'] & X^k/X^{k-1} \\
Y = \bigvee_j \mathbb{S}^k \arrow[ur, dashed, "\cong"', "\Phi"] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Da X^k aus X^{k-1} durch Ankleben der Zellen e_j $(j \in J)$ entsteht, ist Φ offenbar bijektiv und stetig sowieso. Nun induziert jedes $F_j\colon \mathbb{B}^k \to X^k$ ebenso ein stetiges und injektives $\overline{F}_j\colon \mathbb{B}^k/\mathbb{S}^{k-1} \to X^k/X^{k-1}$ und diese muss homöomorph auf sein Bild $\overline{e}_j/\dot{e}_j$ sein, weil $\mathbb{B}^k/\mathbb{S}^{k-1} \cong \mathbb{S}^k$ kompakt und X^k/X^{k-1} hausdorffsch ist (Übung). Also ist

$$\Phi^{-1} \circ \pi|\overline{e}_j = p \circ \overline{F}_j^{-1} \circ \pi|\overline{e}_j$$

stetig, $\forall j \in J$. Da X^k die schwache Topologie bezüglich $(\overline{e}_j)_{j \in J}$ trägt, ist damit auch $\Phi^{-1} \circ \pi$ stetig. Nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie damit auch Φ^{-1}. $\square$

(5.4) Kommentar. (a) (5.3) zeigt, dass zumindest die Anzahl der k-Zellen einer Zellzerlegung für eine CW-Struktur (X^k) auf X festliegt, denn $\#X_0$ gibt die Anzahl der 0-Zellen an und

$$\operatorname{rg}\big(H_k(X^k/X^{k-1})\big) = \operatorname{rg}\big(H_k(X^k, X^{k-1})\big)$$

die Anzahl der k-Zellen.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Da $H_k(\mathbb{B}^k, \mathbb{S}^{k-1}) \cong \mathbb{Z}$ ist, gibt es in $H_k(\mathbb{B}^k, \mathbb{S}^{k-1})$ zwei (verschiedene) Erzeuger. (Ist zum Beispiel $\sigma\colon (\Delta_k, \dot{\Delta}_k) \to (\mathbb{B}^k, \mathbb{S}^{k-1})$ ein Homöomorphismus, so ist $[\sigma] \in H_k(\mathbb{B}^k, \mathbb{S}^{k-1})$ einer davon (Übung).)

Einen solchen Erzeuger notieren wir mit $[\mathbb{B}^k] \in H_k(\mathbb{B}^k, \mathbb{S}^{k-1})$ und nennen ihn eine *Orientierung von* $(\mathbb{B}^k, \mathbb{S}^{k-1})$.

(c) Sei $k \in \mathbb{N}$. Ähnlich notieren wir jeden Erzeuger von $H_k(\mathbb{S}^k)$ mit $[\mathbb{S}^k]$ und nennen dies eine *Orientierung von* $\mathbb{S}^k$. Beachte, dass zum Beispiel wegen der Exaktheit der langen Sequenz des Paares $(\mathbb{B}^k, \mathbb{S}^{k-1})$ eine Orientierung $[\mathbb{B}^k]$ von $(\mathbb{B}^k, \mathbb{S}^{k-1})$ unter dem Randoperator

$$\partial_*\colon H_k(\mathbb{B}^k, \mathbb{S}^{k-1}) \xrightarrow{\cong} H_{k-1}(\mathbb{S}^{k-1})$$

auf eine Orientierung von $\mathbb{S}^{k-1}$ geht ($\partial_*\big([\mathbb{B}^k]\big)$ ist Orientierung von $\mathbb{S}^{k-1}$, sie *induziert eine Orientierung auf* $\S^{k-1}$.

(d) Sei nun $\big(X, (X^k)\big)$ ein CW-Raum, $\mathcal{Z}$ eine Zellzerlegung für X und e eine k-Kette von $\mathcal{Z}$. Wählt man nun einen Erzeuger $[\mathbb{B}^k]$ von $H_k(\mathbb{B}^k, \mathbb{S}^{k-1})$ und eine charakteristische Abbildung $F_e\colon \mathbb{B}^k \to X^k$ für e, so nennt man das Element

$$(\overline{F}_e)_*([\mathbb{B}^k]) \in H_k(X^k/X^{k-1})$$

eine *orientierte k-Zelle von X.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B}^k \arrow[r, "F_e"] \arrow[d] & X^k \arrow[d] \\
\mathbb{B}^k/\mathbb{S}^{k-1} \arrow[r, "\overline{F}_e"'] & X^k/X^{k-1}
\end{tikzcd}$$

(e) Hat man für alle k-Zellen (einer Zellzerlegung $\mathcal{Z}$ eines CW-Raumes X) charakteristische Abbildungen $F_j\colon \mathbb{B}^k \to X^k$ und Orientierungen $[\mathbb{B}^k]_j \in H_k(\mathbb{B}^k, \mathbb{S}^{k-1})$, $j \in J$, gewählt, so wird also $H_k(X^k/X^{k-1})$ nach (5.3) von den orientierten k-Zellen $(\overline{F}_j)_*([\mathbb{B}^k]_j)$ frei erzeugt, denn

$$(\overline{F})_*([\mathbb{B}^k]) = \Phi_*(p_+([\mathbb{B}^k]_j),$$

und $p_*([\mathbb{B}^k]_j)$ ist ein Erzeuger für den j-ten Summand von $H_k(Y) = \bigoplus_j \mathbb{Z}$ $(k > 0)$.

(f) Wir notieren der Einfachheit halber eine orientierte k-Zelle $(\overline{F}_e)_*([\mathbb{B}^k]) \in H_k(X^k/X^{k-1})$ nur mit e (vergleiche §2 mit orientierten Simplexen).

(g) Weil X^{k-1} ein CW-Teilkomplex und damit ein starker Umgebungs-Deformationsretrakt ist, identifizieren wir schließlich $H_k(X^k/X^{k-1})$ mit der relativen Homologie $H_k(X^k, X^{k-1})$.

(5.5) Definition. Sei $\big(X, (X^k)\big)$ ein CW-Raum und $k \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren die *k-te zelluläre Kettengruppe von* $\big(X, (X^k)\big)$ durch

$$C_k(X) := H_k(X^k, X^{k-1}).$$

(5.6) Kommentar. (a) Für $k < 0$ setzen wir $C_k(X) = (0)$. Man beachte, dass für einen CW-Komplex der Dimension n für $k > n$ unmittelbar folgt:

$$C_k(X) = (0).$$

(b) Man beachte auch, dass für die Definition der zellulären Kettengruppen bereits die singuläre (sogar relative) Homologie herangezogen wird. Später (in (5.7)) wird von diesen noch einmal eine Homologie gebieldet ("Homologiei^2").

(c) Die zellulären Kettengruppen hängen nur von der CW-Struktur (X^k) ab, nicht von einer zugehörigen Zellzerlegung $\mathcal{Z}$ für (X^k). Ist aber eine Zellzerlegung $\mathcal{Z}$ gewählt, so kann jede zelluläre Kette $c \in C_k(X)$ nach (5.4) als eine (eindeutig bestimmte) ganzzahlige Linearkombination von orientierten k-Zellen von X aufgefasst werden,

$$c = \sum_{i=1}^{r} n_i e_i.$$

(d) Hat X eine Zellterlegung $\mathcal{Z}$, die für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ nur endlich viele k-Zellen hat, so ist also $C_k(X)$ endlich erzeugt (und damit auch jede Untergruppe und jeder Quotient davon).

(e) Betrachte nun die langen Homologie-Sequenzen zu den Paaren (X^k, X^{k-1}) und (X^{k-1}, X^{k-2}):

$$
\begin{tikzcd}
& & & \vdots \arrow[d] & & \\
& & & H_{k-1}(X^{k-2}) \arrow[d] & & \\
\ldots \arrow[r] & H_k(X^k) \arrow[r] & H_k(X^k,X^{k-1}) \arrow[r, "\partial^k_*"] \arrow[d, equal] & H_{k-1}(X^{k-1}) \arrow[r] \arrow[dd, "j^{k-1}_*"] & H_{k-1}(X^k) \arrow[r] & \ldots \\
& & C_k(X) \arrow[d, "\partial_k"'] & & & \\
& & C_{k-1}(X) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\partial_{k-1}"'] & H_{k-1}(X^{k-1},X^{k-2}) \arrow[dd, "\partial^{k-1}_*"] & & \\
& & C_{k-2}(X) \arrow[d, equal] & & & \\
& & H_{k-2}(X^{k-2},X^{k-3}) & H_{k-2}(X^{k-2}) \arrow[l, "j^{k-2}_*"] \arrow[d] & H_{k-2}(X^{k-3}) \arrow[l] & \\
& & & \vdots & &
\end{tikzcd}
$$

(5.7) Definition. Sei $\big(X,(X^k)\big)$ ein CW-Komplex, $k \in \mathbb{N}_0$ sowie $C_k(X)$ und $C_{k-1}(X)$ seine zelluläre Kettengruppen in Dimension k und $k-1$. Sei $j^{k-1}\colon (X^{k-1},\emptyset) \to (X^{k-1},X^{k-2})$ die Inklusion und $\partial^k_*\colon H_k(X^k,X^{k-1}) \to H_{k-1}(X^{k-1})$ gegeben durch $\partial_*([\overline{z}]) = [\partial z]$ (vergleiche (1.8)(d)). Dann nennen wir

$$\partial_k := j^{k-1}_* \circ \partial^k_*\colon C_(X) \to C_{k-1}(X)$$

den *zellulären Randoperator von* $\big(X,(X^k)\big)$.

(5.8) Kommentar. (a) Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0,$$

denn

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = j^{k-2}_* \circ \underbrace{\partial^{k-1}_* \circ j^{k-1}_*}_{=0} \circ \partial^k_* = 0.$$

Das macht also

$$C(X) := (C_k(X), \partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}$$

(mit $\partial_k = 0$ für $k \leq 0$) zu einem Kettenkomplex. Er heißt der *zelluläre Kettenkomplex von* $\big(X, (X^k)\big)$.

(b) Die zugehörige Homologie

$$H_k\big(C(X)\big) := \ker \partial_k / \operatorname{im} \partial_{k+1}$$

heißt die *k-te zelluläre Homologiegruppe von X*. Beachte, dass $C(X)$, und damit $H\big(C(X)\big)$, nur von der CW-Struktur auf X abhängt, nicht von der gewählten Zellzerlegung.

(c) Ist jedoch eine Zellzerlegung für (X^k) gegeben und alle Zellen mit Orientierungen versehen, so gilt für eine orientierte k-Zelle

$$e = (\overline{F}_e)_*([\mathbb{B}^k])$$

nach Definition von ∂_k:

$$\partial e = j_* \circ (F_e|\mathbb{S}^{k-1})_*\big(\partial_*([\mathbb{B}^k])\big),$$

denn folgendes Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbb{B}^k] \in H_k(\mathbb{B}^k, \mathbb{S}^{k-1})} \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "(\overline{F}_e)_*"'] & H_{k-1}(\mathbb{S}^{k-1}) \arrow[d, "(F_e|\mathbb{S}^{k-1})_*"] \\
H_k(X^k, X^{k-1}) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{k-1}(X^{k-1})
\end{tikzcd}$$

∂e hängt also von der Klebeabbildung $f_e = F_e|\mathbb{S}^{k-1}$ ab.

(5.9) Beispiel. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{S}^n = e^0 \cup e^n$ die Standard-Zerlegung von $\mathbb{S}^n$. Dann folgt für die zugehörige CW-Struktur:

$$\ldots \to 0 \to \ldots \to 0 \to C_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z} \to 0 \to \ldots \to 0 \to C_0(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z} \to 0$$

(i) Für $n \geq 2$ ist also $\partial = 0$ und es folgt:

$$H_k\big(C(\mathbb{S}^n)\big) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 0 \text{ oder } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(ii) Auch für $n = 1$ gilt: $\partial_1 = 0$, denn die 1-Zelle e^1 von $\mathbb{S}^1$ wird nur an einem Punkt angeklebt,

$$\partial e^1 = e^0 - e^0 = 0.$$

Also ist auch hier:

$$H_k\big(C(\mathbb{S}^1)\big) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 0 \text{ oder } k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(iii) Natürlich ist für $n = 0$ und $\mathbb{S}^0 = e^0_1 \cup e^0_2$:

$$H_k\big(C(\mathbb{S}^0)\big) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(b) Sei

$$\mathbb{T}^2 = e^0 \cup e^1_1 \cup e^1_2 \cup e^2$$

die Zellzerlegung des 2-dimensionalen Torus aus (4.8)(c), die wir mit folgender Orientierung versehen:

Dann gilt für die Randoperatoren:

$$\begin{aligned} \partial_2 e^2 &= e^1_1 + e^1_2 - e^1_1 - e^1_2 = 0 \\ \partial_1 e^1_1 &= \partial_1 e^1_2 = e^0 - e^0 = 0. \end{aligned}$$

Also ist $\delta = 0$ und der zelluläre Kettenkomplex von $\mathbb{T}$ (mit dieser CW-Struktur) sieht so aus:

$$C(X): 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Es folgt:

$$H_k\big(C(\mathbb{T}^2)\big) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ \mathbb{Z}^2 & k = 1 \\ \mathbb{Z} & k = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(c) Für die (orientierten, kompakten) Flächen Σ_g vom Geschlecht $g \in \mathbb{N}_0$ gilt mit der folgenden Zellzerlegung analog,

$$\Sigma_g = e^0 \cup (e^1_1 \cup \cdots \cup e^1_{2g}) \cup e^2 :$$

$\delta = 0$, also:

$$H_k\big(C(\Sigma_g)\big) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 0 \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{für } k = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{für } k = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(d) Für den komplex-projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ mit der üblichen Zellzerlegung (vergleiche (4.8))

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n}$$

ist wiederum $\delta = 0$ und damit

$$H_k\big(C(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))\big) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } 0 \leq k \leq 2n,\ k \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(e) Für den reell-projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ mit seiner Standard-Zerlegung

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n$$

gilt (Übung):

$$\delta e^k = \pm(1 - (-1)^{k-1}) e^{k-1}.$$

Es folgt:

(i) n gerade:

$$H_k\big(C(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))\big) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{für } 0 < k < n,\ k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(ii) n ungerade:

$$H_k\big(C(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))\big) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{für } 0 < k < n,\ k \text{ ungerade} \\ \mathbb{Z} & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(5.10) Definition. Seien $\big(X, (X^k)\big)$ und $\big(Y, (Y^k)\big)$ CW-Räume und $f\colon X \to Y$ zellulär. Dann induziert f für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ein stetiges $f^k\colon (X^k, X^{k-1}) \to (Y^k, Y^{k-1})$ und damit einen Homomorphismus

$$f_*^k\colon C_k(X) = H_k(X^k, X^{k-1}) \to H_k(Y^k, Y^{k-1}) = C_k(Y).$$

Man nennt $Cf = (f_*^k)\colon C(X) \to C(Y)$ die von f *induzierte (zelluläre) Kettenabbildung.*

(5.11) Kommentar. (a) Cf ist wirklich eine Kettenabbildung, weil folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
H_k(X^k, X^{k-1}) \arrow[r, "\partial_*^k"] \arrow[d, "f_*^k"'] & H_{k-1}(X^{k-1}) \arrow[r, "j_*^X"] \arrow[d, "f_*^{k-1}"'] & H_{k-1}(X^{k-1}, X^{k-2}) \arrow[d, "f_*^{k-1}"'] \\
H_k(Y^k, Y^{k-1}) \arrow[r, "\partial_*^Y"'] & H_{k-1}(Y^{k-1}) \arrow[r, "j_*^Y"'] & H_{k-1}(Y^{k-1}, Y^{k-2})
\end{tikzcd}$$

(b) $C\colon \mathbf{CW} \to \mathbf{KK}$ wird so zu einem Funktor von der Kategorie der CW-Komplexe in die Kategorie der Kettenkomplexe.

6 Simpliziale, zelluläre und singuläre Homologie

(6.1) Bemerkung. *Sei $\big(X,(X^k)\big)$ ein CW-Raum und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für alle $k \neq n$, $\in \mathbb{N}_0$:*

$$H_k(X^n, X^{n-1}) = 0.$$

Beweis. $n = 0$: $X^0 = (X^0, \emptyset)$ ist diskret. Also ist $H_k(X^0) = 0$ für alle $k > 0$.

Sei $n > 0$.

(i) $k = 0$: Ist $x \in X^n \setminus X^{n-1}$ und $\mathcal{Z}$ eine Zellzerlegung für (X^k). Es gibt dann eine n-Zelle $e \in \mathcal{Z}$ mit $x \in e$. Ist $F_e \colon \mathbb{B}^n \to X^n$ charakteristisch für e, so sei $t := (F_e|\mathring{\mathbb{B}}^n)^{-1}(x) \in \mathring{\mathbb{B}}^n$ und $\alpha\colon I \to \mathbb{B}^n$ ein Weg von t zum Rand $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{B}^n$, $\alpha(0) = t$, $\alpha(1) =: \xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ (zum Beispiel $\alpha(s) = (1-s)t + s\frac{t}{\|t\|}$, wenn $t \neq 0$ ist). Dann ist $F_e \circ \alpha\colon I \to X^n$ ein Weg von x nach $y := F_e(\xi) \in X^{n-1}$. Also ist $[x] = [y]$ in $H_0(X^n)$. Für die Inklusion $i\colon X^{n-1} \to X^n$ ist deshalb $i_*\colon H_0(X^{n-1} \to H_0(X^n)$ surjektiv (denn $[x] = i_*([y])$). Wegen der Exaktheit von

$$H_0(X^{n-1}) \overset{i_*}{\twoheadrightarrow} H_0(X^n) \overset{0}{\to} H_0(X^n, X^{n-1}) \overset{0}{\to} 0$$

folgt: $H_0(X^n, X^{n-1}) = 0$.

(ii) $k > 0$: Dann ist $X^n/X^{n-1} \cong \bigvee_{j\in J} \mathbb{S}^n$, wo J eine Indexmenge für die n-Zellen (einer Zellzerlegung für (X^k)) ist. (Ist $J = \emptyset$, also $X^{n-1} = X^n$, so ist $X^n/X^{n-1} = \mathrm{pt}$.) Nach (5.2) ist also für $k \in \mathbb{N}$, $k \neq n$:

$$H_k(X^n, X^{n-1}) \cong H_k(X^n/X^{n-1}) = 0.$$

$\square$

(6.2) Korollar. *Ist X ein CW-Raum der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$, so gilt für alle $k > n$:*

$$H_k(X) = 0.$$

Beweis. Die lange Homologie-Sequenz für das Paar $(X^l, X^{l-1}$ $(l = 0, \dots, n)$ liefert, dass $i_*^{l-1,l}$ ein Isomorphismus ist:

$$0 \overset{(6.1)}{=} H_{k+1}(X^l, X^{l-1}) \longrightarrow H_k(X^{l-1}) \underset{\cong}{\overset{i_*^{l-1,l}}{\longrightarrow}} H_k(X^l) \longrightarrow H_k(X^l, X^{l-1}) \overset{(6.1)}{=} 0$$

Es folgt:

$$H_k(X) = H_k(X^n) \cong H_k(X^{n-1}) \cong \ldots \cong H_k(\underbrace{X^{-1}}_{=\emptyset}) = 0$$

$\square$

(6.3) Lemma. *Sei $(X,(X^k))$ ein CW-Raum und $K \subseteq X$ kompakt. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq X^n$.*

Beweis. Übung. $\square$

(6.4) Proposition. *Sei $(X,(X^k))$ ein CW-Raum und $i^k \to X^k \hookrightarrow X$ die Inklusion ($k \in \mathbb{N}_0$). Dann gilt:*

(a) $i^k_*\colon H_k(X^k) \to H_k(X)$ ist surjektiv;

(b) $i^{k+1}_*\colon H_k(X^{k+1}) \to H_k(X)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $i^{k,l}\colon X^k \hookrightarrow X^l$ für $k \leq l$ die Inklusion. Die lange Homologie-Sequenz des Paares (X^{k+1}, X^k) liefert den Abschnitt

$$H_k(X^k) \xrightarrow{i^{k,k+1}_*} H_k(X^{k+1}) \longrightarrow H_k(X^{k+1}, X^k) \overset{(6.1)}{=} 0$$

Die Exaktheit bei $H_k(X^{k+1}$ zeigt daher: $i^{k,k+1}_*$ ist surjektiv.

Für $m \geq 1$ liefert die Exaktheit des Abschnitts der Sequenz für $X^{k+m+1}, X^{k+m})$

$$0 \overset{(6.1)}{=} H_k(X^{k+m+1}, X^{k+m}) \xrightarrow{0} H_k(X^{k+m}) \xrightarrow{i^{k+m,k+m+1}_*} H_k(X^{k+m+1}) \xrightarrow{0} H_k(X^{k+m+1}, X^{k+m}) \overset{(6.1)}{=} 0$$

dass $i^{k+m+1,k+m}_*$ sogar ein Isomorphismus ist.

zu (a): Ist $\dim X =: n < \infty$, also $X = X^n$, so ist

$$i^k_0 = i^{k,n} = i^{n-1,n} \circ \cdots \circ i^{k,k+1}$$

und deshalb als Komposition surjektiver Abbildungen surjektiv,

$$\begin{tikzcd} H_k(X^k) \arrow[r, "i^{k,k+1}_*"] \arrow[rrr, bend right, "i^k_*"'] & H_k(X^{k+1}) \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "i^{n-1,n}_*"] & H_k(X^n) = H_k(X) \end{tikzcd}$$

Ist $\dim X = \infty$, so sei $\alpha \in H_k(X)$ beliebig und $z = \sum_{i=0}^r n_i\sigma_i \in Z_k(X)$ ein Repräsentant. Da $\sigma(\Delta_k) \subseteq X$ kompakt ist ($\Delta_k \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ der Standard-Simplex), existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $z \in Z_k(X^n)$ (nach (6.3)) und damit also

$$\alpha = [z]_X = i^n_*([z]_{X^n}).$$

Da $i^{k,n}_*\colon H_k(X^k) \to H_k(X^n)$ (wie eben gesehen) surjektiv ist, existiert also ein $\beta \in H_k(X^k)$ mit $i^{k,n}_*(\beta) = [z]_{X^n}$ und wegen $i^k = i^n \circ i^{k,n}$ also:

$$\alpha = i^n_* \circ i^{k,n}_*(\beta) = i^k_*(\beta).$$

Also ist i^k_* surjektiv.

zu (b): Für $X = X^n$ ist $i^{k+1} = i^{k+1,n}$ (bei $k < n$, sonst ist die Aussage sowieso klar), und

$$i^{k+1,n} = i^{n,n-1} \circ \cdots \circ i^{k+1,k+2}$$

induziert nun sogar einen Isomorphismus,

$$\begin{tikzcd} H_k(X^{k+1}) \arrow[r, "i_*^{k+1,k+2}", "\cong"'] \arrow[rrr, bend right, "i_*^{k+1}"'] & H_k(X^{k+2}) \arrow[r, "\cong"'] & \cdots \arrow[r, "i_*^{n-1,n}", "\cong"'] & H_k(X^n) = H_k(X) \end{tikzcd}$$

Ist $\dim X = \infty$, so sieht man wie unter (a), dass i_*^{k+1} surjektiv ist.

Sei nun $\alpha = [z]_{X^{k+1}} \in H_k(X^{k+1})$ mit $i_*^{k+1}(\alpha) = 0$ beliebig, also

$$0 = i_*^{k+1}(\alpha) = [z]_X.$$

Dann gibt es also ein $c \in S_{k+1}(X)$ mit $\partial c = z$. Nach (6.3) existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $c \in S_{k+1}(X^n)$ ist, also sogar

$$0 = [z]_{X^n} = i_*^{k+1,n}(\alpha).$$

Da $i_*^{k+1,n} = i_*^{n-1,n} \circ \cdots \circ i_*^{k+1,k+2}$ als Verkettung von injektiven Abbildungen injektiv ist, folgt: $\alpha = 0$. i_*^{k+1} ist also injektiv.

□

(6.5) Korollar. *Für jeden CW-Raum X und jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

$$H_k(X, X^k) = 0.$$

Beweis. Die lange Sequenz des Paares (X, X^k) liefert den exakten Abschnitt

$$H_k(X^k) \xrightarrow{i_*^k} H_k(X) \xrightarrow{0} H_k(X, X^k) \xrightarrow{0} H_{k-1}(X^k) \xrightarrow{i_*^k} H_{k-1}(X)$$

wobei nach (6.3) die erste dieser Abbildungen surjektiv und die letzte injektiv (sogar bijektiv) ist. Es folgt, dass die mittleren beiden Null sein müssen, also $H_k(X, X^k) = 0$. □

(6.6) Vorbereitung. Wir wollen nun für einen CW-Raum X die singuläre Homologie $H_k(X)$ mit der zellulären Homologie $H_k\big(C(X)\big)$ vergleichen und betrachten dazu die Inklusionen

$$j^k\colon X^k = (X^k, \emptyset) \hookrightarrow (X^k, X^{k-1}), i^k\colon X^k \hookrightarrow X.$$

Da der zelluläre Randoperator $\partial_k\colon C_k(X) \to C_{k-1}(X)$ durch $\partial_k = j_*^{k-1} \circ \partial_*$ gegeben ist, wo $\partial_*\colon C_k(X) \to H_{k-1}(X^{k-1})$ der verbindende Homomorphismus in der langen Sequenz von (X^k, X^{k-1}) ist, $\partial_* = \partial_*^{(X^k, X^{k-1})}$, folgt:

$$\partial_k \circ j_*^k = j_*^{k-1} \circ \underbrace{\partial_* \circ j_*^k}_{=0} = 0,$$

das heißt: j_*^k bildet $H_k(X^k)$ in die zelluläre Zyklengruppe $Z_k\big(C(X)\big) \subseteq C_k(X) = H_k(X^k, X^{k-1})$ ab,

$$\begin{tikzcd}
H_k(X^k) \arrow[r, "j_*^k"] \arrow[d, "i_*^k"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z_k\big(C(X)\big) \subseteq H_k(X^k, X^{k-1}) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\pi_k"] \arrow[dr, "\partial_k"'] & H_{k-1}(X^{k-1}) \arrow[d, "j_*^{k-1}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
H_k(X) \arrow[r, dashed, "\Phi_k", "\cong"'] & H_k\big(C(X)\big) & H_{k-1}(X^{k-1}, X^{k-2})
\end{tikzcd}$$

Sei noch $\pi_k\colon Z_k\big(C(X)\big) \to H_k\big(C(X)\big)$ die kanonische Projektion.

(6.7) Satz. *Sei X ein CW-Raum und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann induzieren die Inklusionen $i^k\colon X^k \hookrightarrow X$ und $j^k\colon X^k \hookrightarrow (X^k, X^{k-1})$ einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\Phi_k\colon H_k(X) \to H_k\big(C(X)\big)$ mit $\Phi_k \circ i_*^k = \pi_k \circ j_*^k$ und dieser ist ein Isomorphismus.*

Beweis. (a) Wir betrachten die Inklusionen $r^k\colon (X^{k+1}, X^k) \to (X, X^k)$. Aus der langen exakten Sequenz für das Tripel (X, X^{k+1}, X^k) und $H_{k+1}(X, X^{k+1}) = 0$ (6.5) folgt, dass

$$r_*^k\colon C_{k+1}(X) = H_{k+1}(X^{k+1}, X^k) \to H_{k+1}(X, X^k)$$

surjektiv ist.

Sei nun $\alpha \in H_k(X^k)$ im Kern von i_*^k, $i_*^k(\alpha) = 0$. Betrachte die lange Sequenz des Paares (X, X^k). Dann gibt es zunächst ein $\beta \in H_{k+1}(X, X^k)$ mit $\partial_*^{(X,X^k)}\beta = \alpha$ und wegen der Surjektivität von r_k^* dann auch ein $\gamma \in C_{k+1}(X)$ mit $r_*^k(\gamma) = \beta$ und damit

$$\partial_*^{(X^{k+1},X^k)}(\gamma) = \partial_*^{(X,X^k)} \circ r_*^k(\gamma) = \partial_*^{(X,X^k)}(\beta) = \alpha.$$

$$\begin{tikzcd}
0 = H_{k+1}(X, X^{k+1}) & H_{k+1}(X, X^k) \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "\partial_*^{(X,X^k)}"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & H_{k+1}(X^{k+1}, X^k) \subseteq C_{k+1}(X) \arrow[l, two heads, "r_*^k"'] \arrow[dl, "\partial_*^{(X^{k+1},X^k)}"'] \arrow[d, "\partial_k"] \\
 & H_k(X^k) \arrow[r, two heads, "j_*^k"'] \arrow[d, two heads, "i_*^k"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z_k\big(C(X)\big) \subseteq H_k(X^k, X^{k-1}) \arrow[d, two heads, "\pi_k"] \\
 & H_k(X) \arrow[r, dashed, "\Phi_k"'] & H_k\big(C(X)\big)
\end{tikzcd}$$

Deshalb ist

$$\pi_k \circ j_*^k(\alpha) = \pi_k \circ j_*^k \circ \delta_*^{(X^{k+1},X^k)}(\gamma) = \pi_k \circ \partial_k(\gamma) = 0.$$

Da i_*^k surjektiv ist, faktorisiert also $\pi_k \circ j_*^k$ eindeutig über i_*^k: $\Phi_k \colon H_k(X) \to H_k\big(C(X)\big)$ mit $\Phi_k \circ i_*^k = \pi_k \circ j_*^k$ existiert und ist eindeutig.

(b) Φ_k ist surjektiv: Wir zeigen, dass sogar $j_*^k \colon H_k(X^k) \to Z_k\big(C(X)\big)$ surjektiv ist. Da π_k surjektiv ist, ist damit dann $\pi_k \circ j_*^k$ und deshalb auch Φ_k surjektiv.

Sei also $\beta \in Z_k\big(C(X)\big)$ beliebig, also

$$0 = \partial_k \beta = j_*^{k-1} \circ \partial_*^{(X^k,X^{k-1})}(\beta).$$

Die lange Sequenz für das Paar (X^{k-1}, X^{k-2}) und $H_{k-1}(X^{k-2}) = 0$ ((6.5)) zeigen, dass j_*^{k-1} injektiv ist und damit $\partial_* \beta = 0$. Die Exaktheit der langen Sequenz des Paares (X^k, X^{k-1}) bei $H_k(X^k, X^{k-1}) = C_k(X)$ liefert dann ein $\alpha \in H_k(X^k)$ mit $j_*^k(\alpha) = \beta$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & H_{k-1}(X^{k-2}) \overset{(6.4)}{=} 0 \arrow[d, "0"] \\
0 \overset{(6.4)}{=} H_k(X^{k-1}) \arrow[r] & H_k(X^k) \arrow[r, tail, two heads, "j_k^*", "\cong"'] & Z_k\big(C(X)\big) \subseteq H_k(X^k, X^{k-1}) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[dr, "\partial_k"'] & H_{k-1}(X^{k-1}) \arrow[d, tail] \\
 & & & H_{k-1}(X^{k-1}, X^{k-2})
\end{tikzcd}$$

Zusatz: Da nach (6.5) auch $H_k(X^{k-1}) = 0$ ist, ist $j_*^k \colon H_k(X^k) \to Z_k\big(C(X)\big)$ sogar ein Isomorphismus.

(c) Φ_k ist auch injektiv: Sei $\gamma \in H_k(X)$ mit $\Phi_k(\gamma) = 0$. Da i_*^k nach (6.4) surjektiv ist, gibt es ein $\beta \in H_k(X^k)$ mit $\gamma = i_*^k(\beta)$. Es ist dann

$$\pi_k\big(j_*^k(\beta)\big) = \Phi_k \circ i_*^k(\beta) = \Phi_k(\gamma) = 0,$$

also gibt es ein $\alpha \in C_{k+1}(X) = H_{k+1}(X^{k+1}, X^k)$ mit $\partial_k \alpha = j_*^k(\beta)$. Es folgt

$$j_*^k(\beta) = \partial_k(\alpha) = j_*^k \circ \partial_*^{(X^{k+1},X^k)}(\alpha) = j_*^k\big(\partial_*^{(X,X^k)} \circ r_*^k(\alpha)\big),$$

also, wegen der Injektivität von j_*^k: $\beta = \partial_*^{(X,X^k)} \circ r_*^k(\alpha)$. Insgesamt

$$\gamma = i_*^k(\beta) = \underbrace{i_*^k \circ \partial_*^{(X,X^k)}}_{=0} \circ r_*^k(\alpha) = 0,$$

also Φ_k auch injektiv.

$\square$

(6.8) Vorbereitung. Wir wollen nun die simpliziale Homologie $H(K)$ eines simplizialen Komplexes K mit der zellulären Homologie $H\big(C(|K|)\big)$ des zugehörigen CW-Raumes $|K|$ vergleichen.

Sei dazu $\Delta_k \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ der Standard-Simplex der Dimension k mit Ecken $e_0, \ldots, e_k$ (das ist: $(e_0, \ldots, e_k)$ ist die kanonische Basis von $\mathbb{R}^{k+1}$). Die Abbildung $\mathrm{id}_k \colon \Delta_k \to \Delta_k$ ist ein singulärer k-Simplex in Δ_k mit $\partial(\mathrm{id}_k) \in S_{k-1}(\dot{\Delta}_k)$. Also ist $\overline{\mathrm{id}}_k \in S_k(\Delta_k, \dot{\Delta}_k)$ ein relativer Zykel und seine Homologieklasse $[\overline{\mathrm{id}}_k] \in H_k(\Delta_k, \dot{\Delta}_k) \cong H_k(\mathbb{B}^k, \mathbb{S}^{k-1}) \cong \mathbb{Z}$ ein Erzeuger (also eine Orientierung von $(\Delta_k, \dot{\Delta}_k)$ (Übung)).

(6.9) Lemma. *Sei $\sigma \in \Gamma_{k+1}$ eine Permutation und $l_\sigma \colon \Delta_k \to \Delta_k$ die Einschränkung der linearen Abbildung $\mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^{k+1}$ mit $l_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ $(i = 0, \ldots, k)$. Dann gilt: $l_\sigma(\dot{\Delta}_k) \subset \dot{\delta}_k$ und für $(l\sigma)_* \colon H_k(\Delta_k, \dot{\Delta}_k) \to H_k(\Delta_k, \dot{\Delta}_k)$ gilt:*

$$(l_\sigma)_*([\overline{\mathrm{id}}_k]) = \mathrm{sgn}(\sigma)[\overline{\mathrm{id}}_k].$$

Beweis. Für zwei Permutationen $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma_{k+1}$ gilt: $l_{\sigma_1\sigma_2} = l_{\sigma_1} \circ l_{\sigma_2}$, also

$$(l_{\sigma_1\sigma_2})_* = (l_{\sigma_1} \circ l_{\sigma_2})_* = (l_{\sigma_1})_* \circ (l_{\sigma_2})_*$$

und

$$\mathrm{sgn}(\sigma_1\sigma_2) = \mathrm{sgn}(\sigma_1)\,\mathrm{sgn}(\sigma_2).$$

Ist das Lemma für σ_1 und σ_2 richtig, so deshalb auch für $\sigma_1\sigma_2$:

$$\begin{aligned}(l_{\sigma_1\sigma_2})_*([\overline{\mathrm{id}}]) &= (l_{\sigma_1})_*(l_{\sigma_2})_*([\overline{\mathrm{id}}]) = (l_{\sigma_1})(\mathrm{sgn}(\sigma_2)[\overline{\mathrm{id}}]) \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma_2)(l_{\sigma_1})_*([\overline{\mathrm{id}}]) = \mathrm{sgn}(\sigma_2)\,\mathrm{sgn}(\sigma_1)[\overline{\mathrm{id}}] = \mathrm{sgn}(\sigma_1\sigma_2)[\overline{\mathrm{id}}].\end{aligned}$$

Da jede Permutation Produkt von Transpositionen ist, die nur Nachbarn austauschen, können wir annehmen, dass $\sigma = (i, i+1)$ mit $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ ist. Wir nehmen sogar an, dass $i = 0$ ist (sonst ähnlich), $\sigma = (0, 1) =: \tau$.

Betrachte nun das singuläre $(k+1)$-Simplex $c \colon \Delta_{k+1} \to \Delta_k$, welches linear ist und

$$c(e_0) = e_1,\ c(e_1) = e_0,\ c(e_i) = e_{i-1} \text{ für } i = 2, \ldots, k$$

erfüllt. Es ist dann

$$\partial c = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i c \circ \delta^i_{k+1} = \mathrm{id} + l_\tau + c'$$

mit einem $c' \in S_k(\dot{\Delta}_k)$ (weil $c(e_0) = c(e_2) = e_1$ ist). Es folgt:

$$\begin{aligned} & l_\tau = -\mathrm{id} + \partial c - c' \quad \text{in } S_k(\Delta_k) \\ \Longrightarrow\ & \overline{l_\tau} = -\overline{\mathrm{id}} + \partial \overline{c} \quad \text{in } Z_k(\Delta_k, \dot{\Delta}_k) \subseteq S_k(\partial_k, \dot{\Delta}_k) \\ \Longrightarrow\ & [\overline{l_\tau}] = -[\overline{\mathrm{id}}] \quad \text{in } H_k(\Delta_k, \dot{\Delta}_k) \\ \Longrightarrow\ & (l_\tau)_*([\overline{\mathrm{id}}]) = [\overline{(Sl_\tau)(\mathrm{id})}] = [\overline{l_\tau \circ \mathrm{id}}] = [\overline{l_\tau}] = -[\overline{\mathrm{id}}] = \mathrm{sgn}(\tau)[\overline{\mathrm{id}}]. \end{aligned}$$

□

(6.10) Kommentar. (a) Sei nun K ein simplizialer Komplex und $s = [v_0, \dots, v_k]$ ein orientierter k-Simplex von K. Für jeden Repräsentanten $(v_0, \dots, v_k) =: v$ von s betrachten wir die lineare Abbildung

$$l_v = l_{(v_0,\dots,v_k)} \colon \Delta_k \to |K|$$

mit

$$l_v(e_i) = v_i \quad (i = 0, \dots, k).$$

Dann ist $l_v(\Delta_k) \subseteq |K^k| = |K|^k$ und $l_v(\dot{\Delta}_k) \subseteq |K|^{k-1}$. l_v induziert damit einen Homomorphismus

$$l_s := (l_v)_* \colon H_k(\Delta_k, \dot{\Delta}_k) \to H_k(|K|^k, |K|^{k-1}) = C_k(|K|).$$

(b) Wir definieren nun $C(s) \in C_k(|K|)$ duch

$$C(s) := l_s([\overline{\mathrm{id}}]).$$

Dann hängt $C(s)$ wegen (6.9) nicht vom Repräsentanten v von s ab, denn ist v' ein weiterer Repräsentant, so gibt es eine gerade Permutation $\sigma \in \Gamma_{k+1}$ mit $l_{v'} = l_v \circ l_\sigma$. Also ist

$$(l_{v'})_*([\overline{\mathrm{id}}]) = (l_v)_* \underbrace{(l_\sigma)_*([\overline{\mathrm{id}}])}_{=[\overline{\mathrm{id}}]} = (l_v)_*([\overline{\mathrm{id}}]).$$

C setzt sich dann eindeutig zu einem Homomorphismus

$$C_k \colon C_k(K) \to C_k(|K|)$$

fort, denn

$$\tilde{C}(s + s^{-1}) = \tilde{C}(s) + \tilde{C}(s^{-1}) = l_s([\overline{\mathrm{id}}]) + l_{s^{-1}}([\overline{\mathrm{id}}]) = 0$$

(für die Fortsetzung $\tilde{C}$ auf $\tilde{C}_k(K) = \mathbb{F}$(orientierte k-Simplexe), vergleiche (3.7)(a)),

$$\begin{tikzcd}
\tilde{C}_k(K) \arrow[r, "\tilde{C}_k"] \arrow[d] & C_k(|K|) \\
C_k(K) \arrow[ur, dashed, "C_k"'] &
\end{tikzcd}$$

weil zwei Repräsentanten v von s und w von s^{-1} sich um eine ungerade Permutation σ unterscheiden,

$$l_v = l_w \circ l_\sigma$$

mit $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$. Es folgt:

$$(l_v)_*([\overline{\mathrm{id}}]) = (l_w)_* \underbrace{(l_\sigma)_*([\overline{\mathrm{id}}])}_{=[\overline{\mathrm{id}}]} = -(l_w)_*([\overline{\mathrm{id}}]).$$

(6.11) Satz. *Sei K ein simplizialer Komplex und $C := \big(C_k\colon C_k(K) \to C_k(|K|)\big)_{k\in\mathbb{N}_0}$ wie in (6.10)(b). Dann ist $C\colon C(K) \to C(|K|)$ eine Kettenabbildung und sogar ein Isomorphismus zwischen Kettenkomplexen.*

Beweis. (a) Versieht man jeden k-Simplex s von K mit einer Orientierung, so ist $l_s([\overline{\mathrm{id}}] \in H_k(|K|^k, |K|^{k-1})$ eine Orientierung der k-Zelle $\langle s\rangle$ von $\big(|K|, (|K|^k)\big)$, denn $l_v\colon \mathbb{B}^k \cong \Delta_k \to |K|^k$ ist eine charakteristische Abbildung für $\langle s\rangle$ (wo v ein Repräsentant für s (und $(\mathbb{B}^k, \mathbb{S}^{k-1}) \to (\Delta_k, \dot{\Delta}_k)$ ein fest gewählter Homöomorphismus) sei). $C_k\colon C_k(K) \to C_k(|K|)$ bildet damit eine Basis von $C_k(K)$ – nämlich die so orientierten k-Simplexe von K – in eine Basis von $C_k(|K|)$ – nämlich die so orientierten k-Zellen von $|K|$ – ab, ist also Isomorphismus.

(b) C ist eine Kettenabbildung:

Sei dazu $s = \langle v_0, \dots, v_k\rangle$ ein orientierter k-Simplex und $v = (v_0, \dots, v_k)$ ein Repräsentant. Dann ist

$$\begin{aligned}\partial \circ C(s) &= \partial(l_s[\overline{\mathrm{id}}]) = \overline{\partial\big((l_v)_*([\overline{\mathrm{id}}])\big)} = \partial([\overline{l_v \circ \mathrm{id}}]) = \partial([\overline{l_v}]) \\ &= [\overline{\partial(l_v)}] = \Big[\overline{\sum_{i=0}^{k}(-1)^i l_v \circ \delta_k^i}\Big] = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i[\overline{l_v \circ \delta_k^i}]\end{aligned}$$

Aber

$$l_v \circ \delta_k^i = l_{(v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_k)} \quad (i = 0, \dots, k)$$

und daher ist

$$\begin{aligned}C \circ \partial(s) &= C\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\,\langle v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k\rangle\right) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C(\langle v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k\rangle) \\ &\overset{\text{wie oben}}{=} \sum_{i=0}^{k}(-1)^i[\overline{l_{(v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_k)}}] = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i[\overline{l_v \circ \delta_k^i}] \\ &= \partial \circ C(s).\end{aligned}$$

Also ist $C \circ \partial(v) = \partial \circ C(v)$ für alle $v \in C_k(K)$, das ist: $C\partial = \partial e$.

□

(6.12) Kommentar. (a) Insbesondere induziert daher $C^k := C : C(K) \to C(|K|)$ einen Isomorphismus zwischen der simplizialen Homologie von K und der zellulären Homologie von $|K|$,

$$C_*^K\colon H(K) \xrightarrow{\cong} H\big(C(|K|)\big).$$

(b) Betrachtet man für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die beiden Funktoren $F_1, F_2\colon \mathbf{SK} \to \mathbf{Ab}$,

$$F_1 = H_k,\ F_2 = H_k \circ C \circ |\cdot|,$$

so ist $C_* = (C_*^K)_{K\in\mathrm{Ob}(\mathbf{SK})}$ eine natürliche Transformation zwischen F_1 und F_2, also: Ist $\varphi\colon K \to L$ simplizial, so kommutiert:

$$\begin{tikzcd} H_k(K) \arrow[r, "C_*^K"] \arrow[d, "H_k(\varphi)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_k\big(C(|K|)\big) \arrow[d, "H_k(|\varphi|)"] \\ H_k(L) \arrow[r, "C_*^L"'] & H_k\big(C(|L|)\big) \end{tikzcd}$$

(Übung; sogar $C = \big(C^K\colon C(K) \to C(|K|)\big)$ ist schon eine von $F_1, F_2\colon \mathbf{SK} \to \mathbf{KK}, F_1 = C, F_2 = C \circ |\cdot|$.)

(c) Schaltet man nun die natürliche Transformation $\Phi^{-1} = \big(\Phi^{-1}(X)\big)_{X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CW})}$, also

$$\Phi_k^{-1}(K)\colon H_k\big(C(|K|)\big) \to H_k(|K|)$$

dahinter, so erhält man mit $\mathcal{H} := \Phi^{-1} \circ C_*$ eine natürliche Transformation von $F_1 = H_k$ nach $F_2 = H_k \circ |\cdot|$, $F_1, F_2\colon \mathbf{SK} \to \mathbf{Top}$, die für jeden simplizialen Komplex K ein Isomorphismus ist (vergleiche (3.13)),

$$\mathcal{H}(K)\colon H_k(K) \xrightarrow{\cong} H_k(|K|).$$

(6.13) Vorbereitung. Sei K ein simplizialer Komplex. Man kann dann eine Kettenabbildung zwischen $C(K)$ und $S(|K|)$ bekommen, die $\mathcal{H}(K)$ in der Homologie induziert, wenn man eine *totale Ordnung* ω auf K^0 wählt.

Dann nimmt man nämlich für jeden orientierten k-Simplex $s = [v_0, \ldots, v_k]$ den eindeutig bestimmten Repräsentanten $v = (v_0, \ldots, v_k)$ mit $v_0 < v_1 < \cdots < v_k$. Setzt man dann

$$C_k(\omega)\colon C_k(K) \to S_k(|K|), C_k(\omega)(s) := l_v,$$

wo $l_v\colon \Delta_k \to |K|$ linear sei und durch $l_v(e_i) = v_i$ $(i = 0, \ldots, k)$ definiert ist. So erhält man dann eine Kettenabbildung $C(\omega) = \big(C_k(\omega)\big)$ von $C(K)$ nach $S(|K|)$ (Beweis ähnlich wie in (6.11)).

(6.14) Korollar. *Es gilt dann für $C(\omega)_*\colon H(K) \to H(|K|)$:*

$$C(\omega)_* = \mathcal{H}.$$

$C(\omega)_*$ ist also ein Isomorphismus und unabhängig von ω.

Beweis. Ist $\Phi_k\colon H_k(|K|) \to H_k\big(C(|K|)\big)$ wie in (6.7), so müssen wir also

$$\Phi_k \circ C(\omega)_* = C_*$$

prüfen. Mit den Inklusionen $i^k\colon X^k \hookrightarrow X$ und $j^k\colon X^k \hookrightarrow (X^k, X^{k-1})$ ist für jeden simplizialen k-Zyklus $z \in Z_k(K)$, $z = \sum_{i=0}^r n_i s_i$, und v_i dem geordneten Repräsentanten von s_i:

$$\Phi_k \circ C(\omega)_*([z]) = \sum_{i=0}^r n_i \Phi_k([l_{v_i}]_X) = \sum_{i=0}^r n_i \big[[\overline{l_{v_i}}]_{(X^k, X^{k-1})}\big],$$

wenn man l_{v_i} zunächst als singuläres Simplex in X^k auffasst und dann als relative Homologieklasse in $H_k(X^k, X^{k-1})$ $(X := |K|)$,

$$[l_{v_i}]_X = i_*^k([l_{v_i}]_{X^k}),$$
$$[\overline{l_{v_i}}]_{(X^k,X^{k-1})} = j_*^k([l_{v_i}]_{X^k}).$$

Aber

$$[\overline{l_{v_i}}] = [\overline{l_{v_i} \circ \mathrm{id}}] = (l_{v_i})_*([\overline{\mathrm{id}}]) = C_k(s_i)$$

und damit

$$\Phi_k \circ C(\omega)_*([z]) = \sum_{i=0}^{r} n_i[C_k(s_i)] = [C_k(z)] = C_*([z]).$$

□

(6.15) Definition. Sei X ein topologischer Raum.

(a) Sind alle Homologiegruppen $H_k(X)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ endlich erzeugt, so nennen wir

$$b_k(X) := \mathrm{rg}\,\big(H_k(X)\big)$$

die *k-te (topologische) Betti-Zahl* von X (und ähnlich für die Torsionskoeffizienten von $H_k(X)$).

(b) Sind zudem nur endlich viele Homologiegruppen nicht-trivial, also $H_k(X) = (0)$ für fast alle $k \in \mathbb{N}_0$, so heißt

$$\chi(X) := \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_i(X)$$

die *(topologische) Euler-Charakteristik von X.*

(6.16) Korollar. *(a) Sei K ein simplizialer Komplex. Dann gilt für die kombinatorischen beziehungsweise topologischen Betti-Zahlen und damit auch für die kombinatorische beziehungsweise topologische Euler-Charakteristik von $|K|$:*

$$b_k(K) = b_k(|K|), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$
$$\chi(K) = \chi(|K|).$$

(b) Ist $\big(X, (X^k)\big)$ ein endlicher CW-Komplex und $\mathcal{Z}$ eine Zellzerlegung für (X^k) mit α_k k-Zellen $(k \in \mathbb{N}_0)$, so gilt für die zelluläre Euler-Charakteristik $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\alpha_i$*:*

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \alpha_i.$$

Beweis. (a) Wenn die Homologiegruppen $H_k(K)$ und $H_k(|K|)$ isomorph sind, so insbesondere ihre Ränge (und $H_k(K)$ ist endlich erzeugt),

$$b_k(K) = \operatorname{rg}\big(H_k(K)\big) = \operatorname{rg}\big(H_k(|K|)\big) = b_k(|K|).$$

(Gleiches gilt natürlich auch für die Torsionskoeffizienten $n_1^k, \dots, n_{r_k}^k$.)

Da $\chi(K) = \sum_i (-1)^i b_i(K)$ ist (siehe (3.16)), folgt auch $\chi(K) = \chi(|K|)$.

(b) Der Beweis von (3.16) zeigt, dass die Euler-Charakteristik $\chi(C)$ eines *endlich erzeugten Kettenkomplexes* (das heißt: $C_k(X)$ endlich erzeugt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $C_k(X) = 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}_0$) mit der zugehörigen Homologie $\chi\big(H(C)\big)$ übereinstimmt,

$$\chi\big(H(C)\big) = \sum (-1)^i \operatorname{rg}\big(H_i\big(C(X)\big)\big) = \sum (-1)^i \operatorname{rg}\big(C_i(X)\big) = \chi(C).$$

Es folgt wegen $H\big(C(X)\big) \cong H(X)$:

$$\begin{aligned}\sum_i (-1)^i \alpha_i &= \sum_i (-1)^i \operatorname{rg}\big(C_i(X)\big) = \sum_i (-1)^i \operatorname{rg}\big(H_i\big(C(X)\big)\big)\\ &= \sum_i (-1)^i \operatorname{rg}\big(H_i(X)\big) = \chi(X).\end{aligned}$$

□

(6.17) Kommentar. (a) Gilt für zwei simpliziale Komplexe K und L also $|K| \cong |L|$ (vergleiche (3.13)), so ist tatsächlich

$$H(K) \cong H(L).$$

(b) Auch hängt die zelluläre Homologie eines CW-Raumes $\big(X, (X^k)\big)$ nur von X ab und nicht von der CW-Struktur (X^k).

(c) Klassisch nennt man einen Teilraum $X \subseteq \mathbb{R}^3$ einen *konvexen Polyeder*, wenn er Vereinigung von ebenen Dreiecken ist (genauer: $X \cong \pi(|K|)$ für einen 2-dimensionalen simplizialen Komplex K und einer linearen Projektion $\pi\colon |K| \xrightarrow{\cong} X$), und wenn X Rand eines konvexen Kompaktums $A \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $\mathring{A} \neq \emptyset$ ist, $X = \partial A$.

(6.18) Korollar (Eulerscher Polyedersatz)**.** *Für jeden konvexen Polyeder $X \subseteq \mathbb{R}^3$ mit α_0 Ecken, α_1 Kanten und α_2 Flächen gilt:*

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2.$$

Beweis. Sei $X \cong |K|$ für einen 2-dimensionalen simplizialen Komplex K. Es ist dann $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \chi(K)$.

Sei ohne Einschränkung $p = 0 \in \mathring{A}$ (sonst verschiebe X). Dann ist $X \cong \mathbb{S}^2$ vermöge $X \to \mathbb{S}^2, x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ (Übung). Aber $b_0(\mathbb{S}^2) = 1$, $b_1(\mathbb{S}^2) = 0$ und $b_2(\mathbb{S}^2) = 1$ (und $b_k(\mathbb{S}^2) = 0$ sonst). Es folgt:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \chi(K) = \chi(|K|) = \chi(\mathbb{S}^2) = 1 - 0 + 1 = 2.$$

□

7 Axiomatische Homologietheorie

(7.1) Definition. Eine *(axiomatische) Homologietheorie auf der Kategorie der topologischen Paare* (H, ∂) besteht aus einer Familie $H = (H_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ von Funktoren $H_k\colon \mathbf{Top_2} \to \mathbf{Ab}$ und aus einer Familie $\partial = (\partial_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von natürlichen Transformationen ∂_k zwischen $H_k, F_k\colon \mathbf{Top_2} \to \mathbf{Ab}$,

$$F_k(X, A) = H_{k-1}(A, \emptyset) =: H_{k-1}(A)$$
$$F_k\big(f\colon (X, A) \to (Y, B)\big) = H_{k-1}\big(f(A)\colon H_{k-1}(A) \to H_{k-1}(B)\big),$$

so dass gilt:

(a) Sind $f, g\colon (X, A) \to (Y, B)$ homotop, so ist $H_k(f) = H_k(g)\colon H_k(X, A) \to H_k(Y, B)$ fpr alle $k \in \mathbb{N}_0$ (*Homotopieaxiom*);

(b) Ist (X, A) ein Raumpaar und sind $i\colon A \hookrightarrow X$ und $j\colon X \hookrightarrow (X, A)$ die Inklusionen, so ist folgende lange Sequenz abelscher Gruppen exakt (*Exaktheits-Axiom*):

$$\ldots \longrightarrow H_k(A) \xrightarrow{H_k(i)} H_k(X) \xrightarrow{H_k(j)} H_k(X, A) \xrightarrow{\partial_k(X,A)} H_{k-1}(A) \longrightarrow \ldots$$

(c) Ist (X, A) ein Raumpaar und ist $U \subseteq A$ mit $\overline{U} \subseteq \mathring{A}$, so induziert die Inklusion $i\colon (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ einen Isomorphismus in der Homologie (*Ausschneidungsaxiom*),

$$H_k(i)\colon H_k(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\cong} H_k(X, A), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

(d) Für den einpunktigen Raum pt gilt (*Dimensionsaxiom*):

$$H_k(\mathrm{pt}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(7.2) Kommentar. (a) Ähnlich könnte man den Begriff der Homologietheorie auf den Paaren simplizialer Komplexe $\mathbf{SK_2}$ oder den CW-Paaren $\mathbf{CW_2}$ definieren.

(b) Die singuläre Homologietheorie (H, ∂) auf $\mathbf{Top_2}$ ist damit eine Homologietheorie im Sinne von (6.19). Die simpliziale Homologietheorie (H, ∂) und ebenso die Komposition $(H \circ |\cdot|, \partial \circ |\cdot|)$ sind Homologietheorien auf $\mathbf{SK_2}$. Die zelluläre Homologietheorie $(H \circ C, \partial \circ C)$ und ebenso die singuläre Theorie $(H \circ V, \partial \circ V)$, wo $V\colon \mathbf{CW_2} \to \mathbf{Top_2}$ die CW-Struktur vergisst (*Vergiss-Funktor*), sind Homologietheorien auf $\mathbf{CW_2}$ (Übung).

(7.3) Satz (Die lange exakte Tripel-Sequenz)**.** *Sei (X,A,B) ein Raumtripel, $i\colon (A,B)\hookrightarrow (X,B)$, $j\colon (X,B)\hookrightarrow (X,A)$ und $k\colon A\hookrightarrow (A,B)$ die Inklusionen und (H,∂) eine Homologietheorie auf* $\mathbf{Top_2}$. *Dann ist die folgende lange Sequenz abelscher Gruppen exakt:*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A,B) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X,B) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X,A) \xrightarrow{H_{n-1}(k)\circ\partial_(X,A)} H_{n-1}(A,B) \longrightarrow \cdots$$

Beweis. Exaktheit bei $H_n(A,B)$:

(i) im $\big(H_n(k)\circ\partial_{n+1}(X,A)\big)\subseteq \ker\big(H_n(i)\big)$:

Seien $l\colon X\hookrightarrow (X,B)$ und $m\colon A\hookrightarrow X$ die Inklusionen. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{k} & (A,B) \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ X & \xrightarrow{l} & (X,B) \end{array}$$

Wegen der Funktorialität von H_n ist daher

$$H_n(i)\circ H_n(k) = H_n(l)\circ H_n(m).$$

Wegen der Exaktheit der Paarsequenz

$$\ldots \longrightarrow H_{n+1}(X,A) \overset{\partial_{n+1}(X,A)}{\longrightarrow} H_n(A) \overset{H_n(m)}{\longrightarrow} H_n(X) \longrightarrow \ldots$$

ist $H_n(m)\circ\partial_{n+1}(X,A)=0$. Also ist

$$H_n(i)\circ H_n(k)\circ\partial_{n+1}(X,A) = H_n(l)\circ \underbrace{H_n(m)\circ\partial_{n+1}(X,A)}_{=0} = 0.$$

(ii) $\ker\big(H_n(i)\big)\subseteq$ im $\big(H_n(k)\circ\partial_{n+1}(X,A)\big)$: Übung.

Exaktheit bei $H_n(X,B)$ und $H_n(X,A)$ Übung. □

(7.4) Kommentar. Weil man im Beweis von (1.20) nur die Exaktheit der Tripel-Sequenz und den Ausschneidungssatz verwendet hat, gilt nun auch für eine allgemeine Homologietheorie (H,∂) auf $\mathbf{Top_2}$:

(7.5) Satz. *Sei X ein toplogischer Raum und $A\subseteq X$ ein starker Umgebungs-Deformationsretrakt. Dann induziert die Projektion $\pi\colon (X,A)\to (X/A,[A])$ einen Isomorphismus in der Homologie,*

$$H_k(\pi)\colon H_k(X,A) \overset{\cong}{\longrightarrow} H_k(X/A,[A]),\quad \forall k\in\mathbb{N}_0.$$

Beweis. vergleiche (1.20). □

(7.6) Kommentar. (a) Man nennt ein stetiges $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ einen *relativen Homöomorphismus*, wenn $f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus B$ ist und

$$f|(X \setminus A)\colon X \setminus A \to Y \setminus B$$

ein Homöomorphismus ist.

(b) Ist X kompakt, $A \subseteq X$ abgeschlossen und starker Umgebungs-Deformationsretrakt, ist auch Y kompakt, $B \subseteq Y$ abgeschlossen und starker Umgebungs-Deformationsretrakt, und ist $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ ein relativer Homöomorphismus, so ist das induzierte

$$H_k(f)\colon H_k(X,A) \to H_k(Y,B), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

für jede Homologietheorie (H,∂) auf $\mathbf{Top_2}$ ein Isomorphismus. Es ist nämlich das induzierte

$$\overline{f}\colon (X/A,[A]) \to (Y/B,[B])$$

zunächst stetig und bijektiv. Weil aber X/A kompakt und Y/B hausdorffsch sind (Übung), folgt: $\overline{f}$ ist sogar Homöomorphismus. Dann folgt die Isomorphie von $H_k(f)$ aus (7.5) und der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
H_k(X,A) \arrow[r, "H_k(f)"] \arrow[d, "H_k(\pi^{(X,A)})"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_k(Y,B) \arrow[d, "H_k(\pi^{(Y,B)})", "\cong"'] \\
H_k(X/A,[A]) \arrow[r, "H_k(\overline{f})", "\cong"'] & H_k(Y/B,[B])
\end{tikzcd}$$

(7.7) Definition. Seien (H,∂) und (H',∂') zwei Homologietheorien auf $\mathbf{Top_2}$. Ein *Homomorphismus* $\Phi\colon (H,\partial) \to (H',\partial')$ ist eine Familie $\Phi = (\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ natürlicher Transformationen Φ_k von H_k nach H'_k, so dass für alle Raumpaare (X,A) und alle $k \in \mathbb{N}_0$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
H_k(X,A) \arrow[r, "\Phi_k(X,A)"] \arrow[d, "\partial_k(X,A)"'] & H'_k(X,A) \arrow[d, "\partial'_k(X,A)"] \\
H_{k-1}(A) \arrow[r, "\Phi_{k-1}(A)"] & H'_{k-1}(A)
\end{tikzcd}$$

(7.8) Satz. *Seien (H,∂) und (H',∂') zwei Homologietheorien auf* $\mathbf{Top_2}$ *und sei $\Phi\colon (H,\partial) \to (H',\partial')$ ein Homomorphismus, so dass $\Phi_0(\mathrm{pt})\colon H_0(\mathrm{pt}) \to H'_0(\mathrm{pt})$ ein Isomorphismus ist. Dann gilt für alle* Polyederpaare *(X,A) und alle $k \in \mathbb{N}_0$, dass auch*

$$\Phi_k(X,A)\colon H_k(X,A) \to H'_k(X,A)$$

ein Isomorphismus ist.

Beweis. Ein Polyederpaar (X, A) ist ein Raumpaar, so dass es ein Paar simplizialer Komplexe (K, L) (das heißt: L ist ein Teilkomplex von K) gibt und einen Homöomorphismus $f\colon (|K|, |L|) \to (X, A)$.

(a) Wir können annehmen, dass $A = \emptyset$ ist, denn gilt die Aussage für die absolute Homologie von X und A, so folgt aus dem Exaktheitsaxiom und dem Fünferlemma die Aussage auch für (X, A),

$$\begin{tikzcd} H_k(A) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_k(A)"', "\cong"] & H_k(X) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_k(X)"', "\cong"] & H_k(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_k(X,A)"] & H_{k-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "\Phi_{k-1}(A)"] & H_{k-1}(X) \arrow[d, "\cong"', "\Phi_{k-1}(X)"] \\ H'_k(A) \arrow[r] & H'_k(X) \arrow[r] & H'_k(X,A) \arrow[r] & H'_{k-1}(A) \arrow[r] & H'_{k-1}(X) \end{tikzcd}$$

(b) Sei $X := |K|$. Induktion nach $r := \#K$:

$r = 1$: Es gilt $X = \mathrm{pt}$, also gilt

$$\Phi_k(\mathrm{pt})\colon H_k(\mathrm{pt}) \to H'_k(\mathrm{pt})$$

ist Isomorphismus nach dem Dimensionsaxiom und der Voraussetzung für $\Phi_0(\mathrm{pt})$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$.

$r \curvearrowright r+1$: Sei $n = \dim K$ und $s \in K$ mit $\dim s = n$. Betrachte dann $L := K \setminus \{s\}$. Es reicht nun zu zeigen, dass

$$\Phi(|K|, |L|)\colon H(|K|, |L|) \to H'(|K|, |L|)$$

ein Isomorphismus ist, denn $\#L = r$ und $\Phi(|L|)$ ist deshalb nach Induktionsvoraussetzung ein Isomorphismus. Die Aussage liefert dann wieder das Exaktheitsaxiom und das Fünferlemma,

$$\begin{tikzcd} H_{k+1}(|K|,|L|) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_{k+1}(|K|,|L|)"', "\cong"] & H_k(|L|) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_k(|L|)"', "\cong"] & H_k(|K|) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_k(|K|)"] & H_k(|K|,|L|) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "\Phi_k(|K|,|L|)"] & H_{k-1}(|L|) \arrow[d, "\cong"', "\Phi_{k-1}(|L|)"] \\ H'_{k+1}(|K|,|L|) \arrow[r] & H'_k(|L|) \arrow[r] & H'_k(|K|) \arrow[r] & H'_k(|K|,|L|) \arrow[r] & H'_{k-1}(|L|) \end{tikzcd}$$

(c) Es ist nun die Inklusion $i\colon (|s|, |\dot{s}|) \hookrightarrow (|K|, |L|)$ ein relativer Homöomorphismus, denn

$$|K| \setminus |L| = \langle s \rangle = |s| \setminus |\dot{s}|.$$

Da $(|s|, |\dot{s}|)$ und $(|K|, |L|)$ die Voraussetzungen von (7.6)(b) erfüllen, sind $H_k(i)$ und $H'_k(i)$ Isomorphismen. Da Φ_k eine natürliche Transformation ist, reicht es zu zeigen, dass $\Phi_k(|s|, |\dot{s}|)$ ein Isomorphismus ist (also $X = \mathbb{B}^n$ und $A = \mathbb{S}^{n-1}$),

$$
\begin{tikzcd}
H_k(|s|,|\dot{s}|) \arrow[r, "H_k(i)", "\cong"'] \arrow[d, "\Phi_k(|s|,|\dot{s}|)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_k(|K|,|L|) \arrow[d, "\Phi_k(|K|,|L|)"] \\
H'_k(|s|,|\dot{s}|) \arrow[r, "\cong", "H'_k(i)"'] & H'_k(|K|,|L|)
\end{tikzcd}
$$

(d) Induktion nach $n = \dim s$:

$n = 0$: Es gilt $(\mathbb{B}^0, \mathbb{S}^{n-1}) = (\mathrm{pt}, \emptyset) = \mathrm{pt}$. Also ist $\Phi(|s|, |\dot{s}|)$ Isomorphismus (nach Dimensionsaxiom und Voraussetzung).

$n \curvearrowright n{+}1$: Da $\mathbb{B}^{n+1} \cong \mathrm{pt}$ ist, liefert das Homotopieaxiom, dass $\Phi(\mathbb{B}^{n+1})\colon H(\mathbb{B}^{n+1}) \to H'(\mathbb{B}^{n+1})$ ein Isomorphismus ist. Da $\dim \dot{s} = n$ ist liefert die Induktionsvoraussetzung (zusammen mit (c) und (b): Gilt die Aussage (d) für n, so zeigt (c) und (b), dass $\Phi(|K|)$ ein Isomorphismus ist, falls $\dim K = n$ ist.), dass $\Phi(\mathbb{S}^n)$ ein Isomorphismus ist. Das Exaktheitsaxiom und das Fünferlemma implizieren dann die Isomorphie von $\Phi(\mathbb{B}^{n+1}, \mathbb{S}^n)$,

$$
\begin{tikzcd}
H_k(\mathbb{S}^n) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_k(\mathbb{S}^n)"', "\cong"] & H_k(\mathbb{B}^{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_k(\mathbb{B}^{n+1})"', "\cong"] & H_k(\mathbb{B}^{n+1}, \mathbb{S}^n) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_k(\mathbb{B}^{n+1}, \mathbb{S}^n)"] & H_{k-1}(\mathbb{S}^n) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "\Phi_{k-1}(\mathbb{S}^n)"] & H_{k-1}(\mathbb{B}^{n+1}) \arrow[d, "\cong"', "\Phi_{k-1}(\mathbb{B}^{n+1})"] \\
H'_k(\mathbb{S}^n) \arrow[r] & H'_k(\mathbb{B}^{n+1}) \arrow[r] & H'_k(\mathbb{B}^{n+1}, \mathbb{S}^n) \arrow[r] & H'_{k-1}(\mathbb{S}^n) \arrow[r] & H'_{k-1}(\mathbb{B}^{n+1})
\end{tikzcd}
$$

□

(7.9) Kommentar. (a) Das gibt einen alternativen Beweis für die Isomorphie von $H(K)$ und $H(|K|)$ für einen simplizialen Komplex K (vergleiche (3.13)). Ist nämlich ω eine Ordnung auf K^0, so ist

$$C(\omega)_*\colon (H, \partial) \to (H \circ |\cdot|, \partial \circ |\cdot|)$$

ein Homomorphismus zwischen Homologietheorien auf $\mathbf{SK_2}$, so dass $C(\omega)_0(\mathrm{pt})\colon H_0(\mathrm{pt}) \to H_0(|\mathrm{pt}|)$ (für den einpunktigen simplizialen Komplex pt) ein Isomorphismus ist.

(b) Ein Satz von Eilenberg-Steenrod (1952) besagt, dass es zu je zwei Homologietheorien (H, ∂) und (H', ∂') auf $\mathbf{Top_2}$ und einem Homomorphismus $\Phi_0\colon H_0(\mathrm{pt}) \to H'_0(\mathrm{pt})$ genau einen Homomorphismus $\Phi\colon (H, \partial) \to (H', \partial')$ mit $\Phi(\mathrm{pt}) = \Phi_0$ gibt, wenn man (H, ∂) und (H', ∂') auf die Unterkategorie der Polyederpaare einschränkt. (Daraus folgt natürlich sofort (7.8).)

8 Homologie mit Koeffizienten

(8.1) Motivation. (a) Homologie mit Koeffizienten in einer festen abelschen Gruppe G wird aus Kettenkomplexen gebildet, in der die Kettengruppen direkte Summen von Kopien von G (nicht von $\mathbb{Z}$) sind, ihre Elemente also formale Linearkombinationen

$$c = g_1\sigma_1 + \cdots + g_r\sigma_r,$$

mit $r \in \mathbb{N}_0$, $g_j \in G$ und (in der singulären Theorie) singuläre k-Simplexen σ_j ($j = 1, \ldots, r$).

(b) So bekommt man etwa bei der Koeffizentengruppe $G = \mathbb{Z}_2$ aus (5.9)(e), dass für den Randoperator ∂ des zellulären Kettenkomplexes von $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}_0$) mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_2$ gilt: $\partial = 0$. Das führt dann zu:

$$H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{für } k = 0, \ldots, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(8.2) Definition. Seien A und B abelsche Gruppen. Wir nennen ein Paar (T, t) bestehend aus einer abelschen Gruppe T und einer bilinearen Abbildung $t\colon A \times B \to T$ ein *Tensorprodukt von A und B*, wenn (folgende *universelle Eigenschaft*) gilt: Ist (C, s) ein weiteres Paar, so existiert genau ein Homomorphismus $\Phi\colon T \to C$ mit $\Phi \circ t = s$,

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \\ T \arrow[ur, dashed, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

(8.3) Kommentar. (a) Ein Tensorprodukt (T, t) ist – wenn es existiert – durch (7.2) in folgendem Sinn eindeutig bestimmt: Sind (T_1, t_1) und (T_2, t_2) zwei Tensorprodukte, so gibt es einen (sogar eindeutig bestimmten) Isomorphismus $\Phi\colon T_1 \to T_2$ mit $\Phi \circ t_1 = t_2$ (Übung),

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "t_1"'] \arrow[dr, "t_2"] & \\ T_1 \arrow[rr, "\cong", "\Phi"'] & & T_2 \end{tikzcd}$$

(b) Die Existenz sieht man so: Bilde zunächst die abelsche Gruppe $\mathbb{F}(A \times B)$ und betrachte darin die Untergruppe R, die von allen Elementen

$$(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b), \qquad (*)$$
$$(a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2),$$

mit $a, a_1, a_2 \in A$ und $b, b_1, b_2 \in B$, erzeugt wird. Ist $i\colon A \times B \hookrightarrow \mathbb{F}(A \times B)$ die kanonische Inklusion und $\pi\colon \mathbb{F}(A \times B) \to \mathbb{F}(A \times B)/R$ die kanonische Projektion, so setze man

$$\begin{aligned} A \otimes B &:= \mathbb{F}(A \times B)/R, \\ \otimes &:= \pi \circ i\colon A \times B \to A \otimes B. \end{aligned}$$

Es ist dann $A \otimes B$ sicher eine abelsche Gruppe und $\otimes\colon A \times B \to A \otimes B, (a, b) \mapsto a \otimes b := \otimes(a, b)$, bilinear, denn

$$(a_1 + a_2) \otimes b - a_1 \otimes b - a_2 \otimes b = \pi\big((a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b)\big) = 0$$

und ähnlich sieht man:

$$a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2.$$

Beachte auch, dass für alle $a \in A, b \in B$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a \otimes (nb) = (na) \otimes b = n(a \otimes b)$$

(Übung).

Die universelle Eigenschaft folgt auch: Ist $s\colon A \times B \to C$ bilinear, so existiert zunächst nach der universellen Eigenschaft des Paares $(\mathbb{F}(A \times B), i)$ ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $\tilde{\Phi}\colon \mathbb{F}(A \times B) \to C$ mit $\tilde{\Phi} \circ i = s$,

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "s"] \arrow[d, "i"'] & C \\ \mathbb{F}(A \times B) \arrow[ur, dashed, "\tilde{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

Da $\tilde{\Phi}|R = 0$ ist (wegen $(*)$ und da s bilinear ist), existiert nach der universellen Eigenschaft des Quotienten $(\mathbb{F}(A \times B)/R, \pi)$ genau ein Homomorphismus $\Phi\colon A \otimes B \to C$ mit $\Phi \otimes \pi = \tilde{\Phi}$,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}(A \times B) \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \\ A \otimes B \arrow[ur, dashed, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

Φ existiert also und ist auch eindeutig, denn kommutiert das folgende (äußere) Diagramm, so auch das obige Teildiagramm,

$$
\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "s"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowleft"] & \\
\mathbb{F}(A \times B) \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] \arrow[d, "\pi"'] & C \\
A \otimes B \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}
$$

(c) Jedes Element $t \in A \otimes B$ hat damit eine Darstellung

$$t = a_1 \otimes b_1 + \ldots a_r \otimes b_r$$

mit $r \in \mathbb{N}_0$, $a_i \in A$, $b_i \in B$ $(i = 1, \ldots, r)$, denn $\mathbb{F}(A \times B)$ wird von $\operatorname{im}(i)$ erzeugt und π ist surjektiv. Beachte aber, dass die Darstellung im Allgemeinen keineswegs eindeutig ist.

(8.4) Definition. Seien $f\colon A \to A'$ und $g\colon B \to B'$ Homomorphismen zwischen abelschen Gruppen. Dann wird durch

$$h(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b) \tag{$*$}$$

ein Homomorphismus $h\colon A \otimes B \to A' \otimes B'$ definiert, den wir mit $h := f \otimes g$ bezeichnen.

(8.5) Kommentar. (a) $f \otimes g$ ist eindeutig durch die Bedingung $(*)$ tatsächlich wohldefiniert und eindeutig bestimmt. Betrachte dazu nämlich die bilineare Abbildung $H\colon A \times B \to A' \otimes B'$,

$$H(a, b) = f(a) \otimes g(b).$$

Nach der universellen Eigenschaft von $(A \otimes B, \otimes)$ gibt es genau einen Homomorphismus $h\colon A \otimes B \to A' \otimes B'$ mit $h \circ \otimes = H$, das heiß:

$$
\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "f \times g"] \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "H"] \arrow[dr, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\circlearrowleft"] & A' \times B' \arrow[d, "\otimes"] \\
A \otimes B \arrow[r, dashed, "h"'] & A' \otimes B'
\end{tikzcd}
$$

(b) Sind $f'\colon A' \to A''$ und $g'\colon B' \to B''$ weitere Homomorphismen, so gilt (offenbar)

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g),$$

insbesondere ist

$$f \otimes g = (f \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes g).$$

Hält man daher einen Faktor $G \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Ab})$ fest, so erhält man durch $F\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$,

$$F(A) := A \otimes G,\ F(f) = f \otimes \mathrm{id}_G$$

einen (covarianten) Funktor.

($F\colon \mathbf{Ab}\times\mathbf{Ab}\to\mathbf{Ab}, (A,B)\mapsto A\otimes B, (f,g)\mapsto f\otimes g$, ist ein *Bifunktor*, in beiden Argumenten covariant.)

(8.6) Bemerkung. *Seien A_1, A_2 und G abelsche Gruppen. Dann definiert die Zuordnung*

$$\Phi\big((a_1,a_2)\otimes g\big) = (a_1\otimes g, a_2\otimes g) \qquad (*)$$

einen Isomorphismus zwischen $(A_1\oplus A_2)\otimes G$ und $(A_1\otimes G)\oplus(A_2\otimes G)$.

Beweis. Wieder ist $\tilde{\Phi}\colon (A_1\oplus A_2)\times G\to(A_1\otimes G)\oplus(A_2\otimes G)$,

$$\tilde{\Phi}\big((a_1,a_2),g\big) = (a_1\otimes g, a_2\otimes g)$$

bilinear und daher $\Phi\colon (A_1\oplus A_2)\otimes G\to(A_1\otimes G)\oplus(A_2\otimes G)$ durch $(*)$ wohldefiniert.

Ebenso ist $\Psi\colon (A_1\otimes G)\oplus(A_2\otimes G)\to(A_1\oplus A_2)\otimes G$ durch

$$\Psi(a_1\otimes g_1, a_2\otimes g_2) = (a_1,0)\otimes g_1 + (0,a_2)\otimes g_2$$

wohldefiniert und es gilt:

$$\Psi\circ\Phi = \mathrm{id},\ \ \Phi\circ\Psi = \mathrm{id}\,.$$

Also ist Φ ein Isomorphismus. □

(8.7) Beispiel. (a) Ähnlich wie in (8.6) sieht man, dass $A\otimes B\cong B\otimes A$ ist (vermöge $a\otimes b\mapsto b\otimes a$).

(b) Für alle abelschen Gruppen A ist

$$A\otimes\mathbb{Z}\cong A$$

vermöge $a\otimes n\mapsto na$ (ind Inversem $a\mapsto a\otimes 1$). ($na := a+\cdots+a$, n-mal, für $n>0$; $0a:=0$, $na := -a-\cdots-a$, $(-n)$-mal für $n<0$.)

(c) Ist G ein Körper und A abelsche Gruppe, so hat $A\otimes G$ sogar die Struktur eines G-Vektorraums vermöge

$$g'\cdot(a\otimes g) := a\otimes(g'g).$$

(d) Ist $A=\mathbb{Z}^r$, so ist deshalb $A\otimes G\cong G^r$, denn

$$A\otimes G = \mathbb{Z}^r\otimes G \overset{(8.6)}{=} (\mathbb{Z}\otimes G)^r \cong G^r.$$

(e) Ist A eine *Torsionsgruppe*, das heißt $\forall a \in A\ \exists n \in \mathbb{N}\colon na = 0$, und G ein Körper der Charakteristik 0, so gilt

$$A \otimes G = 0,$$

denn ist $a \in A$ beliebig und $n \in \mathbb{N}$ mit $na = 0$, so ist

$$a \otimes 1 = a \otimes (n \cdot \frac{1}{n} = (\underbrace{na}_{=0}) \otimes \frac{1}{n} = 0 \otimes \frac{1}{n} = 0,$$

damit auch für jedes $g \in G$

$$a \otimes g = g \cdot (a \otimes 1) = g \cdot 0 = 0$$

und daher schließlich $t = 0$, für alle $t \in A \otimes G$.

(f) Für eine endlich erzeugte abelsche Gruppe $A = \mathrm{Tor}(A) \oplus \mathbb{Z}^b$ (mit $b = \mathrm{rg}(A)$ eliminiert das Tensorprodukt mit $\mathbb{Q}$ (oder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) also den Torsionsanteil von A,

$$A \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^b.$$

(g) Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathbb{Z}^m \otimes \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^{mn}$$

(Übung; $(e_i \otimes e_j)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ ist eine Basis von $\mathbb{Z}^m \otimes \mathbb{Z}^n$).

(h) Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist (Übung):

$$\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{ggT}(m,n)}.$$

Die Beispiele (g) und (h) ermöglichen damit die Berechnung von $A \otimes B$ für alle endlich erzeugten abelschen Gruppen.

(8.8) Bemerkung. *Sei G eine abelsche Gruppe.*

(a) Sei weiter

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz abelscher Gruppen. Dann ist auch die Sequenz

$$A \otimes G \xrightarrow{\alpha \otimes \mathrm{id}} B \otimes G \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}} C \otimes G \longrightarrow 0$$

exakt.

(b) Ist

$$0 \to A \to B \to C \to 0 \tag{$*$}$$

exakt und spaltet, so ist auch

$$0 \to A \otimes G \to B \otimes G \to C \otimes G \to 0 \tag{$**$}$$

exakt und spaltet.

Beweis. (a) (i) Exaktheit bei $C \otimes G$: Sei $c \in C$, $g \in G$ beliebig. Dann gibt es $b \in B$ mit $c = \beta(b)$ und es gilt

$$c \otimes g = \beta(b) \otimes g = (\beta \otimes \mathrm{id})(b \otimes g).$$

Da $\{c \otimes g \mid c \in C, g \in G\}$ die Gruppe $C \otimes G$ erzeugt, ist $\beta \otimes \mathrm{id}$ surjektiv.

(ii) Exaktheit bei $B \otimes G$:

(1) Wegen

$$(\beta \otimes \mathrm{id}) \circ (\alpha \otimes \mathrm{id}) = \underbrace{(\beta \circ \alpha)}_{=0} \otimes \mathrm{id} = 0,$$

ist

$$\mathrm{im}(\alpha \otimes \mathrm{id}) \subseteq \ker(\beta \otimes \mathrm{id}).$$

(2) Betrachte $\tilde{\varphi}\colon C \times G \to B \otimes G/U$ mit $U := \mathrm{im}(\alpha \otimes \mathrm{id})$, gegeben durch

$$\tilde{\varphi}(c, g) := [b \otimes g] \quad \text{mit } b \in \beta^{-1}(c).$$

Wegen der Surjektivität von β existiert ein solches und $\tilde{\varphi}(c, g)$ hängt nicht von der Auswahl dieses Urbildes ab, denn ist b' ein weiteres, also $\beta(b') = \beta(b) = c$, so ist

$$\beta(b' - b) = \beta(b') - \beta(b) = c - c = 0.$$

Deshalb gibt es ein $a \in A$ mit $\alpha(a) = b' - b$. Aber dann ist

$$b' \otimes g - b \otimes g = (b' - b) \otimes g = \alpha(a) \otimes g = (\alpha \otimes \mathrm{id})(a \otimes g) \in U,$$

also

$$[b' \otimes g] = [b \otimes g].$$

Aus diesem Grund ist $\tilde{\varphi}$ nun auch linear, denn sind $b \in \beta^{-1}(c)$ und $b' \in \beta^{-1}(c')$, so kann man als Urbild von $c + c'$ gereade $b + b'$ wählen und daher ist

$$\tilde{\varphi}(c + c', g) = [(b + b') \otimes g] = [b \otimes g] + [b' \otimes g] = \tilde{\varphi}(c, g) + \tilde{\varphi}(c', g).$$

Also induziert $\tilde{\varphi}$ einen Homomorphismus $\varphi\colon C \otimes G \to B \otimes G/U$ mit $\varphi \circ \otimes = \tilde{\varphi}$. Dann gilt für alle $b \in B$ und $g \in G$:

$$\varphi \circ (\beta \otimes \mathrm{id})(b \otimes g) = \tilde{\varphi}(\beta(b), g) = [b \otimes g] = \pi(b \otimes g)$$

und daher $\varphi \circ (\beta \otimes \mathrm{id}) = \pi$, für die kanonische Projektion $\pi\colon B \otimes G \to B \otimes G/U$,

$$\begin{tikzcd}
A \otimes G \arrow[r, "\alpha \otimes \mathrm{id}"] & B \otimes G \arrow[r, "\beta \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \otimes G \arrow[dl, "\varphi"] \\
& B \otimes G/U &
\end{tikzcd}$$

Sei nun $t \in \ker(\beta \otimes \mathrm{id})$ beliebig. Dann ist

$$0 = \varphi(0) = \varphi\big(\beta \otimes \mathrm{id}(t)\big) = \pi(t),$$

also $t \in \ker(\pi) = U = \mathrm{im}(\alpha \otimes \mathrm{id})$. Also ist auch

$$\ker(\beta \otimes \mathrm{id}) \subseteq \mathrm{im}(\alpha \otimes \mathrm{id}).$$

(b) Ist $l\colon B \to A$ linksinvers zu α, also $l \circ \alpha = \mathrm{id}$ (eine Spaltung von $(*)$), so ist

$$(l \otimes \mathrm{id}) \circ \alpha \otimes \mathrm{id}) = (l \circ \alpha) \circ \mathrm{id} = \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_G = \mathrm{id}_{A \otimes G}$$

und damit $\alpha \otimes \mathrm{id}$ zunächst injektiv. Damit ist $(**)$ exakt (auch bei $A \otimes G$) und da nun $l \otimes \mathrm{id}$ offenbar auch linksinvers zu $\alpha \otimes \mathrm{id}$ ist, spaltet $(**)$ auch.

$\square$

(8.9) Kommentar. (a) Wegen (8.8)(a) sagt man, dass der Funktor $F_G := \_ \otimes G\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ *rechtsexakt* ist, weil er exakte Sequenzen der Form

$$\bullet \to \bullet \to \bullet \to 0$$

in wieder solche überführt.

(b) Er ist nicht *exakt*, das heißt er überführt sogar kurze exakte Sequenzen

$$0 \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to 0$$

in wieder solche, wie folgendes Beispiel zeigt: Betrachte die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(mit der Inklusion i und der Projektion π). Dann ist die mit $\mathbb{Z}_2$ tensorierte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i \otimes \mathrm{id}} \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\pi \otimes \mathrm{id}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

nicht exakt (bei $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2$), denn $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$, während $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_2 = 0$ ist (siehe (8.7)(b) und (8.7)(c)). Also kann $i \otimes \mathrm{id}$ nicht injektiv sein.

(c) Seien C und G abelsche Gruppen. Das im Folgenden eingeführte Torisonsprodukt $\operatorname{Tor}(A, G)$ ist ein Maß dafür in wie weit eine kurze exakte Sequenz (eine *Erweiterung von C (um A)*)

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

beim Tensorieren mit G nicht exakt bleibt, das heißt: Es gibt dann eine (lange) exakte Sequenz

$$\operatorname{Tor}(C, G) \longrightarrow A \otimes G \xrightarrow{\alpha \otimes \mathrm{id}} B \otimes G \longrightarrow C \otimes G \longrightarrow 0$$

(und (der Isomorphietyp von) $\operatorname{Tor}(C, G)$ wird nicht von A und B (und auch nicht von α und β) abhängen).

(8.10) Definition. Sei A eine abelsche Gruppe. Ist F eine freie abelsche Gruppe, so heißt eine kurze exakte Sequenz

$$S : 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0$$

eine *freie Auflösung von A.*

(8.11) Kommentar. Als Untergruppe (via α) von F ist dann auch R frei (F = frei, R =Realtionen). Ist $(e_i)_{i\in I}$ eine Basis von F, so ist also $\mathcal{E} = \big(\beta(e_i)\big)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von A und ist $(r_j)_{j\in J}$ eine Basis von R, so sind $\big(\alpha(r_j)\big)_{j\in J}$ die Relationen von $\mathcal{E}$.

(8.12) Beispiel. (a) Ist A frei, so kann man $F = A$ und $\beta = \mathrm{id}$ (also $R = 0$) wählen,

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\mathrm{id}} A \longrightarrow 0.$$

(b) Für $A = \mathbb{Z}_2$ ist beispielsweise

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

eine freie Auflösung.

(c) Ist A beliebig, so betrachte man A als Menge und setze $F := \mathbb{F}(A)$. (Vorsicht: In $\mathbb{F}(A)$ ist für $a \in A$ das Element $2 \cdot a$ ein anderes als $1 \cdot (2a)$ und $1 \cdot 0_A \neq 0_{\mathbb{F}(A)}$.) Sei dann $\pi\colon F \to A$ der Homomorphismus, der auf der Basis $\big(i(a)\big)_{a\in A}$ ($i\colon A \hookrightarrow F, a \mapsto 1 \cdot a$) durch

$$\pi\big(i(a)\big) = a$$

gegeben ist. (Natürlich ist dann zum Beispiel $\pi(2 \cdot a) = \pi\big(1 \cdot (2a)\big)$ und $\pi(0_A) = \pi(0_{\mathbb{F}(A)})$.) Ist schließlich $R := \ker(\pi)$ und $j\colon R \hookrightarrow F$ die Inklusion, so ist offenbar exakt (denn π ist surjektiv):

$$S(A):\ 0 \longrightarrow R \xrightarrow{j} F \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0.$$

Es heißt $S(A)$ die *Standard-Auflösung von A.*

(8.13) Definition. Seien A und G abelsche Gruppen und $S(A)$ die Standard-Auflösung von A. Dann heißt
$$\mathrm{Tor}(A,G) := \ker(j \otimes \mathrm{id}_G)$$
das *Torsionsprodukt von A und G.*

(8.14) Kommentar. (a) Beachte, dass also nun nach Definition die mit G tensorierte Standard-Auflösung mit dem um $\mathrm{Tor}(A,G)$ (und der Inklusion i) erweitertem Glied exakt wird,

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(A,G) \xrightarrow{i} R \otimes G \xrightarrow{j\otimes\mathrm{id}} F \otimes G \xrightarrow{\pi\otimes\mathrm{id}} A \otimes G \longrightarrow 0.$$

(b) Wir möchten dies nun auch für jede freie Auflösung von A erreichen.

(8.15) Lemma. *Seien A und A' abelsche Gruppen, seien*

$$S: \; 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0$$

und

$$S': \; 0 \longrightarrow R' \xrightarrow{\alpha'} F' \xrightarrow{\beta'} A' \longrightarrow 0$$

freie Auflösungen und sei $h\colon A \to A'$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) Es gibt Homomorphismen $g\colon F \to F'$ und $f\colon R \to R'$, so dass folgendes Diagramm kommutiert ((f,g,h) ist Homomorphismus von S nach S'*):*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & F \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R' \arrow[r, "\alpha'"'] & F' \arrow[r, "\beta'"'] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

(b) Sind $\tilde g\colon F \to F'$ und $\tilde f\colon R \to R'$ weitere Homomorphismen, so dass $(*)$ mit $\tilde g$ statt g und $\tilde f$ statt f kommutiert, so existiert ein Homomorphismus $\varphi\colon F \to R'$, mit

$$\alpha' \circ \varphi = \tilde g - g \quad \textit{und} \quad \varphi \circ \alpha = \tilde f - f,$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\tilde f - f"'] & F \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\tilde g - g"] \arrow[dl, dashed, "\varphi"] & A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & R' \arrow[r, "\alpha'"'] & F' \arrow[r, "\beta'"'] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Beweis. (a) Sei $(e_i)_{i \in I}$ eine Basis von F und $a'_i := h \circ \beta(e_i) \in A'$ $(i \in I)$. Da β' surjektiv ist, gibt es Elemente $x'_i \in F'$ mit $\beta'(x'_i) = a'_i$ $(i \in I)$. Wir definieren dann $g\colon F \to F'$ durch

$$g(e_i) := x'_i \quad (i \in I).$$

Dann ist

$$\beta' \circ g(e_i) = \beta'(x'_i) = a'_i = h \circ \beta(e_i), \quad \forall i \in I,$$

also $\beta' \circ g = h \circ \beta$.

Sei nun $x \in R$. Wegen

$$\beta' \circ g \circ \alpha(x) = h \circ \underbrace{\beta \circ \alpha}_{=0}(x) = 0$$

und der Exaktheit der Auflösung S' gibt es genau ein $x' \in R$ mit $\alpha'(x) = g \circ \alpha(x)$. Wir setzen $f\colon R \to R'$, $f(x) := x'$. Bezeichnen wir mit $\alpha'\colon R' \to U' \subseteq F'$ auch den Isomorphismus gegeben durch $U' := \operatorname{im}(\alpha')$, so ist also

$$f = (\alpha')^{-1} \circ g \circ \alpha$$

und damit ein Homomorphismus. Außerdem ist

$$\alpha' \circ f = \underbrace{\alpha' \circ (\alpha')^{-1}}_{=\mathrm{id}} \circ g \circ \alpha = g \circ \alpha.$$

(b) Für jedes $x \in F$ ist

$$\beta'(\tilde{g}(x) - g(x) = \beta' \circ \tilde{g}(x) - \beta' \circ g(x) = h \circ \beta(x) - h \circ \beta(x) = 0$$

also ist $\varphi\colon F \to R'$ durch

$$\varphi := (\alpha')^{-1} \circ (\tilde{g} - g)$$

wieder wohldefiniert (und homomorph) und nach Konstruktion ist

$$\alpha' \circ \varphi = \tilde{g} - g.$$

Es ist aber auch

$$\alpha' \circ (\tilde{f} - f) = \alpha' \circ \tilde{f} - \alpha' \circ f = \tilde{g} \circ \alpha - g \circ \alpha = (\tilde{g} - g) \circ \alpha = \alpha' \circ \varphi \circ \alpha.$$

Da α' injektiv ist, folgt:

$$\tilde{f} - f = \varphi \circ \alpha.$$

$\square$

(8.16) Proposition. *Seien G, A und A' abelsche Gruppen,*

$$S: 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0$$
$$S': 0 \longrightarrow R' \xrightarrow{\alpha'} F' \xrightarrow{\beta'} A' \longrightarrow 0$$

freie Auflösungen von A beziehungsweise A' und sei $h\colon A \to A'$ ein Homomorphismus. Dann gibt es genau einen Homomorphismus

$$\Phi = \Phi(h; S, S')\colon \ker(\alpha \otimes \mathrm{id}_G) \to \ker(\alpha' \otimes \mathrm{id}_G),$$

so dass gilt: Sind $g\colon F \to F'$ und $f\colon R \to R'$ beliebige Homomorphismen, so dass $(f, g, h)\colon S \to S'$ Homomorphismus zwischen exakten Sequenzen ist, so kommutiert auch folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(\alpha \otimes \mathrm{id}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\Phi"'] & R \otimes G \arrow[r, "\alpha \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}"] & F \otimes G \arrow[r, "\beta \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "g \otimes \mathrm{id}"] & A \otimes G \arrow[r] \arrow[d, "h \otimes \mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(\alpha' \otimes \mathrm{id}) \arrow[r, "i'"] & R' \otimes G \arrow[r, "\alpha' \otimes \mathrm{id}"] & F' \otimes G \arrow[r, "\beta' \otimes \mathrm{id}"] & A' \otimes G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

(8.17) Kommentar. Das erstaunliche an (8.16) ist nicht so sehr die Existenz und Eindeutigkeit von Φ bei gegebenen (f, g, h), denn der einzige Kandidat ist natürlich durch

$$\Phi = (i')^{-1} \circ (f \otimes \mathrm{id}) \circ i$$

gegeben (wobei natürlich zu prüfen ist, dass $(f \otimes \mathrm{id}) \circ i$ ins Bild von i' abbildet). Es ist vielmehr die Unabhängigkeit von den gewählten Homomorphismen f und g, die $(f, g, h)\colon S \to S'$ zu einem Homomorphismus zwischen exakten Sequenzen macht.

Beweis. Sei $(f, g, h)\colon S \to S'$ eine feste Fortsetzung von h (siehe (8.15)(a)). Dann ist

$$(\alpha' \otimes \mathrm{id}) \circ \big((f \otimes \mathrm{id}) \circ i\big) = (g \otimes \mathrm{id}) \circ \underbrace{(\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ i}_{=0} = 0,$$

deshalb gilt $\mathrm{im}\big((f \otimes \mathrm{id}) \circ i\big) \subseteq \mathrm{im}(i')$ und damit ist

$$\Phi := (i')^{-1} \circ (f \otimes \mathrm{id}) \circ i$$

wohldefiniert (und macht $(*)$ kommutativ).

Ist $(\tilde{f}, \tilde{g}, h)\colon S \to S'$ eine andere Wahl, so gilt mit $\varphi\colon F \to R'$ wie in (8.15)(b) und

$$\tilde{\Phi} := (i')^{-1} \circ (\tilde{f} \otimes \mathrm{id}) \circ i,$$

dass

$$i' \circ (\tilde{\Phi} - \Phi) = i' \circ \tilde{\Phi} - i \circ \Phi = (\tilde{f} \otimes \mathrm{id}) \circ i - (f \otimes \mathrm{id}) \circ i = \big((\tilde{f} - f) \otimes \mathrm{id}\big) \circ i$$
$$= \big((\varphi \circ \alpha) \otimes \mathrm{id}\big) \circ i = (\varphi \otimes \mathrm{id}) \circ \underbrace{(\alpha \otimes \mathrm{id}) \circ i}_{=0} = 0.$$

Wegen der Injektivität von i' folgt $\tilde{\Phi} - \Phi = 0$, also $\tilde{\Phi} = \Phi$. □

(8.18) Korollar. *Betrachtet man die freien Auflösungen*

$$S: \ 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0$$

als Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$ und als Morphismen von S nach

$$S': \ 0 \longrightarrow R' \xrightarrow{\alpha'} F' \xrightarrow{\beta'} A' \longrightarrow 0$$

Homomorphismen $h\colon A \to A'$, so ist $\Phi\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$,

$$\Phi(S) = \ker(\alpha \otimes \mathrm{id}), (h; S, S') \mapsto \Phi(h; S, S')$$

wie in (8.16), ein Funktor, das ist:

(a) $\Phi(\mathrm{id}; S, S) = \mathrm{id}$*,*

(b) $\Phi(h'; S', S'') \circ \Phi(h; S, S') = \Phi(h' \circ h; S, S'')$*.*

Beweis. (a) Ist $h = \mathrm{id}$ und $S = S'$, so kann man in (8.15) $f = \mathrm{id}$ und $g = \mathrm{id}$ wählen und erhält mit $\Phi = (i')^{-1} \circ (f \otimes \mathrm{id}) \circ i$:

$$\Phi = \mathrm{id}\,.$$

(b) Sind $(h; S, S')$ und $(h'; S', S'')$ gegeben und die Forsetzungen (f, g) beziehungsweise (f', g') schon gewählt, so kann man $g'' := g' \circ g$ und $f'' := f' \circ f$ als Fortsetzung für $h' \circ h$ wählen. Setzt man dann

$$\Phi := \Phi(h'; S', S'') \circ \Phi(h; S, S'),$$

so kommutiert das Diagramm $(*)$, weil das obere und das untere Teildiagramm kommutiert. Es folgt: $\Phi = \Phi(h' \circ h; S, S'')$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(\alpha \otimes \mathrm{id}) \arrow[r] \arrow[d] & R \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(\alpha' \otimes \mathrm{id}) \arrow[r] \arrow[d] & R' \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & F' \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & A' \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(\alpha'' \otimes \mathrm{id}) \arrow[r] & R'' \otimes G \arrow[r] & F'' \otimes G \arrow[r] & A'' \otimes G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

$\square$

(8.19) Kommentar. (a) Ist $h\colon A \to A'$ ein Isomorphismus (zum Beispiel $A = A'$ und $h = \mathrm{id}$), so muss also für zwei freie Auflösungen S von A und S' von A'

$$\Phi(h; S, S')\colon \ker(\alpha \otimes \mathrm{id}) \to \ker(\alpha' \otimes \mathrm{id})$$

ein Isomorphismus sein (denn wegen (8.18) ist $\Phi(h^{-1}; S', S)$ invers zu $\Phi(h; S, S')$).

(b) Ist A eine abelsche Gruppe, S eine beliebige Auflösung und $S(A)$ die Standardauflösung von A, so erhalten wir insbesondere einen Isomorphismus

$$\Phi\big(\mathrm{id}; S, S(A)\big)\colon \ker(\alpha \otimes \mathrm{id}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Tor}(A, G),$$

denn für $S' = S(A)$ ist ja $\ker(j \otimes \mathrm{id})$ gerade $\mathrm{Tor}(A, G)$.

Es hängt also der Isomorphietyp von $\ker(\alpha \otimes \mathrm{id})$ nicht von der Wahl der freien Auflösung ab (und man hat sogar einen kanonischen Isomorphismus).

(8.20) Beispiel. (a) Ist A frei abelsch, so ist (für beliebiges G) offenbar

$$\mathrm{Tor}(A, G) = 0,$$

denn

$$S\colon 0 \longrightarrow 0 \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\mathrm{id}} A \longrightarrow 0$$

ist eine freie Auflösung mit $R = 0$, also

$$\mathrm{Tor}(A, G) \cong \ker(\alpha \otimes \mathrm{id}) \subseteq R \otimes G = 0.$$

(b) Sind A_1, A_2 und G abelsche Gruppen, so ist auch hier

$$\mathrm{Tor}(A_1 \oplus A_2, G) \cong \mathrm{Tor}(A_1, G) \oplus \mathrm{Tor}(A_2, G),$$

denn für zwei Auflösungen

$$S_1\colon 0 \longrightarrow R_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_1 \longrightarrow A_1 \longrightarrow 0$$

und

$$S_2\colon 0 \longrightarrow R_2 \xrightarrow{\alpha_2} F_2 \longrightarrow A_2 \longrightarrow 0$$

ist

$$S\colon 0 \longrightarrow R_1 \oplus R_2 \xrightarrow{\alpha_1 \oplus \alpha_2} F_1 \oplus F_2 \longrightarrow A_1 \oplus A_2 \longrightarrow 0$$

eine freie Auflösung von $A_1 \oplus A_2$. Es folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}(A_1 \oplus A_2, G) &\cong \ker\big((\alpha_1 \oplus \alpha_2) \otimes \mathrm{id}\big) = \ker\big((\alpha_1 \otimes \mathrm{id}) \oplus (\alpha_2 \otimes \mathrm{id})\big)\\ &\cong \ker(\alpha_1 \otimes \mathrm{id}) \oplus \ker(\alpha_2 \otimes \mathrm{id}) \cong \mathrm{Tor}(A_1, G) \oplus \mathrm{Tor}(A_2, G).\end{aligned}$$

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und G eine abelsche Gruppe. Dann gilt:

$$\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_n, G) \cong \{g \in G \mid ng = 0\}\,.$$

Denn

$$S\colon 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$$

mit $\alpha(k) = nk$, ist eine freie Auflösung von $\mathbb{Z}_n$ und wegen der Isomorphie $\mathbb{Z} \otimes G \to G, 1 \otimes g \mapsto g$, sind die beiden folgenden exakten Sequenzen isomorph:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker(\alpha \otimes \mathrm{id}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\cong"] & \mathbb{Z} \otimes G \arrow[r, "\alpha \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\cong"] & \mathbb{Z} \otimes G \arrow[r, "\pi \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\cong"] & \mathbb{Z}_n \otimes G \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(\overline{\alpha}) \arrow[r, "\overline{i}"'] & G \arrow[r, "\overline{\alpha}"'] & G \arrow[r, "\overline{\pi}"'] & \mathbb{Z}_n \otimes G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit $\overline{\alpha}(g) = ng$ und $\overline{\pi}(g) = \overline{1} \otimes g$. Daher ist

$$\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_n, G) \cong \ker(\alpha \otimes \mathrm{id}) \cong \ker(\overline{\alpha}) = \{g \in G \mid ng = 0\}\,.$$

(d) Ist zusammen gefasst A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe (also $A \cong \mathbb{Z}^b \oplus \operatorname{Tor}(A)$ mit $b = \operatorname{rg} A$) und G ein Körper der Charakteristik 0, so ist wegen (a), (b) und (c):

$$\operatorname{Tor}(A, G) = 0.$$

(e) $\forall n, m \in \mathbb{N}\colon\ \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_{\operatorname{ggT}(n,m)}$ (Übung).

(8.21) Kommentar. Sei G eine feste abelsche Gruppe. Dann definieren wir $F = \operatorname{Tor}(\_, G)\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ auf den Objekten durch $F(A) = \operatorname{Tor}(A, G)$ und auf den Morphismen $h\colon A \to B$ durch

$$F(h) = \Phi\bigl(h; S(A), S(B)\bigr).$$

Es wird dann F zu einem Funktor.

(8.22) Definition. Sei $C = (C_k, \partial_k)$ ein Kettenkomplex und G eine abelsche Gruppe. Dann nennen wir

$$C \otimes G := (C_k \otimes G, \partial_k \otimes \mathrm{id})$$

den *zugehörigen Kettenkomplex mit Koeffizienten in G*.

(8.23) Kommentar. (a) $C \otimes G$ ist tatsächlich ein Kettenkomplex, denn für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$(\partial_{k-1} \otimes \mathrm{id}) \circ (\partial_k \otimes \mathrm{id}) = \underbrace{(\partial_{k-1} \circ \partial_k)}_{=0} \otimes \mathrm{id} = 0.$$

(b) Beachte, dass etwa für den singulären Kettenkomplex $S(X) = (S_k(X), \partial_k)$ eines topologischen Raumes X die *k-Ketten mit Koeffizienten in G*, das ist: die Elemente von $C_k \otimes G$, gerade von der Form

$$\overline{c} = g_1\sigma_1 + \cdots + g_r\sigma_r$$

mit $r \in \mathbb{N}_0$, $g_i \in G$, $\sigma_i \in \Sigma_k(X)$ $(i = 1, \ldots, r)$ sind (vergleiche (8.1)), wenn wir das Element $\sigma \otimes g \in S_k(X) \otimes G$ (mit einem singulären k-Simplex σ) mit $g\sigma$ identifizieren, denn $S_k(X)$ ist nach Definition die frei abelsche Gruppe über $\Sigma_k(X) = \{\text{singuläre } k\text{-Simplexe}\}$,

$$S_k(X) = \mathbb{F}\big(\Sigma_k(X)\big) = \bigoplus_{\Sigma_k(X)} \mathbb{Z},$$

also ist

$$S_k(X) \otimes G \cong \Big(\bigoplus_{\Sigma_k(X)} \mathbb{Z}\Big) \otimes G \cong \bigoplus_{\Sigma_k(X)} G.$$

(c) Warnung: Für $\overline{c} = g_1\sigma_1 + \ldots g_r\sigma_r$ ist also

$$\partial\overline{c} = g_1\partial\sigma_1 + \cdots + g_r\partial\sigma_r$$

mit

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \sigma \circ \delta_k^i,$$

die Elemente σ beziehungsweise $\partial\sigma$ liegen aber nicht in $S_k(X) \otimes G$, da G im Allgemeinen keine Eins hat.

(d) Die Homologie von $C \otimes G$ notieren wir so:

$$H_k(C; G) := H_k(C \otimes G)$$

und nennen sie die *Homologie von C mit Koeffizienten in G.*

(e) *Frage*: Wie hängen die abelschen Gruppen $H_k(C)$ und $H_k(C; G)$ zusammen?

(8.24) Definition. Seien C und C' Kettenkomplexe, $f\colon C \to C'$ eine Kettenabbildung und G eine abelsche Gruppe. Dann heißt

$$f \otimes \mathrm{id}_G \colon C \otimes G \to C' \otimes G$$

die *von f induzierte Kettenabbildung.*

(8.25) Kommentar. (a) f ist tatsächlich eine Kettenabbildung, denn

$$(\partial'_k \otimes \mathrm{id}) \circ (f_k \otimes \mathrm{id}) = (\partial'_k \circ f_k) \otimes \mathrm{id} = (f_{k-1} \circ \partial_k) \otimes \mathrm{id} = (f_{k-1} \otimes \mathrm{id}) \circ (\partial_k \otimes \mathrm{id}).$$

(b) Das Tensorieren mit G ergibt also einen Funktor $F\colon \mathbf{KK} \to \mathbf{KK}$, durch

$$F(C) := C \otimes G, \quad F(f) = f \otimes \mathrm{id}_G\,.$$

(8.26) Vorbereitung. Sei C ein Kettenkomplex, G eine abelsche Gruppe und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann induziert das Tensorprodukt auf $C_k \times G$ ein lineares

$$Z_k \times G \xrightarrow{\otimes} Z_k(C \otimes G),\ (z, g) \mapsto z \otimes g,$$

denn

$$(\partial_k \otimes \mathrm{id})(z \otimes g) = \underbrace{\partial_k z}_{=0} \otimes g = 0$$

und überführt dabei $B_k(C) \times G$ nach $B_k(C \otimes G)$, denn ist $z = \partial w$ (für ein $w \in C_{k+1}$), so ist

$$z \otimes g = \partial w \otimes g = (\partial \otimes \mathrm{id})(w \otimes g),$$

für $g \in G$. Deshalb induziert $\otimes$ ein (eindeutig bestimmtes)

$$\wedge\colon H_k(C) \times G \to H_k(C; G),$$

so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} Z_k \times G & \xrightarrow{\ \otimes\ } & Z_k(C \otimes G) \\ {\scriptstyle \pi \times \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ H_k(C) \times G & \xrightarrow{\ \wedge\ } & H_k(C; G) \end{array}$$

also

$$\wedge([z], g) = [z \otimes g]$$

(π die kanonische Projektion; jeweils). Da $\wedge$ offensichtlich bilinear ist, bekommt man so also einen Homomorphismus

$$\lambda\colon H_k(C) \otimes G \to H_k(C; G),$$

gegeben durch

$$\lambda([z] \otimes g) = [z \otimes g].$$

(8.27) Definition. Ein Kettenkomplex $C = (C_k, \partial_k)$ heißt *frei*, wenn C_k frei ist, für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(8.28) Lemma. *Sei $C = (C_k, \partial_k)$ ein freier Kettenkomplex und $\partial'_k\colon C_k \to B_{k-1}, \partial'_k(c) = \partial_k(c)$. Dann gilt:*

(a) Es ist
$$\partial'_k \otimes \mathrm{id}\colon C_k \otimes G \to B_{k-1} \otimes G$$
surjektiv und
$$\overline{Z}_k := Z_k(C \otimes G) = (\partial'_k \otimes \mathrm{id})^{-1}\big(\ker(i_{k-1} \otimes \mathrm{id})\big),$$
wo $i_{k-1}\colon B_{k-1} \hookrightarrow Z_{k-1}$ *die Inklusion bezeichnet.*

(b) $(\partial'_k \otimes \mathrm{id})(\overline{B}_k) = 0$, *wobei* $\overline{B}_k := B_k(C \otimes G)$.

(8.29) Kommentar. (a) Deshalb induziert nun $\partial'_k \otimes \mathrm{id}$ einen Homomorphismus
$$h\colon H_k(C;G) = \overline{Z}_k/\overline{B}_k \to \ker(i_{k-1} \otimes \mathrm{id})$$
mit
$$h([z]) = (\partial'_k \otimes \mathrm{id})(\overline{z}).$$

(b) Betrachte nun die freie Auflösung
$$S\colon 0 \longrightarrow B_{k-1} \xrightarrow{i_{k-1}} Z_{k-1} \xrightarrow{\pi} H_{k-1}(C) \longrightarrow 0$$
von $H_{k-1}(C)$ (denn mit C_{k-1} sind auch B_{k-1} und Z_{k-1} frei). Schließen wir nun an h aus (a) noch den Isomorphismus
$$\Phi := \Phi\left(\mathrm{id}; S, S\big(H_{k-1}(C)\big)\right) :\ \ker(i_{k-1} \otimes \mathrm{id}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Tor}(H_{k-1}(C), G)$$
an, so erhalten wir
$$\mu = \Phi \circ h\colon H_k(C;G) \to \mathrm{Tor}(H_{k-1}(C), G).$$

Beweis von (8.28). (a) Da $\partial'_k\colon C_k \to B_{k-1}$ surjektiv ist, ist es auch $\partial'_k \otimes \mathrm{id}\colon C_k \otimes G \to B_{k-1} \otimes G$. Bezeichnet $j_{k-1}\colon Z_{k-1} \hookrightarrow C_{k-1}$ die Inklusion, so gilt:
$$\partial_k = j_{k-1} \circ i_{k-1} \circ \partial'_k.$$
Also ist
$$\partial_k \otimes \mathrm{id} = (j_{k-1} \otimes \mathrm{id}) \circ (i_{k-1} \otimes \mathrm{id}) \circ (\partial'_k \otimes \mathrm{id}).$$
Nun ist die folgende Sequenz exakt und spaltet, denn B_{k-2} ist frei:
$$0 \longrightarrow Z_{k-1} \xrightarrow{j_{k-1}} C_{k-1} \xrightarrow{\partial'_{k-1}} B_{k-2} \longrightarrow 0.$$
Nach (8.8)(b) ist deshalb auch
$$0 \longrightarrow Z_{k-1} \otimes G \xrightarrow{j_{k-1}\otimes\mathrm{id}} C_{k-1} \otimes G \xrightarrow{\partial'_{k-1}\otimes\mathrm{id}} B_{k-2} \otimes G \longrightarrow 0.$$
exakt (und spaltet). Also ist $j_{k-1} \otimes \mathrm{id}$ injektiv. Es folgt:
$$\overline{Z}_k = Z_k(C\otimes G) = \ker(\partial_k\otimes\mathrm{id}) = \ker\big((i_{k-1}\otimes\mathrm{id})\circ(\partial'_k\otimes\mathrm{id})\big) = (\partial'_k\otimes\mathrm{id})^{-1}\big(\ker(i_{k-1}\otimes\mathrm{id})\big).$$

(b) Sei $\overline{z} \in \overline{B}_k = \operatorname{im}(\partial_{k+1} \otimes \operatorname{id})$ beliebig und ohne Einschränkung

$$\overline{z} = (\partial_{k+1} \otimes \operatorname{id})(c \otimes g)$$

für ein $c \in C_{k+1}$ und $g \in G$. (Jedes andere Element ist Summe von solchen.) Dann ist

$$(\partial'_k \otimes \operatorname{id})(\overline{z} = (\partial'_k \otimes \operatorname{id}) \circ (\partial_{k+1} \otimes \operatorname{id})(c \otimes g) = \underbrace{(\partial'_k \circ \partial_{k+1})}_{=0} \otimes \operatorname{id}(c \otimes g) = 0.$$

□

(8.30) Satz (Universelles Koeffiziententheorem für Kettenkomplexe)**.** *Sei C ein freier Kettenkomplex und $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist die mit λ aus (8.26) und μ aus (8.29) definierte Sequenz exakt und spaltet:*

$$0 \longrightarrow H_k(C) \otimes G \xrightarrow{\lambda} H_k(C; G) \xrightarrow{\mu} \operatorname{Tor}(H_{k-1}(C), G) \longrightarrow 0. \qquad (*)$$

Beweis. (i) Exaktheit bei $\operatorname{Tor}(H_{k-1}, G)$:

Nach Lemma (8.28) ist $\partial'_k \otimes \operatorname{id}\colon \overline{Z}_k \to \ker(i_{k-1} \otimes \operatorname{id})$ surjektiv und daher auch $h\colon \overline{H}_k \to \ker(i_{k-1} \otimes \operatorname{id})$. Da $\Phi\colon \ker(i_{k-1} \otimes \operatorname{id}) \to \operatorname{Tor}(H_{k-1}, G)$ ein Isomorphismus ist, ist auch $\mu = \Phi \circ h$ surjektiv.

(ii) Exaktheit bei $H_k(C; G)$:

(1) $\operatorname{im}(\lambda) \subseteq \ker(\mu)$:

Für $z \in Z_k$ und $g \in G$ ist

$$\mu \circ \lambda([z] \otimes g) = \Phi \circ h([z \otimes g]) = \varphi\big(\partial'_k \otimes \operatorname{id}(z \otimes g)\big) = \Phi(\underbrace{\partial'_k z}_{=0} \otimes g) = 0,$$

also ist $\mu \circ \lambda = 0$.

(2) $\ker(\mu) \subseteq \operatorname{im}(\lambda)$:

Sei $[\overline{z}] \in \overline{H}_k$ (mit $\overline{z} \in \overline{Z}_k$) und $\mu([\overline{z}]) = 0$, also

$$0 = \partial'_k \otimes \operatorname{id}(\overline{z}).$$

Da

$$Z_k \otimes G \xrightarrow{j_k \otimes \operatorname{id}} C_k \otimes G \xrightarrow{\partial'_k \otimes \operatorname{id}} B_{k-1} \otimes G \longrightarrow 0$$

exakt ist, existiert ein $\overline{c} \in Z_k \otimes G$ mit $j_k \otimes \operatorname{id}(\overline{c}) = \overline{z}$. Es gibt also $r \in \mathbb{N}_0$, $z_1, \dots, z_r \in Z_k$ und $g_1, \dots, g_r \in G$ mit

$$\overline{z} = z_1 \otimes g_1 + \cdots + z_r \otimes g_r.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}[\overline{z}] &= [z_1 \otimes g_1] + \cdots + [z_r \otimes g_r] = \lambda([z_1] \otimes g_1) + \cdots + \lambda([z_r] \otimes g_r) \\ &= \lambda([z_1] \otimes g_1 + \cdots + [z_r] \otimes g_r) \in \operatorname{im}(\lambda).\end{aligned}$$

(iii) Exaktheit bei $H_k(C) \otimes G$:

Da B_{k-1} frei ist, spaltet die Sequenz

$$0 \longrightarrow Z_k \xrightarrow{j_k} C_k \xrightarrow{\partial'_k} B_{k-1} \longrightarrow 0.$$

Sei $l_k \colon C_k \to Z_k$ eine Spaltung, $l_k \circ j_k = \mathrm{id}$. Betrachte dann die Komposition

$$\overline{Z}_k \subseteq C_k \otimes G \xrightarrow{l_k \otimes \mathrm{id}} Z_k \otimes G \xrightarrow{\pi_k \otimes \mathrm{id}} H_k \otimes G.$$

Da jedes Element in $\overline{B}_k = B_k(C \otimes G)$ Summe von Elementen der Form $\partial c \otimes g = (\partial_{k+1} \otimes \mathrm{id}(c \otimes g)$ (mit $c \in C_{k+1}$ und $g \in G$) ist, ist

$$(\pi_k \otimes \mathrm{id}) \circ (l_k \otimes \mathrm{id})(\partial c \otimes g) = (\pi_k \circ l_k \circ \underbrace{\partial c}_{=j_k\left(\partial_k(c)\right)}) \otimes g \overset{l_k \circ j_k = \mathrm{id}}{=} \big(\underbrace{\pi_k \circ \partial_k}_{=0}(c)\big) \otimes g = 0$$

Deshalb induziert $(\pi_k \otimes \mathrm{id}) \circ (l_k \otimes \mathrm{id})|\overline{Z}_k$ einen Homomorphismus $\lambda' \colon \overline{H}_k \to H_k \otimes G$ mit

$$\lambda'([\overline{z}]) = (\pi_k \otimes \mathrm{id}) \circ (l_k \otimes \mathrm{id})(\overline{z}),$$

also

$$\lambda' \circ \lambda([z] \otimes g) = \lambda'([z \otimes g]) = (\pi_k \otimes \mathrm{id}) \circ (l_k \otimes \mathrm{id})(z \otimes g) = \pi_k\big(\underbrace{l_k(z)}_{=z}\big) \otimes g = [z] \otimes g,$$

und damit

$$\lambda' \circ \lambda = \mathrm{id}\,.$$

Es folgt: λ ist injektiv und $(*)$ spaltet.

□

(8.31) Kommentar. (a) Es ist also

$$H_k(C;G) \cong H_k(C) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}(H_{k-1}(C), G).$$

(b) Während die Sequenz $(*)$ funktoriell ist, ist es die Spaltung nicht, das heißt: die Aufspaltung von $H_k(C;G)$ wie unter (a) kann man nicht funktoriell vornehmen (Übung).

(8.32) Definition. Sei G eine abelsche Gruppe und $k \in \mathbb{N}_0$.

(a) Für jedes Paar simplizialer Komplexe $(K;L)$ heißt die Homologie des Kettenkomplexes der relativen orientierten Simplexe $C(K,L) = C(K)/C(L)$ mit Koeffizienten in G,

$$H_k(K,L;G) := H_k(C(K,L);G),$$

die *k-te Homologie von (K,L) mit Koeffizienten in G.*

(b) Für jedes Raumpaar (X, A) heißt die Homologie des relativen singulären Kettenkomplexes $S(X, A) = S(X)/S(A)$ mit Koeffizienten in G,

$$H_k(X, A; G) := H_k(S(X, A); G)$$

die *k-te Homologie von (X, A) mit Koeffizienten in G.*

(8.33) Kommentar. (a) Die obigen Homologien induzieren auch für Morphismen $f\colon (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ beziehungsweise $f\colon (X_1, A_1) \to (X_2, A_2)$ naheliegende Homomorphismen $f_*\colon H_k(K_1, L_1; G) \to H_k(K_2, L_2; G)$ beziehungsweise $f_*\colon H_k(X_1, A_1; G) \to H_(X_2, A_2; G)$ und werden damit zu Funktoren von $\mathbf{SK_2}$ nach $\mathbf{Ab}$ beziehungsweise von $\mathbf{Top_2}$ nach $\mathbf{Ab}$.

(b) Die Kettenkomplexe $C(K, L)$ beziehungsweise $S(X, A)$ sind frei, denn $C_k(K, L)$ ist zu der freien abelschen Gruppe isomorph, welche von den fest orientierten k-Simplexen in $K \setminus L$ erzeugt wird, und $S(X, A)$ von den singulären k-Simplexen $\sigma\colon \Delta_k \to X$ mit $\sigma(\Delta_k) \nsubseteq A$. Deshalb gelten die Koeffizientensätze: Für jedes k ist exakt und spaltet:

$$0 \longrightarrow H_k(K, L) \otimes G \xrightarrow{\lambda} H_k(K, L; G) \xrightarrow{\mu} \operatorname{Tor}(H_{k-1}(K, L), G) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow H_k(X, A) \otimes G \xrightarrow{\lambda} H_k(X, A; G) \xrightarrow{\mu} \operatorname{Tor}(H_{k-1}(X, A), G) \longrightarrow 0.$$

(8.34) Satz. *Sei G eine abelsche Gruppe und $H = (H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die obigen Funktoren $H_k = H_k(xx, xx; G)\colon \mathbf{Top_2} \to \mathbf{Ab}$. Dann gibt es eine Folge $\partial = (\partial_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Transformationen von H_k nach F mit $F(X, A) := H_{k-1}(A; G)$, so dass gilt:*

(a) Ist $f \simeq g\colon (X, A) \to (Y, B)$, so ist $f_* = g_*\colon H(X, A; G) \to H(Y, B; G)$ (Homotopie-Axiom);

(b) Sind für ein Raumpaar (X, A) $i\colon A \hookrightarrow X$ und $j\colon X \hookrightarrow (X, A)$ die Inklusionen, so ist folgende Sequenz exakt (Exaktheits-Axiom):

$$\ldots \to H_k(X, A; G) \xrightarrow{\partial_k(X,A)} H_{k-1}(A; G) \xrightarrow{i_*} H_{k-1}(X; G) \xrightarrow{j_*} H_{k-1}(X, A; G) \to \ldots$$

(c) Ist (X, A) ein Raumpaar und $U \subseteq X$ mit $\overline{U} \subseteq \mathring{A}$, so induziert die Auschneidungsinklusion $i\colon (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ einen Isomorphismus in der Homologie,

$$i_*\colon H_k(X \setminus U, A \setminus U; G) \xrightarrow{\cong} H(X, A; G)$$

(Auschneidungs-Axiom)

(d) Für den einpunktigen Raum pt *gilt:*

$$H_k(\mathrm{pt}; G) \cong \begin{cases} G & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis. (a) Sind $f, g\colon (X,A) \to (Y,B)$ homotop, so folgt aus (1.12), dass $Sf, Sg\colon S(X,A) \to S(Y,B)$ kettenhomotop sind, $Sf \underset{D}{\simeq} Sg$. Dann gilt auch

$$Sf \otimes \mathrm{id} \underset{D\otimes\mathrm{id}}{\simeq} Sg \otimes \mathrm{id}\colon S(X,A) \otimes G \to S(Y,B) \otimes G.$$

Also gilt $f_* = g_*$.

(b) Für ein Raumpaar (X,A) (und Inklusionen i und j) ist exakt und spaltet:

$$0 \longrightarrow S(A) \xrightarrow{Si} S(X) \xrightarrow{Sj} S(X,A) \longrightarrow 0,$$

denn $S(X,A)$ ist frei. Also ist auch

$$0 \longrightarrow S(A) \otimes G \xrightarrow{Si} S(X) \otimes G \xrightarrow{Sj} S(X,A) \otimes G \longrightarrow 0$$

exakt (und spaltet). Sei $\partial_k(X,A)\colon H_k(X,A;G) \to H_{k-1}(A;G)$ der verbindende Homomorphismus dieser kurzen exakten Sequenz von Kettenkomlexen. Dann ist $\partial_k = \big(\partial_k(X,A)\big)_{(X,A)}$ eine natürliche Transformation und die lange Sequenz ist exakt:

$$\ldots \longrightarrow H_{k+1}(X,A;G) \xrightarrow{\partial_k} H_k(A;G) \xrightarrow{i_*} H_k(X;G) \xrightarrow{j_*} H_k(X,A;G) \longrightarrow \ldots$$

(c) Nach dem universellen Koeffizentensatz für die Raumpaare $(X \setminus U, A \setminus U)$ beziehungsweise (X,A) sind die Reihen des folgenden Diagramms exakt und das Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_k(X \setminus U, A \setminus U) \otimes G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "i_* \otimes \mathrm{id}"] & H_k(X \setminus U, A \setminus U; G) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "i_*"] & \mathrm{Tor}(H_{k-1}(X \setminus U, A \setminus U), G) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Tor}(i_*)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_k(X,A) \otimes G \arrow[r, "\lambda"] & H_k(X,A;G) \arrow[r, "\mu"] & \mathrm{Tor}(H_{k-1}(X,A), G) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Da $i_* \otimes \mathrm{id}$ und $\mathrm{Tor}(i_*)$ Isomorphismen nach dem ganzzahligen Ausschneidungssatz sind, ist es nach dem Fünferlemma auch i_*.

(d) Nach dem universellen Koeffizientensatz ist

$$H_k(\mathrm{pt};G) \cong H_k(\mathrm{pt}) \otimes G \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}(\underbrace{H_{k-1}(\mathrm{pt})}_{\text{frei}}, G)}_{=0} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \otimes G \cong G & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

□

(8.35) Kommentar. (a) Eine ähnliche Aussage (mit gleichem Beweis) gilt für die simpliziale Homologie.

(b) Ist ω eine Ordnung auf den Ecken K^0 eines simplizialen Komplexes K, so sieht man ähnlich, dass auch

$$C(\omega)_*\colon H(K;G) \to H(|K|;G)$$

ein Isomorphismus ist.

(c) Ist $\big(X,(X^k)\big)$ ein CW-Raum, so kann man einen zellulären Kettenkomplex $C(X;G)$ bilden, in dem man

$$C_k(X;G) := H_k(X^k, X^{k-1}; G)$$

(und dem verbindenden Homomorphismus aus der Tripelsequenz für (X^k, X^{k-1}, X^{k-2}) mit Koeffizienten in G) setzt. Dann sieht man wie in (6.7) (weil man nur die Axiome einer Homologie-Theorie benutzt), dass es einen natürlichen Isomorphismus

$$\Phi\colon H(X;G) \to H\big(C(X;G)\big)$$

gibt. Andererseits ist

$$C(X;G) \cong C(X) \otimes G,$$

denn $H_{k-1}(X^k, X^{k-1}) = 0$ und daher nach dem Koeffizentensatz

$$C_k(X;G) = H_k(X^k, X^{k-1}; G) \cong H_(X^k, X^{k-1}) \otimes G = C_k(X) \otimes G.$$

(d) Wie in (7.8) sieht man, dass eine Homologietheorie im Sinne von (8.34) auf Polyederpaaren (X,A) das Gleiche abliefert wie die singuläre Theorie.

(8.36) Beispiel. (a) Sei X ein topologischer Raum, so dass $H_k(X)$ endlich erzeugt ist, für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt, weil $\mathbb{Q}$ ein Körper der Charakteristik 0 ist,

$$H_k(X;\mathbb{Q}) \cong H_k(X) \otimes \mathbb{Q}$$

vermöge λ. Ist $b_k \in \mathbb{N}_0$ die k-te Bettizahl von X, also

$$H_k(X) \cong \mathbb{Z}^{b_k} \oplus \operatorname{Tor}\big(H_k(X)\big),$$

so gilt also:

$$b_k = \dim_{\mathbb{Q}} H_k(X;\mathbb{Q}).$$

(b) Ist zudem $H_k(X) = 0$, für fast alle $k \in \mathbb{N}_0$, so gilt für die Eulercharakteristik $\chi(X) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k$ von X:

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dim_{\mathbb{Q}} H_k(X;\mathbb{Q}).$$

(c) Sei $H_k(X)$ wieder endlich erzeugt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und p eine Primzahl. Sind dann $t_1^k, \dots, t_{r_k}^k$ die k-ten Torisionskoeffizienten von X, also

$$H_k(X) \cong \mathbb{Z}^{b_k} \oplus \mathbb{Z}_{t_1^k} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{t_{r_k}^k}$$

so sei $s_k \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der t_i^k $(i = 1, \dots, r_k)$, die Vielfache von p sind. Dann ist

$$\begin{aligned}(\mathbb{Z}_{t_1^k} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{t_{r_k}^k}) \otimes \mathbb{Z}_p &= (\mathbb{Z}_{t_1^k} \otimes \mathbb{Z}_p) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}_{t_{r_k}^k} \otimes \mathbb{Z}_p) \\ &= \mathbb{Z}_{\mathrm{ggT}(t_1^k, p)} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\mathrm{ggT}(t_{r_k}^k, p)} \cong \mathbb{Z}_p^{s_k}\end{aligned}$$

Nach dem Koeffizientensatz gilt daher

$$\begin{aligned}H_k(X; \mathbb{Z}_p) &\cong H_k(X) \otimes \mathbb{Z}_p \oplus \mathrm{Tor}(H_{k-1}(X), \mathbb{Z}_p) \\ &= \Big((\mathbb{Z}^{b_k} \otimes \mathbb{Z}_p) \oplus \mathbb{Z}_p^{s_k} \Big) \oplus \mathbb{Z}_p^{s_{k-1}} \cong \mathbb{Z}_p^{b_k + s_k + s_{k-1}},\end{aligned}$$

also

$$\dim_{\mathbb{Z}_p} H_k(X; \mathbb{Z}_p) = b_k + s_k + s_{k-1}.$$

(d) Sind wieder nur endlich viele Gruppen von Null verschieden, so gilt für die Euler-Charakteristik $\chi(X)$ von X:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{Z}_p} H_k(X; \mathbb{Z}_p) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (b_k + s_k + s_{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k + \sum_{k=0}^{\infty} (-1) k s_k - \sum_{l=-1}^{\infty} (-1)^l s_l \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k = \chi(X).\end{aligned}$$

Hier kann man $\mathbb{Z}_p$ durch einen beliebigen Körper der Charakteristik p ersetzen (Übung, vergleiche (b)). Also gilt für jeden Körper G:

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dim_G H_k(X; G).$$