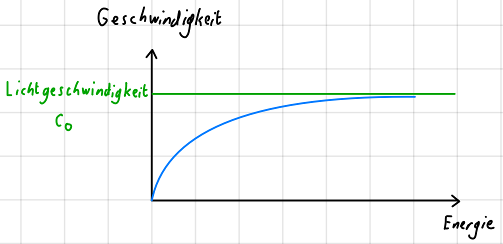
7. Physikalische Bedeutung

1) Motivation der SRT

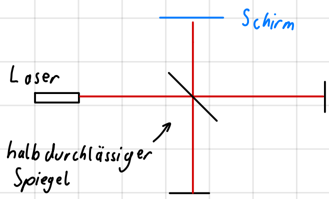
1.1 Lichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit

Mit Hilfe eines Teilchenbeschleunigers wird einem Elektron immer mehr Energie hinzugeführt.
Danach wird die Geschwindigkeit des Elektrons gemessen



Es wird festgestellt, dass egal wie viel Energie dem Elektron hinzugeführt wird, scheint es nicht die Grenzgeschwindigkeit c_0 zu überschreiten.

1.2 Michelson - Morley Experiment

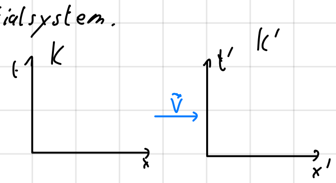


Auf dem Schirm ist ein Bild zu sehen, welches sich bereits für kleine Änderungen in der Zeit, welche die jeweiligen Laserstrahlen benötigen, um zu dem Schirm zu gelangen, ändert.
Wenn die gesammte Apparatur gedreht wird, so verändert sich das Bild auf dem Schirm nicht.
Daraus folgt, dass die Lichtgeschwindigkeit in alle Richtungen gleich zu sein scheint.

2) Physikalische Sichtweise

2.1 Definition Inertialsystem

Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem, in dem ein Körper, auf welchen keine (äußeren-) Kräfte wirken, in Ruhe ist oder sich geradlinig bewegt.
Jedes System, welches sich unbeschleunigt zu einem Inertialsystem bewegt, ist auch ein Inertialsystem.

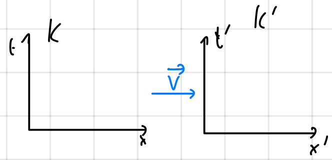


$\vec{v}$ konstant

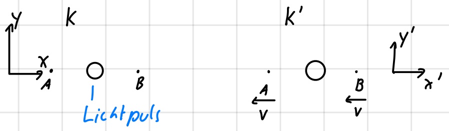
2.2 Lorentz-Transformation in der SRT

Auf der Erde bewegen wir uns durch den Weltall, z.B. um die Sonne, d.h. es kann nicht angenommen werden, dass die Erde das Bezugssystem ist für die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes
=> Die Lichtgeschwindigkeit ist in jedem Inertialsystem gleich!

Transformation von einem Inertialsystem K zu einem anderen Inertialsystem K', welches sich in x-Richtung bewegt und zur Zeit $t = t' = 0$ übereinstimmt.



Folgerung: Gleichzeitigkeit geht verlohren



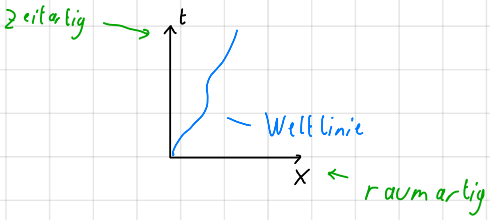
In K erreicht das Licht die Punkte A und B gleichzeitig, in K' erreicht das Licht zuerst B und dann Punkt A, da sich B der Welle in K' entgegen bewegt und A sich wegbewegt und die Lichtgeschwindigkeit in beiden Systemen in alle Richtungen gleich ist.

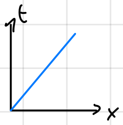
Hierraus lässt sich unter der Annahme, dass die Lichtgeschwindigkeit eine Konstante für alle Inertialsysteme ist, sie die Wechselwirkung beschränkt und das alle Inertialsysteme gleichwertig sind, folgende Transformation der Koordinaten und Zeiten für die Translation von K zu K' herleiten:

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z \qquad \text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \leq 1 \qquad \forall\, |v| \leq c$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

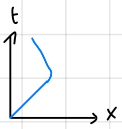
2.3 Minkowski-Diagramm und Weltlinien

Weltlinie: Orte, an denen sich ein Objekt in der Raumzeit befunden hat (Trajektorie)





$v = \frac{dx}{dt}$



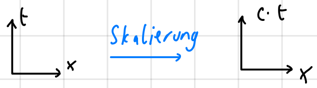
Weltlinie eines Inertialsystems

Nicht die Weltlinie eines Inertialsystems

3. SRT im Minkowski-Raum

3.1 Übersetzung in den Minkowski-Raum

Betrachte Erweiterung des 3D-Raumes um Dimension $x^0 = c \cdot t$



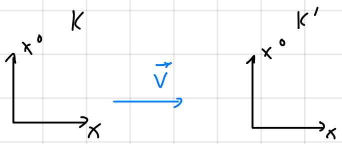
$$\Rightarrow x = (x^0, \vec{x}) \quad \text{mit} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Hierbei haben nun auch $\vec{x}$ und x^0 die selbe Einheit einer Länge.

Die zuvor genannte Lorentz-Transformation von K nach K' lässt sich nun umformen

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} x\right) \qquad \Big| \cdot c$$

$$\underbrace{c \cdot t'}_{=x^{0\,\prime}} = \gamma\left(\underbrace{c \cdot t}_{=x^0} - \frac{v}{c} x\right)$$



und damit schreiben als Abbildung $\sigma : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ mit

$$x' = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\cdot\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\, L_v} \cdot x$$

Wenn wir nicht nur zueinander räumlich unverdrehte Koordinatensysteme und Geschwindigkeiten in x_1-Richtung betrachten wollen, so drehen wir die Räume jeweils so, dass $\vec{v}$ parallel zu der x_1 bzw x_1' Achse ist:

$$\Rightarrow \sigma(x) = (R_2^{-1} L_v R_1)\, x$$

3.2 Wiederholung Lorentz-Transformation

Definition Minkowski-Raum und Lorentztransformation

- Der 4-dimensionale Minkowski-Raum ist ein $\mathbb{R}^4$-Vektorraum mit dem Pseudoskalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = x^0 y^0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{g_{ij}} x\, y^t$$

metrischer Tensor des Minkowski-Raums

- Eine **Lorentz-Transformation** ist eine orthogonale Abbildung $\sigma \in \mathcal{O}(F)$ welche die Zusammenhangskomponenten des Hyperboloiden erhält.

Wir möchten nachweisen, dass was wir bisher eine Lorentz-Transformation von einem Inertialsystem genannt haben, auch tatsächlich die Definition einer Lorentz-Transformation erfüllt.

Orthogonalität:

zz: Für alle Element x, y aus dem Minkowski Raum gilt:
$\langle \sigma(x), \sigma(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

$\langle \sigma(x), \sigma(y)\rangle = \langle (R_2^{-1} L_v R_1) x, (R_2^{-1} L_v R_1) y \rangle$ Erinnerung: $\langle x, y\rangle = x^0 y^0 - \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle_{\mathbb{R}^3}$

$= \langle Lx, Ly\rangle$, da Drehungen im räumlichen orthogonale Abbildungen sind

$= g_{ij}\, Lx (Ly)^t$

$$= g_{ij} \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \left(\begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y \right)^t$$

$$= g_{ij} \cdot \begin{pmatrix} \gamma x^0 - \frac{v}{c}\gamma x_1 \\ \gamma x_1 - \frac{v}{c}\gamma x^0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma y^0 - \frac{v}{c}\gamma y_1 \\ \gamma y_1 - \frac{v}{c}\gamma y^0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}^t$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma x^0 - \frac{v}{c}\gamma x_1 \\ -(\gamma x_1 - \frac{v}{c}\gamma x^0) \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma y^0 - \frac{v}{c}\gamma y_1 \\ \gamma y_1 - \frac{v}{c}\gamma y^0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}^t$$

$$= \gamma^2 x^0 y^0 + \frac{v^2}{c^2}\gamma^2 x_1 y_1 - \frac{v}{c}\cancel{\gamma^2 x^0 y_1} - \frac{v}{c}\cancel{\gamma^2 y^0 x_1}$$

$$- \gamma^2 x_1 y_1 - \frac{v^2}{c^2}\gamma^2 x^0 y^0 + \frac{v}{c}\cancel{\gamma^2 x^0 y_1} - \frac{v}{c}\cancel{\gamma^2 y^0 x_1}$$

$$- x_2 y_2 - x_3 y_3$$

$$= x^0 y^0 \gamma^2 \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}_{= \frac{1}{\gamma^2}} - x_1 x_2 \gamma^2 \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}_{= \frac{1}{\gamma^2}} - x_2 y_2 - x_3 y_3 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

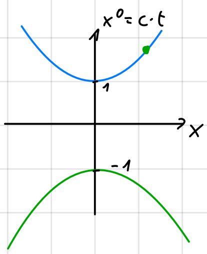
$$= \langle x, y\rangle$$

Erhalt der Zusammenhangskomponente des Hyperboloiden

$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$ beschreibt den Hyperboloiden

$\Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 1$, da aber $\langle , \rangle$ erhalten bleibt da es eine orthogonale Abbildung ist, bleibt auch jeder Punkt des Hyperboloiden auf dem Hyperboloiden

Noch zz. σ bildet nicht eine Seite des Hyperboloiden auf die andere Seite:
Hier wird dieses nur für Punkte bewiesen, deren x_2 und x_3 Koordinate 0 ist.



$1 = {x^0}^2 - x^2 \Rightarrow {x^0}^2 = 1 + x^2 > x^2$

$$\Rightarrow x^{0\prime} = \underbrace{\gamma\left(x^0 - \underbrace{\frac{v}{c}}_{\le 1} \cdot \underbrace{x}_{|x| \le |x_0|}\right)}_{\ge 0}$$

Somit wird durch eine Lorentz Transformation kein Punkt des oberen Hyperboloiden auf den unteren abgebildet, da sonst $x^{0\prime} < 0$ wäre. $\square$

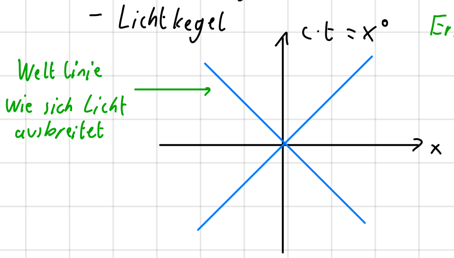
Die spezielle Lorentz-Gruppe sind alle Lorentz-Transformationen mit Determinante 1. $\gamma^2 = \frac{1}{1+\frac{v^2}{c^2}}$

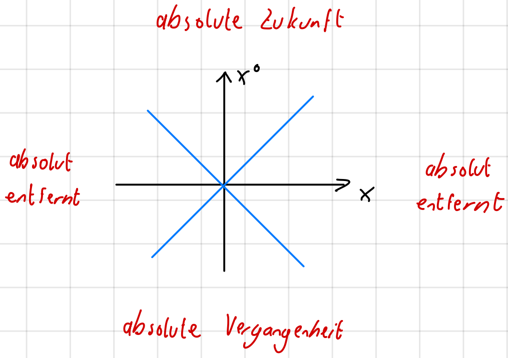
$$\det(R_2^{-1} L_v R_1) = \underbrace{\det(R_2^{-1})}_{=1} \cdot \det(L_v) \cdot \underbrace{\det(R_1)}_{=1} = \gamma^2 - \frac{v^2}{c^2}\gamma^2 = \gamma^2 \cdot \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$$

3.3 Minkowski-Diagramm

- Lichtkegel

Erinnerung $v = \frac{dx}{dt}$

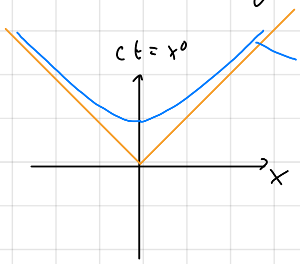




Eine Kausalität zwischen (0,0) und einem anderen Ereigniss kann nur vorliegen, wenn dieses in der Absoluten Zukunft oder absoluten Vergangenheit stattfindet, da sonst die Lichtgeschwindigkeit nicht die oberste Grenze für die Ausbreitung einer Wechselwirkung ist.

- Hyperboloid

  Beschreibt alle Punkte, die den Abstand 1 zum Ursprung haben.
  Dieser bleibt wie bereits gesehen unter der Lorentz Transformation erhalten und bleibt im selben Blatt.



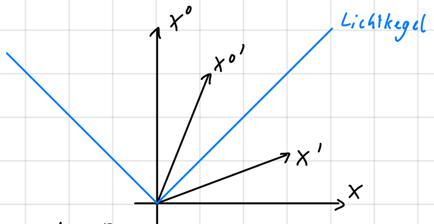
$\{x \in \mathbb{R}^4 : \langle x, x \rangle = 1 \text{ und } x^0 > 0\}$

3.4 Lorentz-Transformationen im Minkowski Diagramm

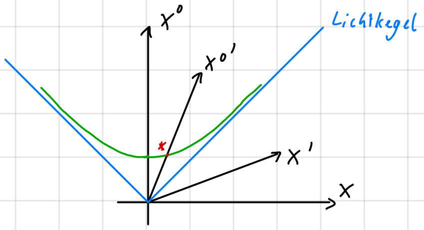
Wir haben gesehen, dass die Lorentz-Transformation für eine Geschwindigkeit v in die Richtung x_1 die Form hat:

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\cdot\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x$$

Somit transformiert die Lorentz-Transformation die Koordinatenachsen in folgender Form



und die Punkte auf dem Hyperboloiden haben in beiden Koordinatensystemen den Abstand 1 zum Ursprung



Die Maßeinheiten von K', also die Skalierung der Achsen, bestimmt sich aus den Schnittpunkt * der x^0-Achse mit dem Hyperboloiden, da hier gelten muss: $x^{0*2} = (c\cdot t^*)^2 = 1 \Rightarrow x^{0*} = 1$

- Zeitdilatation

↳ Wir wissen bereits, dass wir in der SRT das Konzept der Totalen Raumzeit aufgeben müssen.
Im Folgenden wollen wir betrachten, wie sich dies auf Zeitintervalle zwischen 2 Ereignissen auswirkt.

Eine Uhr ruht in dem System K', welches sich zum „ruhenden" System K mit Geschwindigkeit v in x_1 Richtung bewegt. Die Uhr steht in K' an dem konstanten Ort x'.
Wir betrachten die Ereignisse t_0', t_1' der Uhr in K'

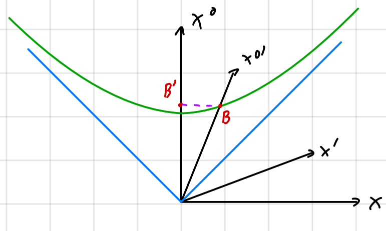
⇒ durch Multiplikation mit Matrix:

$$t_0 = \gamma\cdot\left(t_0' + \frac{v}{c^2}\,x'\right)$$
$$t_1 = \gamma\cdot\left(t_1' + \frac{v}{c^2}\,x'\right)$$

$$\Rightarrow\quad t_1 - t_0 = \gamma\cdot(t_1' - t_0')$$
$$\Rightarrow\quad \Delta t' = \underbrace{\frac{1}{\gamma}}_{\leq 1}\,\Delta t$$

⇒ Die Zeit vergeht im System K' langsamer als in K

Im Minkowski-Diagramm



- Längenkontraktion

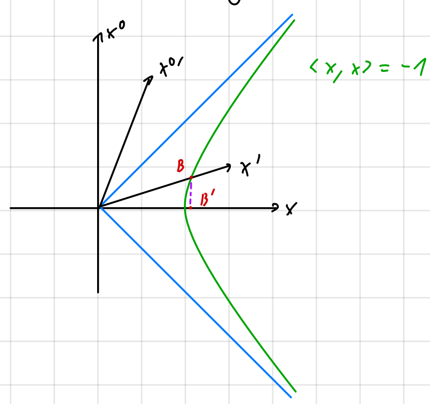
Im Folgenden ist zu sehen, dass Längen in einem bewegten Inertialsystem für einen äußeren Beobachter verkürzt sind.
Seien x_0', x_1' 2 Orte in K' zum selben Zeitpunkt t'

⇝ Durch jeweilige Multiplikation mit Transformationsmatrix:

$$x_0 = \gamma(x_0' + v\,t')$$
$$x_1 = \gamma(x_1' + v\,t')$$

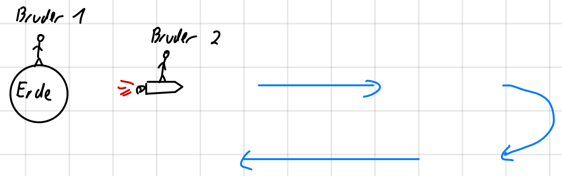
$$\Rightarrow\quad (x_1 - x_0) = \gamma\,(x_1' - x_0')$$
$$\Rightarrow\quad \Delta s = \gamma\,\Delta s'$$
$$\Rightarrow\quad \Delta s' = \underbrace{\frac{1}{\gamma}}_{\leq 1}\Delta s \qquad \Rightarrow \text{Bewegte Längen werden kleiner}$$

Im Minkowski-Diagramm

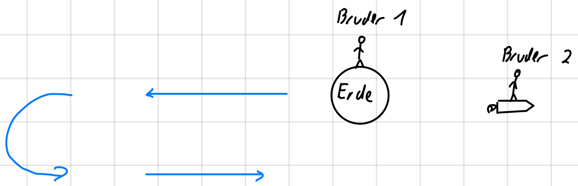


3.5 Zwillingsparadoxon

Im folgenden werden wir ein scheinbares Pradoxon betrachten von 2 Zwillingsbrüdern



Diese Bewegung kann auch so interpretiert werden:



Bei einem zu dem eigenen bewegten System vergeht die Zeit langsamer.
Wer ist also beim Wiedersehen der jüngere Bruder?

Lösung: Nicht beide Brüder befinden sich über die ganze Zeit in dem selben Inertialsystem!
Zum umdrehen in der Rakete wird das Bezugssystem von Bruder 2 für kurze Zeit beschleunigt und er wechselt in ein anderes Inertialsystem.