

# Isometrien der hyperbolischen Ebene

Theodor Müller

19. Januar 2025

## Grundsätzliche Notation

Sei  $F$  der umgebende (Minkowski-)Raum der hyperbolischen Ebene  $H^2$ . Sei  $S$  eine isotrope Linie bzw. ein isotroper Vektor in  $F$ , wir identifizieren hier die isotrope Linie und den isotropen Vektor. Mit  $Lor_V(F)$  bezeichnen wir die Gruppe der Lorentztransformationen, die den Vektor  $V \in F$  stabilisieren.

## Wiederholung

Eine Isometrie der hyperbolischen Ebene kann immer zu einem Produkt von höchstens drei Reflexionen an Geodäten zerlegt werden.

Dabei teilen wir Isometrien zuerst in gerade und ungerade Isometrien auf, die jeweils aus einer geraden bzw. ungeraden Anzahl an Isometrien bestehen.

Für die geraden Isometrien erinnern wir uns an den Vortrag zu Geradenbüscheln, wo wir uns die verschiedenen relativen Positionen von Geodäten angesehen hatten. Dabei konnten Geraden

- sich schneiden,
- eine gemeinsame Senkrechte haben oder
- einen gemeinsamen Randpunkt haben.

Randpunkte waren im Minkowski-Modell isotropische Geraden, in der Halbebene in  $\mathbb{C}$  entweder ein Punkt auf  $\mathbb{C}$  oder  $\infty$ , oder Randpunkte der Poincaré-Scheibe.

Ein Geradenbüschel ist eine Familie an Geraden, deren Normalenvektoren eine Ebene  $P$  in  $F$  aufspannen. Davon gibt es drei verschiedene Typen, klassifiziert nach Sylvestertyp der Ebene  $P$ , was den relativen Positionen der Geraden entspricht:

- eine Visualisierung des Geradenbüschels aller Geraden durch 1 Punkt; Entspricht Sylvestertyp von  $P$  von  $(-2, 0)$ : [www.geogebra.org/m/qvjqwxpn](http://www.geogebra.org/m/qvjqwxpn)

- eine Visualisierung des Geradenbüschels aller Geraden mit gemeinsamem Randpunkt; Entspricht Sylvertertyp von  $P$  von  $(-1, 0)$ : [www.geogebra.org/m/zyvhzsn8](http://www.geogebra.org/m/zyvhzsn8)
- eine Visualisierung des Geradenbüschels aller Geraden mit gemeinsamer Senkrechten; Entspricht Sylvertertyp von  $P$  von  $(-1, 1)$ : [www.geogebra.org/m/qh9vtvak](http://www.geogebra.org/m/qh9vtvak)

Wir werden uns daher Isometrien ansehen, die bestimmte Geradenbüschel invariant lassen.

Die Klassifikation der ungeraden Isometrien ist einfacher, weil es nur Gleitreflexionen gibt, d.h. eine Komposition von Spiegelung an einer Geodäte und Translation entlang dieser.

Seien  $a, b$  und  $c$  Geodäten mit Reflexionen  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ . Zusammengefasst werden wir zeigen

Gerade $\sigma = \alpha\beta$			Ungerade $\sigma = \alpha\beta\gamma$
$a$ schneidet $b$ in $A$	$a$ und $b$ haben eine gemeinsame Orthogonale $k$	$a$ und $b$ haben einen gemeinsamen Randpunkt $S$	
Drehung um $A$	Verschiebung entlang $k$	Horolation mit Zentrum $S$	Gleitreflexion

Tabelle 1:

## Drei Reflexionen

Um die Klassifikation auf die Fälle aus der Tabelle 1 zu reduzieren, brauchen wir ein Tool, um die Verkettung von Reflexionen an einem Büschel von Geodäten zu vereinfachen. Das wird durch das folgende Theorem gegeben.

### Theorem III.3.1

Seien  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  Reflexionen an Geodäten aus demselben Geradenbüschel  $\mathcal{P}$ . Dann ist  $\alpha, \beta, \gamma$  ebenfalls aus demselben Geradenbüschel  $\mathcal{P}$ .

*Beweis.* Sei  $S$  der Normalenvektor der Ebene  $P$ , die von den Normalenvektoren der Geodäten aus  $\mathcal{P}$  aufgespannt wird.

**Behauptung: Eine Lorentztransformation  $\sigma$  auf  $sl_2(\mathbb{R})$ , die  $S$  fixiert, ist das Produkt von einer oder zwei Reflexionen an Geodäten aus  $\mathcal{P}$ .**

Wir bemerken, dass  $\sigma$  eine orthogonale Transformation auf der Ebene  $P$  induziert. Wir gehen jetzt die verschiedenen Fälle für die Sylvertertypen von  $P$  durch:

- Wenn  $\langle S, S \rangle > 0$  ist, hat  $P$  Sylvestertyp  $(-2, 0)$ . Die Behauptung folgt aus  $\dim(P) = 2$  und dem folgenden Fakt:

*Fakt: (Iversen (1992, I.4.5)) Eine orthogonale Transformation eines euklidischen Vektorraums der Dimension  $n$  ist das Produkt von höchstens  $n$  Reflexionen an Hyperebenen.*

- Wenn  $\langle S, S \rangle < 0$  ist, dann ist  $P$  ein Minkowski-Raum. Die Behauptung folgt aus  $\dim(P) = 2$  und dem folgenden Fakt:

*Fakt: (Iversen (1992, I.6.11)) Sei  $F$  ein  $n + 1$  dimensionaler Vektorraum mit quadratischer Form von Sylvestertyp  $(-n, 1)$ . Dann ist jede Lorentztransformation von  $F$  das Produkt von höchstens  $n + 1$  Reflexionen an Vektoren mit negativer Norm.*

- Wenn  $\langle S, S \rangle = 0$  ist, ist  $P$  ein sogenannter parabolischer Raum, d.h. hat Sylvestertyp  $(-1, 0)$ . Auch hier folgt die Behauptung aus der Dimension von  $P$  und den folgenden zwei Fakten:

*Fakt: (Iversen (1992, I.6.16)) Sei  $F$  vom Sylvestertyp  $(-n, 1)$ . Dann definiert die Einschränkung von  $F$  auf  $S^\perp$  einen Isomorphismus*

$$\text{Lor}_S(F) \cong O_\infty(S^\perp),$$

wo  $O_\infty(S^\perp)$  die Untergruppe der orthogonalen Transformationen  $O(S^\perp)$  mit positivem Eigenwert auf der isotropen Geraden  $S$  ist.

*Fakt: (Iversen (1992, I.5.3)) Sei  $Q$  eine positive quadratische Form auf einem  $m$ -dimensionalen Vektorraum  $F$ . Eine Isometrie  $\sigma \in O(F)$ , die die Identität auf  $F^\perp$  ist, kann als Produkt von höchstens  $m$  Reflexionen geschrieben werden.*

Anmerkung: In I.5.3 ist  $F^\perp$  der von den isotropen Geraden aufgespannte Unterraum.

Da der Vektor  $S$  von  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  fixiert wird, folgt schlussendlich, dass  $\alpha\beta\gamma$  als Produkt von zwei oder drei Reflexionen geschrieben werden kann.

Da die Determinante jedoch negativ bleibt, muss  $\alpha\beta\gamma$  eine Reflexion sein.  $\square$

### Korollar III.3.3: Gerade Isometrien

*Leichte Verallgemeinerung von Iversen (1992, III.3.3)*

Die Isometrien der Form  $\alpha\beta$ , mit  $\alpha$  und  $\beta$  Reflexionen an Geodäten  $a$  und  $b$  aus einem gemeinsamen Geradenbüschel  $\mathcal{S}$ , bilden eine abelsche Gruppe.

*Beweis.* Wegen 3.1 ist klar, dass die Isometrien eine Gruppe bilden.

Für Reflexionen  $\rho, \sigma, \tau$  an Geodäten aus dem Büschel  $\mathcal{S}$  haben wir  $\rho\sigma\tau = \tau\sigma\rho$ , weil  $\rho\sigma\tau \stackrel{3.1}{=} (\rho\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}\rho^{-1}$  gilt.

Damit erhalten wir für zwei Isometrien  $\Phi = \alpha\beta$  und  $\Psi = \gamma\delta$

$$\Phi\Psi = (\alpha\beta)(\delta\gamma) = \alpha(\beta\delta\gamma) = \alpha(\gamma\delta\beta) = (\alpha\gamma\delta)\beta = (\delta\gamma\alpha)\beta = (\delta\gamma)(\alpha\beta) = \Psi\Phi$$

$\square$

Als Folgerung daraus erhalten wir für jede Art Geradenbüschel eine Gruppe der geraden Isometrien.

Rotation	Translation	Horolation
$a$ schneidet $b$ in $A$	$a$ und $b$ haben eine gemeinsame Orthogonale $k$	$a$ und $b$ haben einen gemeinsamen Randpunkt $S$
Rotation um $A$	Translation entlang $k$	Horolation mit Zentrum $S$

### Die Gruppe der Horolationen mit Zentrum $S$

Sei  $S$  eine isotrope Gerade. Eine Horolation mit Zentrum  $S$  ist eine Isometrie von der Form  $\alpha\beta$ , wobei  $\alpha$  und  $\beta$  Reflexionen in Geodäten  $a$  und  $b$  mit Randpunkt  $S$  sind.

Wegen Theorem bilden die Horolationen eine abelsche Gruppe.

Anschaulich ist eine Horolation eine Drehung um den Randpunkt  $S$ .

Die Gruppe der Horolationen ist isomorph zu  $(\mathbb{R}, +)$

*Beweis.* In Iversen (1992, S. 100) wird behauptet, dass die Gruppe der Horolationen mit Zentrum  $S$  isomorph zu  $(\mathbb{R}, +)$  ist.

Für eine Horolation  $\sigma$  mit Zentrum  $S$  ist natürlich  $S$  invariant unter  $\sigma$  und  $\sigma$  ist die Identität auf  $S$  (weil reflexionen bereits die Identität auf  $S$  sind). Wir wissen zudem dass der Sylvestertyp von  $S^\perp$   $(-1,0)$  ist. Wir sehen dann, dass  $Hor(S) \subset Lor_S(H^2) \stackrel{I.6.16}{\cong} O_\infty(S^\perp) \stackrel{I.5.8}{\cong} Siml(E) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \times (\mathbb{R}, +)$ .  $Siml(E)$  sind die Ähnlichkeitstransformationen der euklidischen Ebene, was für  $\mathbb{R}^2$  alle affin linearen Funktionen sind.

Wir beobachten, dass  $O_\infty(S^\perp)$  entweder Reflexionen an nichtisotropischen Vektoren, Scherungen oder positive Streckungen der Isotropen Linie  $S$  enthält.

Strecken der Linie kann keine Reflexion sein, da Reflexionen auf  $S$  die Identität sind. Streckungen entsprechen aber der Gruppe  $U(\mathbb{R}, \cdot)$  in unserer Darstellung.

Entsprechend kann es auch keine Reflexion sein, die der Gruppe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  entsprechen würden.

Also bleibt für die Horolationen nur die Gruppe  $(\mathbb{R}, +)$  übrig, mit denen wir sie identifizieren können.  $\square$

### Korollar III.3.4. Horozyklen

Der Orbit eines Punktes unter Horolationen mit Zentrum  $S$  ist ein Horozykel mit Zentrum  $S$ .

Zudem gehören zwei Punkte  $A$  und  $B$  genau dann zu dem selben Horozykel mit Zentrum  $S$ , wenn die Mittelsenkrechte für  $A$  und  $B$  Randpunkt  $S$  hat.

*Beweis.* Wir wissen, dass ein Horozykel beschrieben wird als  $H^2 \cap V$ , wobei  $V$  ein affiner Unterraum der Form  $v + S^\perp$  mit  $v \in H^2$  ist.

Sei  $\sigma$  eine Horolation mit Zentrum  $S$ . Da  $S^\perp$  ein  $\sigma$  invarianter Unterraum und  $\det(\sigma) = 1$  sind (betrachte die Jordannormalform von  $\sigma$ ), ist  $\sigma(v)$  von der Form  $v + s$  mit  $s \in S^\perp$ . Somit liegt auch  $\sigma(v)$  in  $H^2 \cap V$ , also auf demselben Horozykel wie  $v$ .

Seien  $A$  und  $B$  aus demselben Horozykel mit Zentrum  $S$ , dann ist die Mittelsenkrechte  $m$  zwischen  $A$  und  $B$  ebenfalls eine Geodäte mit Normalenvektor  $(A - B) \in S^\perp$ . Das sehen wir, indem wir einen Punkt  $P \in m$  betrachten und rechnen

$$\begin{aligned} d(P, A) &= d(P, B) \\ \langle P, A \rangle &= \cosh(d(P, A)) = \cosh(d(P, B)) = \langle P, B \rangle \\ \langle P, A - B \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Also ist der Randpunkt der Mittelsenkrechten ebenfalls  $S$ .

Verkettung der Reflexionen  $\mu$  an  $m$  und  $\alpha$  an der Geodäte durch  $A$  mit Randpunkt  $S$  gibt eine Horolation mit  $\alpha\mu(B) = A$ .

Die Horolation  $\alpha\mu$  zeigt auch die umgekehrte Richtung, dass  $A$  und  $B$  auf dem selben Horozykel liegen, falls die Mittelsenkrechte Randpunkt  $S$  hat.  $\square$

### Proposition III.3.5

Die Gruppe der Horolationen mit Zentrum  $S$  wirkt transitiv auf der Menge der Geodäten mit Randpunkt  $S$ .

*Beweis.* Seien  $a$  und  $b$  Geodäten mit Randpunkt  $S$  und  $M$  und  $N$  die jeweils zugehörigen Normalenvektoren. Die lineare Isomorphismus von  $P = S^\perp$  mit  $\sigma(S) = S$  und  $\sigma(M) = N$  ist orthogonal. Aus Iversen (1992, I.5.3) folgt, dass  $\sigma$  als Produkt von einer oder zwei Reflexionen geschrieben werden kann. Durch Ersetzen von  $N$  mit  $-N$  können wir annehmen, dass  $\sigma$  das Produkt von zwei Reflexionen ist. Wir können das dann wieder eindeutig zu einer Horolation mit Zentrum  $S$  fortsetzen.

Angenommen, dass die Horolation  $\sigma$  die Geodäte  $a$  fixiert. Für  $A \in a$  muss  $\sigma(A) = A$  gelten, weil sonst die Mittelsenkrechte von  $A$  und  $\sigma(A)$  Randpunkt  $S$  hat und zwei senkrechte Geodäten keinen gemeinsamen Randpunkt haben können. Somit ist  $\sigma = \text{Id}$ .  $\square$

### Korollar III.3.6

Ein Horozykel  $\mathcal{H}$  mit Zentrum  $S$  und eine Geodäte  $a$  mit Randpunkt  $S$  schneiden sich in genau einem Punkt.

*Beweis.* Wenn  $\mathcal{H}$  und  $a$  sich an zwei verschiedenen Punkten  $A$  und  $B$  schneiden, dann hat die Mittelsenkrechte zwischen  $A$  und  $B$  Randpunkt  $S$ , womit wir wieder einen Widerspruch durch orthogonale Geodäten mit gemeinsamem Endpunkt erhalten.

Wählen wir einen Punkt  $B \in \mathcal{H}$  und eine Horolation  $\sigma$ , die die Geodäte  $b$  durch  $B$  mit Ende  $S$  in die Geodäte  $a$  abbildet. Dann ist  $\sigma(B)$  der Schnittpunkt von  $\mathcal{H}$  und  $a$ .  $\square$

## Rotationen

Unter einer *Rotation* um einen Punkt  $A$  in  $H^2$  verstehen wir eine Isometrie der Form  $\alpha, \beta$ , wobei  $\alpha$  und  $\beta$  Reflexionen an Geodäten durch  $A$  sind.

### III.3.7: Winkel der Rotation

Um den *Rotationswinkel* zu definieren, verwenden wir einen normierten Tangentialvektor am Punkt  $A$  und definieren dann

$$\theta = \angle_{or}(t, \sigma(t)) \quad ; t \in T_A(H^2), \langle t, t \rangle = -1.$$

Wegen  $\sigma(A) = A$ , ist  $\sigma|_{T_A(H^2)}$  eine orthogonale Transformation mit Determinante 1, also eine Rotation des euklidischen Raums  $T_A(H^2)$ . Damit folgt, dass die Gruppe der Rotationen durch Einschränkung isomorph zu  $SO(T_A(H^2)) \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  ist und dass  $\theta$  wohldefiniert ist. Auch sieht man daran, dass Rotationen darstellungsunabhängig sind, i.e.  $\alpha\beta = \gamma\delta$ , wenn deren Geodäten gleichen Winkel zueinander haben.

In einem vorherigen Vortrag hatten einen Kreis um  $A$  mit Radius  $r$  definiert als die Menge aller  $p$  mit  $d(p, A) = r$ .

### Korollar

Der Orbit eines Punktes  $p$  unter Rotationen  $\sigma$  um  $A$  ist ein Kreis mit Mittelpunkt  $A$  und Radius  $d(p, A)$ .

*Beweis.* Wegen  $d(p, A) = d(\sigma(p), \sigma(A)) = d(\sigma(p), A)$  ist der Orbit von  $p$  unter der Gruppe der Rotationen Teilmenge des Kreises.

Ist  $q$  ein anderer Punkt auf dem Kreis, betrachten wir die Spiegelung  $\mu$  und der Mittelsenkrechten  $m$  von  $p$  und  $q$ , die durch  $A$  geht und die Spiegelung  $\alpha$  an der Geodäte durch  $p$  und  $A$ . Dann ist die Verkettung  $\mu\alpha$  eine Rotation mit  $\mu\alpha(p) = q$ .  $\square$

Ein ausgezeichnetes Element in der Gruppe der Rotationen ist die Rotation mit Rotationswinkel  $\pi$ , die wir *Symmetrie bezüglich  $A$*  nennen. Sie ist analog zur Punktsymmetrie im euklidischen Raum. Eine Symmetrie bezüglich  $A$  kann als Komposition von zwei Spiegelungen an orthogonalen Geraden durch  $A$  dargestellt werden.

## Translationen

Sei  $k$  eine Geodäte in  $H^2$ . Unter einer *Verschiebung entlang von  $k$*  verstehen wir eine Isometrie der Form  $\alpha\beta$ , wo  $\alpha$  und  $\beta$  Reflexionen an Geodäten  $a$  und  $b$  orthogonal zu  $k$  sind.

Die Translationen bilden wieder eine abelsche Gruppe (III.3.3.).

### Theorem

Die Wirkung der Translationen auf  $k$  ist einfach transitiv.

*Beweis.* Seien  $A, B \in k$ . Wir betrachten die Reflexion  $\mu$  an der Mittelsenkrechte und  $\alpha$  an der Orthogonalen zu  $k$  durch  $A$ . Dann ist  $\mu\alpha$  eine Translation mit  $\mu\alpha(A) = B$ .

Sei  $\sigma$  eine Translation, die  $A$  fixiert. Wir betrachten  $\alpha$  die Reflexion in der Senkrechten auf  $k$  durch  $A$ . Dann ist  $\alpha\sigma$  eine Reflexion, die  $A$  fixiert und senkrecht auf  $k$  steht. Also ist  $\alpha\sigma = \alpha$  und somit  $\sigma = \text{Id}$ .  $\square$

### Korollar

Die Orbits der Translationen entlang von  $k$  sind Hyperzykel mit Achse  $k$ .

*Beweis.* Wir betrachten die Hyperzykel  $H \cap V$ , wobei  $V$  ein affiner Unterraum der Form  $N + E$  ist, wo  $E$  die von  $k$  erzeugte Ebene und  $N$  der Normalenvektor von  $k$  ist. Dann ist  $\sigma(N) = N$ , und deswegen  $V \cap H^2$  invariant unter  $\sigma$ .

Seien  $A$  und  $B$  aus einem Hyperzykel mit Achse  $k$ . Wir betrachten die Mittelsenkrechte  $m$  auf  $A$  und  $B$  mit Normalenvektor  $A - B \in E$ . Da  $A - B$  orthogonal zu  $N$  ist, ist  $m$  orthogonal zu  $k$ . Spiegelung  $\mu$  an  $m$  und  $\alpha$  an der Geodäte durch  $A$ , die senkrecht auf  $k$  steht, ergeben die Translation  $\mu\alpha$  mit  $\mu\alpha(A) = B$ .  $\square$

### Definition

Die *Verschiebungslänge*  $T$  einer Translation  $\sigma$  ist gegeben durch  $T = d(A, \sigma(A))$  für ein  $A \in k$ .

## Proposition III.3.8: Ungerade Isometrien

Eine ungerade Isometrie  $\varphi$  von  $H^2$  ist eine Gleitreflexion, d.h. eine Komposition von der Form  $\varphi = \tau\kappa$ , wo  $\tau$  eine Translation entlang einer Geodäte  $k$  ist und  $\kappa$  eine Reflexion an  $k$ .

*Beweis.* Wir halten  $A \in H^2$  fest und betrachten den Punkt  $\varphi(A)$ .

Fall 1:  $\varphi(A) = A$ : Dann ist  $\varphi$  eine Spiegelung an einer Geodäte durch  $A$ .

Fall 2:  $\varphi(A) \neq A$ .

Sei dabei  $a$  die Geodäte durch  $A$  und  $\varphi(A)$  und  $m$  die Mittelsenkrechte zwischen  $A$  und  $\varphi(A)$ . Deren Schnittpunkt bezeichnen wir mit  $M$ , während  $\alpha$  und  $\mu$  die entsprechenden Reflexionen sind.

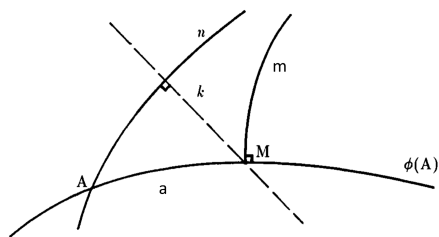


Abbildung 1: Darstellung des Beweises

Wir sehen, dass  $\mu\varphi$  eine gerade Isometrie ist, die  $A$  festhält. Also ist  $\mu\varphi$  eine Rotation um  $A$ , es existiert also eine Reflexion  $\nu$  an einer Geodäte  $n$  durch  $A$ , sodass  $\mu\varphi = \alpha\nu$ .

Jetzt betrachten wir die Reflexion  $\kappa$  an der Geodäte  $k$ , die senkrecht auf  $n$  steht und durch  $M$  geht.

Dann können wir rechnen

$$\varphi = \mu(\alpha\nu) = (\mu\alpha)(\nu\kappa)\kappa.$$

Und dann ist  $\tau = (\mu\alpha)(\nu\kappa)$  als Komposition zweier Symmetrien in Punkten auf  $k$  eine Translation. Denn wir können  $\mu\alpha$  und  $\nu\kappa$  jeweils als Symmetrie der Form  $\mu'\kappa$  und  $\kappa\nu$  darstellen.  $\square$



## Die Entsprechungen im Halbebenen-Modell nach Poincaré

Wir wollen uns die jeweiligen Transformationen und Zyklen auch im Halbebenen-Modell nach Poincaré ansehen. Hier werden wir jedoch keine Beweise führen.

Isometrien in der oberen Halbebene sind gegeben durch Möbiustransformationen, also Matrizen  $\sigma$  aus der projektiven linearen Gruppe  $PGL_2(\mathbb{R})$ . Dabei werden diese nach ihrer Spur  $tr(\sigma)$  klassifiziert.

**Rotationen**  $tr^2(\sigma) < 4$

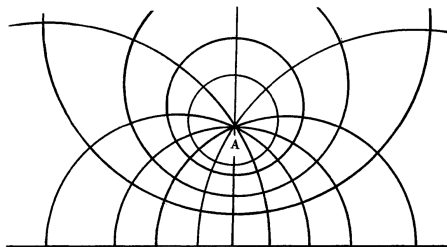


Abbildung 2: Rotation in der oberen Halbebene;  $\sigma$  hat den Fixpunkt  $A$ . Die hyperbolischen Kreise sind dann die Kreise um  $A$ , die orthogonal zu den Geodäten (Halbkreise auf der reellen Achse) durch  $A$  sind.

**Horolation**  $tr^2(\sigma) = 4$

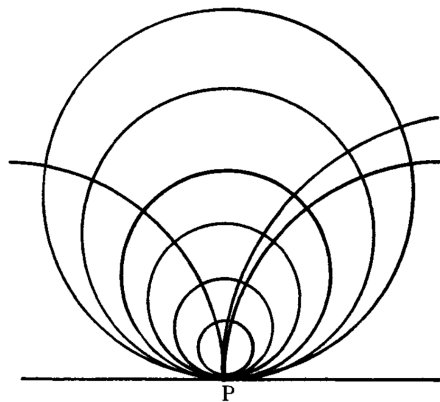


Abbildung 3: Horolation in der oberen Halbebene;  $\sigma$  hat einen Fixpunkt  $P$  auf der reellen Achse. Die Kreise, die tangential zur reellen Achse am Punkt  $P$  sind, sind die Horozyklen mit Zentrum  $P$ .

**Translation**  $tr^2(\sigma) > 4$

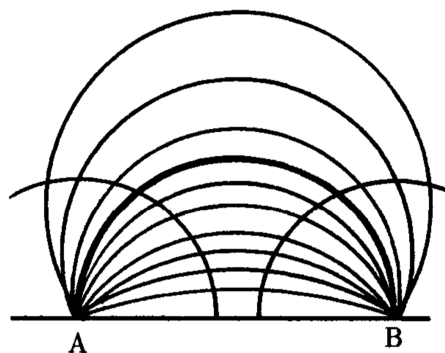


Abbildung 4: Translation entlang der Geodäte  $h$  mit Randpunkten  $A$  und  $B$ ;  $h$  ist invariant unter  $\sigma$ . Die Hyperzyklen sind die Kreise durch  $A$  und  $B$ , die nicht senkrecht auf der reellen Achse stehen.

## Literatur

Iversen, B. (1992). *Hyperbolic Geometry*. Bd. 118. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press.