Tiago Magalhaes
Figueira

Hyperbolische Unterräume & Horosphären

Hinweis:

Im Folgenden sei A ein n-dimensionales affiner UR von $\mathcal{F}$, so dass $H \cap A$ nicht leer ist. A hat Form $A = a + U$, mit a Vektor & U UR. Außerdem sei U n-dimensionales UR von $\mathcal{F}$, ausgestattet mit der quadratischen Form Q von $\mathcal{F}$ eingeschränkt auf U.

1. Schnitte mit affinen Unterräumen

1.1 Definition Krümmung

Als Krümmung K der Sphäre vom Radius r im $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Raum bezeichnen wir den Wert $K = 1/r^2$.

1.2 Definition Lichtartiger/Zeitartiger/Raumartiger Vektor

Es sei F ein Minkowski-Raum. Ein Vektor $v \in F$ mit

- $Q(v) = 0$, heißt lichtartig.
- $Q(v) > 0$, heißt zeitartig
- $Q(v) < 0$, heißt raumartig.

1.3 Proposition

(1) Wenn es ein $u \in U$ gibt, das zeitartig ist, so ist U vom Sylvester-Typ $(-(n-1), 1)$ & ist also selbst ein Minkowski-Raum. Man nennt U zeitartig.

(2) Wenn es in U keinen zeitartigen, aber ein lichtartigen Vektor u gibt, so ist U vom Sylvester-Typ $(-(n-1), 0)$ & somit singulär. Man nennt U lichtartig & es gilt $U = (\mathbb{R}u)^\perp$.

3) Sind alle $u \in U \setminus \{0\}$ raumartig, so ist U vom Sylvester-Typ $(-n, 0)$. Man nennt U raumartig.

Beweis:

Zu (1)

OBdA sei $u \in H$. Aus der Transitivität der Lorentz-Gruppe auf, existiert eine Lorentz-Transformation σ, so dass gilt $\sigma(u) = (1,0,\dots,0)$. (L-T)

Da die L-T die Dimension nicht ändert, gilt:

$$\dim(\sigma(U)) = \dim(U) = n.$$

$\Rightarrow W := U \cap \{x^0 = 0\}$ hat Dimension $n-1$.

$$\Rightarrow \sigma(U) = \underbrace{W}_{\substack{n-1\text{-dimensionaler} \\ \text{Raum in der} \\ \text{räumlichen Richtung}}} \oplus \underbrace{\mathbb{R}(1,0,\dots,0)}_{\substack{1\text{-dimensionaler} \\ \text{Raum in} \\ \text{zeitliche Richtung}}}$$

$\Rightarrow \sigma(U)$ hat Sylvester-Typ $(-(n-1), 1)$

$\Rightarrow U$ hat Sylvester-Typ $(-(n-1), 1)$

Zu (2)

OBdA sei $u = (1, \underline{u})$. Dann hat $W := U \cap \{x^0 = 0\}$ erneut Dimension $n-1$.

Sei $w \in W$ mit $\langle u, w \rangle \neq 0$. Dann gelte

$$\Rightarrow Q(u+tw) = Q(u) + Q(tw) + 2t\langle u, w\rangle$$
$$= \underbrace{Q(u)}_{\substack{=0, \\ \text{da } u \text{ lichtartig}}} + t^2 Q(w) + 2t\langle u, w\rangle$$

Dies kann für geeignete $t \in \mathbb{R}$ positiv sein

$\Rightarrow Q(u+tw) > 0 \Rightarrow u+tw$ ist zeitartiges Vektor ↯

Somit muss gelten $\langle u, w \rangle = 0$ $\forall w \in W$.

$\Rightarrow (0, \underline{w}) = w \perp u = (1, \underline{u})$

$\Rightarrow \underline{w} \cdot \underline{u} = 0$

Aus einer ONB von W erhält man durch Hinzufügen von u eine ONB von U

$\Rightarrow$ W ist $(n-1)$-dimensionales Raum in räumliche Richtung
u ist ein-dimensionales Raum in Lichtrichtung.

$\Rightarrow U$ hat Sylvestertyp $(-(n-1), 0)$

Aus u lichtartig folgt $u \perp u$, außerdem haben wir gezeigt $u \perp W$

$\Rightarrow u \perp U$

$\Rightarrow U \subseteq (\mathbb{R}u)^{\perp}$

Aus der Dimensionsformel folgt

$$\dim (\mathbb{R}u)^{\perp} = n = \dim U$$

$\Rightarrow (\mathbb{R}u)^{\perp} = U$.

Zu (3)

Die Behauptung folgt ohne Weiteres. $\square$

1.4 Definition

Ein affiner Unterraum $A = a + U$ heißt genau dann zeitartig / lichtartig / raumartig, wenn U es ist.

1.5 Proposition

Ist A zeitartig, dann ist $H \cap A$ ein $(n-1)$-dimensionaler hyperbolischer Raum mit Krümmung $K \geq -1$; Gleichheit gilt genau dann, wenn A durch die 0 geht.

Beweis:

Fall 1 A ist Unterraum

Nach Prop. 3.3 ist A selbst ein Minkowski-Raum.
$\Rightarrow H \cap A$ ist eine der beiden Einheits-Hyperboloid-Schalen (weil $Q(x)$ in A übereinstimmt mit $Q(x)$ in F.)
$\Rightarrow H \cap A$ ein $(n-1)$-dimensionaler hyperbolische Raum mit Krümmung -1.

Fall 2 $A = a + U$

Für ein geeignetes σ: $\sigma(U) = W \oplus \mathbb{R}(1,0,\dots,0)$ & $\sigma(a) + \sigma(U)$.
Sei $b := \sigma(a)$ & ändere man b um Elemente von $\sigma(U)$, ohne $\sigma(A)$ zu ändern, können wir $b^0 = 0$ & $b \perp W$ annehmen
$\Rightarrow b \perp \sigma(U)$

Für $b+v \in \sigma(A)$, also $v \in \sigma(U)$, gilt $b+v \in H$ genau dann, wenn $v^0 > 0$ & $1 = Q(b+v) = Q(b) + Q(v) + 2\langle b, v\rangle = Q(b) + Q(v) = -|\underline{b}|^2 + Q(v)$

$$\iff$$

$$v^0 > 0 \;\&\; Q(v) = 1 + |\underline{b}|^2$$

Also ist v auf dem oberen Hyperboloid vom Radius $r = \sqrt{1+|\underline{b}|^2}$ liegt; $k = -1/r^2 > -1$, wenn $b \neq 0$

1.6 Proposition

(1) Ist U zeitartig, $e \in H \cap U$ & f mit $Q(f) = -1$ tangential an $H \cap U$ in e, dann liegt die ganze Gerade in $H \cap U$.

(2) Ist $n=2$ & A zeitartig, aber nicht durch 0, dann ist $H \cap A$ eine Kurve, die keine Gerade ist; sie heißt ein Hyperzykel.

Beweis:

Zu (1):

z.z. $x(s) \in H$ & $x(s) \in U$

$x(s) \in H$: $\quad Q(x(s)) \overset{!}{=} 1$

$$Q(e\cosh s + f\sinh s) = Q(\cosh s \cdot e) + Q(\sinh s \cdot f) + 2\langle e\cosh s, f\sinh s\rangle$$

$$= \cosh^2 s \cdot \underbrace{Q(e)}_{=1,\text{ da } e \in H} + \sinh^2 s \cdot \underbrace{Q(f)}_{=-1} + 2 \cdot \cosh s \cdot \sinh s \underbrace{\langle e, f\rangle}_{=0}$$

Es gilt $\cosh^2 s - \sinh^2 s = 1$

$\Rightarrow Q(x(s)) = 1 \quad \Rightarrow x(s) \in H$

$x(s) \in U$: Wir wissen, dass $e, f \in U$, wie auch dass U UR ist

$\Rightarrow$ Linearkombination aus e & f sind auch in U

$\Rightarrow x(s) \in U$

$\Rightarrow x(s) \in U \cap H$

Zu (2)

Vor.: $n=2$ & A zeitartig & geht nicht durch den Ursprung.

Durch geeignete L-T σ bringen wir A in die Form

$$A = \underbrace{(0,\underline{b})}_{\text{verschiebt } A \text{ vom Ursprung}} + \mathbb{R}\underbrace{(0,\underline{w})}_{\text{definiert die Richtung in } A} + \mathbb{R}(1,0,0)$$

- $\underline{w}, \underline{b} \in \mathbb{R}^2$
- $\underline{w} \cdot \underline{b} = 0$, damit A zeitartig

$\Rightarrow$ Mit $r = \sqrt{1+|\underline{b}|^2}$ ist $H \cap A$ die Kurve

$$x(s) = (r\cosh s, r\underline{w}\sinh s + \underline{b})$$

Dies unterschidet sich von einer Geraden durch

$r \neq 1$ & $\underline{b} \neq 0$ unterscheidet.

Diese Kurve heißt Hyperzykel.

1.7 Definition

Die hyperbolische Sphäre mit Radius $r>0$ & Mittelpunkt $x \in H$ ist die Menge aller $y \in H$ mit $d(x,y) = r$.

1.8 Proposition

(1) Jede hyperbolische Sphäre S ist von der Form $S = H \cap A$, wobei A ein raumartiger affiner Unterraum von F mit $\dim A = n$ ist.
(2) Umgekehrt ist für jedes solche A die Menge $H \cap A$ entweder leer, ein einzelner Punkt oder eine hyperbolische Sphäre.

Beweis

Zu (1)

Sei σ geeignete L-T mit $\sigma(x) = (1, 0, \dots, 0)$, also verschiebt σ den Mittelpunkt x der Sphäre auf $(1, 0, \dots, 0)$.

$\Rightarrow \sigma(S)$ ist hyperbolische Sphäre mit Mittelpunkt $(1, 0, \dots, 0)$ & Radius r.

$y = (y^0, \underline{y}) \in H$ liegt auf S
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow d((1,0,\dots,0), y) = r \\ &\Leftrightarrow \operatorname{arcosh}(\langle (1,0,\dots,0), y \rangle) = r \\ &\Leftrightarrow \langle (1,0,\dots,0), y \rangle = \cosh r \\ &\Leftrightarrow y^0 = \cosh r \end{aligned}$$

Außerdem gilt, da $y \in H$ ist:

$$1 = Q(y) = (y^0)^2 - |\underline{y}|^2$$

$$\Rightarrow |\underline{y}|^2 = (y^0)^2 - 1$$

$$\Rightarrow |\underline{y}|^2 = \cosh^2 r - 1$$

$$\Rightarrow |\underline{y}|^2 = \sinh^2 r$$

$$\Rightarrow |\underline{y}| = \sinh r$$

Somit ist $\sigma(S) = \{(\cosh r, \underline{w} \sinh r) : \underline{w} \in \mathbb{R}^n, |\underline{w}| = 1\}$

Sei B nun $B := \{y \in F : y^0 = \cosh r\}$.

B ist raumartiger affiner UR mit Dimension n

$$\Rightarrow \sigma(S) = \{(\underbrace{\cosh r}_{\in B}, \underline{w} \sinh r) : \underline{w} \in \mathbb{R}^n, |\underline{w}| = 1\}$$

<u>NR</u>:

$$Q((\cosh r, \underline{w} \sinh r)) = (\cosh r)^2 - \sum_{i=1}^{n} (w^i \cdot \sinh r)^2$$

$$= \cosh^2 r - \sinh^2 r \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (w^i)^2}_{=1}$$

$$= 1$$

$\Rightarrow \sigma(S) = H \cap B$

$\Rightarrow S = H \cap A$, wobei $A = \sigma^{-1}(B)$ auch ein raumartiger affiner UR mit Dimension n ist.

Zu (2)

Sei nun $A = a + U$ gegeben mit $\dim(A) = n$

$\underbrace{\dim(U)}_{=n} + \dim(U^\perp) = \underbrace{\dim(F)}_{n+1}$

$\Rightarrow$ Orthagonale Komplementraum $U^\perp$ hat Dimension 1

Aus Q auf U negativ definit & jede ONB von U zusammen mit jedem normierten Vektor in $U^\perp$ eine ONB von F bildet

Satz von Sylvester

$\Rightarrow$ Jeder Vektor $\neq 0$ in $U^\perp$ ist zeitartig.

$\exists!\, u \in H \cap U^\perp : U = (\mathbb{R}u)^\perp$.

Sei σ L.-T. mit $\sigma(u) = (1, 0, \dots, 0)$

$\Rightarrow \sigma(U) = \{x^0 = 0\}$ & $\sigma(A) = b + \{x^0 = 0\}$ mit $b = \sigma(a)$.

Wir nehmen oBdA an $b = (b^0, 0, \dots, 0)$

Fall 1 $\quad b_0 < 1 \quad \Rightarrow H \cap \sigma(A) = \emptyset$

Fall 2 $\quad b_0 = 1 \quad \Rightarrow H \cap \sigma(A) = \{(1, 0, \dots, 0)\}$

Fall 3 $\quad b_0 > 1 \quad \Rightarrow H \cap \sigma(A)$ ist die hyperbolische Sphäre mit Radius $r = \operatorname{arcosh} b^0$ & Mittelpunkt $(1, 0, \dots, 0)$.

$\square$

1.9 Proposition

Hyperbolische Sphären vom Radius r (mit der Metrik entlang der Fläche) sind isometrisch zur Sphäre vom Radius $\sinh r$ im euklidischen Raum (mit der Metrik entlang der Fläche).

<u>Beweis:</u>

Aus dem Beweis in 1.8 wissen wir:

$$\sigma(S) = \{(\cosh r, \underline{w} \sinh r) : \underline{w} \in \mathbb{R}^n, |\underline{w}| = 1\}$$
$$= H \cap B .$$

B ist dabei ein raumartiger UR von $\mathbb{R}^{n,1}$

$\Rightarrow$ B ist euklidischer Raum

$\Rightarrow$ Die Länge einer Kurve in $\sigma(S) \subset H$ stimmt mit ihrer Länge in B überein.

$\Rightarrow$ Minimale Kurvenlänge zwischen $x, y \in \sigma(S)$ stimmt mit der minimalen Kurvenlänge in B entlang $\sigma(S) \subset B$ überein.

$\Rightarrow$ Da der Abstand entlang der Fläche für Punkte auf den Sphären gleich ist, gilt die Isometrie

1.10 Definition

Ist A lichtartig & $H \cap A \neq \emptyset$, dann heißt $H \cap A$ eine Horosphäre, für $n=2$ auch ein Horozykel.

1.11 Proposition

Horosphären sind isometrisch zu euklidischen Räumen

Beweis:

Sei $A = a + U$. Wir wissen dass A lichtartig ist. Nach Prop 1.3 ist $U = (\mathbb{R}u)^{\perp}$ für ein lichtartiges $u \in U$; oBdA ist $u_0 = 1$ & $a = (0, \underline{a})$, außerdem $\underline{a} \cdot \underline{w} = 0 \; \forall \underline{w} \in W = U \cap \{x_0 = 0\}$.

Mit geeigneter LT σ können wir $u = (1, 1, 0, \dots, 0)$ erreichen, woraus folgt, dass $a = (0, a^1, 0, \dots, 0)$. W enthält Vektoren, w, welche $w^0 = w^1 = 0$ erfüllen.

Da für $a_1 \geq 0$ folgt, dass $H \cap A = \emptyset$, nehmen wir an, dass $a_1 < 0$.

Dann haben die Vektoren aus A die Form $w + a + \lambda u$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Die in $H \cap A$ erfüllen

$$1 = Q(w + a + \lambda u) = Q(w + a) + Q(\lambda u) + 2\langle w + a, \lambda u \rangle$$

$$Q(\lambda u) = \lambda^2 Q(u) \overset{\text{da } u \text{ lichtartig}}{\Longrightarrow} Q(u) = 0 \Rightarrow Q(\lambda u) = 0$$

$$\langle w + a, \lambda u \rangle = \underbrace{\langle w, \lambda u \rangle}_{=0} + \langle a, \lambda u \rangle = \langle a, \lambda u \rangle = \lambda \cdot \langle a, u \rangle$$

$$\Rightarrow 1 = Q(w + a + \lambda u) = Q(w+a) + 2\lambda \langle a,u \rangle$$

$$Q(w+a) = -(a^1)^2 - |\underline{w}|^2 \quad , \text{weil} \quad Q(x) = (x^0)^2 - \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2$$

$$2\lambda \langle a, u \rangle = -a^1$$

$$\Rightarrow 1 = -(a^1)^2 - |\underline{w}|^2 - 2\lambda a_1$$

$$\Rightarrow 1 + (a^1)^2 + |\underline{w}|^2 = -2\lambda a_1$$

$$\Rightarrow \frac{1 + (a^1)^2 + |\underline{w}|^2}{-2a_1} = \lambda$$

Wir können somit die Menge $H \cap A$ parametrisieren durch $\underline{w}$

$$x(\underline{w}) = \left(\frac{1+(a^1)^2 + |\underline{w}|^2}{-2a_1} , a_1 + \frac{1+(a^1)^2+|\underline{w}|^2}{-2a_1} , \underline{w} \right)$$

Da Q auf W negativ ist, da W raumartig ist.

$\Rightarrow$ W ist euklidischer VR

$\Rightarrow$ Es reicht zu zeigen, dass $x(\underline{w})$ Isometrie ist.

Seien $\underline{w}(t)$ & $\underline{\tilde{w}}(t)$ zwei differenzierbare Kurven in $\mathbb{R}^n$

mit $\underline{w}(0)=\underline{\tilde{w}}(0)$, $w=(0,0,\underline{w})$, $\tilde{w}(0,0,\underline{\tilde{w}})$.

Z.z. $\left\langle \frac{d}{dt}x(\underline{w}(t)), \frac{d}{dt}x(\tilde{w}(t))\right\rangle\Big|_{t=0} = \frac{d\underline{w}}{dt}\cdot\frac{d\underline{\tilde{w}}}{dt}\Big|_{t=0}$.

Durch ableiten von $\underline{w}(t)$ erhalten wir

$$\frac{d}{dt}x(\underline{w}(t)) = \left(\frac{w}{-a^1}\cdot\frac{d\underline{w}}{dt}, \frac{w}{-a^1}\cdot\frac{d\underline{w}}{dt}, \frac{d\underline{w}}{dt}\right)$$

NR: $\left(\frac{w}{-a^1}\cdot\frac{d\underline{w}}{dt}, \frac{w}{-a^1}\cdot\frac{d\underline{w}}{dt}, \frac{d\underline{w}}{dt}\right) = \left(\frac{w}{-a^1}\cdot\frac{d\underline{w}}{dt}, \frac{w}{-a^1}\cdot\frac{d\underline{w}}{dt}, \frac{d}{dt}w^2, \frac{d}{dt}w^3, \dots, \frac{d}{dt}w^n\right)$

$$= \left(\frac{w}{-a^1}\cdot\frac{d\underline{w}}{dt}, \frac{w}{-a^1}\cdot\frac{d\underline{w}}{dt}, 0, \dots, 0\right) + \left(0,0,\frac{d}{dt}w^2, \frac{d}{dt}w^3, \dots, \frac{d}{dt}w^n\right)$$

$$= \frac{w}{-a_n}\cdot\frac{d\underline{w}}{dt}(1,1,0,\dots,0) + \frac{d}{dt}(0,0,w^2,w^3,\dots,w^n)$$

$$= \frac{w}{-a_n}\cdot\frac{d\underline{w}}{dt}u + \frac{d}{dt}w$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{d}{dt}x(\underline{w}(t)), \frac{d}{dt}x(\underline{\tilde{w}}(t))\right\rangle = \left\langle \frac{w}{-a^1}\cdot\frac{d\underline{w}}{dt}u + \frac{dw}{dt}, \frac{\tilde{w}}{-a^1}\cdot\frac{d\tilde{w}}{dt}u + \frac{d\tilde{w}}{dt}\right\rangle$$

Aus $u \perp u$, $u \perp W$ & $\frac{dw}{dt} \in W$ folgt

$$\Rightarrow \left\langle \frac{w}{-a^1}\cdot\frac{d\underline{w}}{dt}u + \frac{dw}{dt}, \frac{\tilde{w}}{-a^1}\cdot\frac{d\tilde{w}}{dt}u + \frac{d}{dt}\tilde{w}\right\rangle = \frac{d\underline{w}}{dt}\cdot\frac{d\tilde{w}}{dt}.$$

$\square$

2. Randpunkte

2.1 Proposition

Für jede Gerade $x(s) = e\cosh s + f\sinh s$ in H konvergieren die Unterräume $\mathbb{R}x(s) \subset F$ für $s \to \infty$ gegen einen lichtartigen 1d Unterraum von F.

<u>Beweis:</u>

Wir betrachten nun in $\mathbb{R}x(s)$ den Punkt $\frac{x(s)}{x^0(s)} = \left(1, \frac{\underline{x}(s)}{x^0(s)}\right)$, für $x^0(s) \neq 0$

$$\frac{\underline{x}(s)}{x^0(s)} = \frac{(\underline{e}\cosh s + \underline{f}\sinh s)}{(e^0\cosh s + f^0\sinh s)}$$

$\cosh s = \frac{e^s+e^{-s}}{2}$, $\sinh s = \frac{e^s-e^{-s}}{2}$

$$= \frac{\underline{e}\cdot\frac{e^s+e^{-s}}{2} + \underline{f}\,\frac{e^s-e^{-s}}{2}}{e^0\cdot\frac{e^s+e^{-s}}{2} + f^0\frac{e^s-e^{-s}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\underline{e}\cdot(e^s+e^{-s}) + \underline{f}\cdot(e^s-e^{-s})\right)}{\frac{1}{2}\left(e^0\cdot(e^s+e^{-s}) + f^0\cdot(e^s-e^{-s})\right)}$$

$$= \frac{\underline{e}\cdot e^s\cdot(1+e^{-2s}) + \underline{f}\cdot e^s\cdot(1-e^{-2s})}{e^0\cdot e^s\cdot(1+e^{-2s}) + f^0\cdot e^s(1-e^{-2s})} = \frac{\underline{e}\cdot(1+e^{-2s}) + \underline{f}\cdot(1-e^{-2s})}{e^0\cdot(1+e^{-2s}) + f^0\cdot(1-e^{-2s})}$$

$$= \frac{\underline{e} + \underline{e}\cdot e^{-2s} + \underline{f} - \underline{f}\cdot e^{-2s}}{e^0 + e^0\cdot e^{-2s} + f^0 - f^0\cdot e^{-2s}}$$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\underline{x}(s)}{x^0(s)} = \frac{\underline{e}+\underline{f}}{e^0+f^0}$$

$x^0(s)$ ist immer ungleich 0, da aus $Q(e)=1$ & $Q(f)=-1$, wie auch $e\perp f$ folgt

(i) $1 = (e^0)^2 - |\underline{e}|^2 \Rightarrow (e^0)^2 = |\underline{e}|^2 + 1 \geq 0$

(ii) $-1 = (f^0)^2 - |\underline{f}|^2 \Rightarrow (f^0)^2 = |\underline{f}|^2 - 1 \geq 0$

(iii) $e\perp f \Leftrightarrow \langle e,f\rangle = 0 \Leftrightarrow 0 = e^0f^0 - \sum_{i=1}^n e^if^i \Leftrightarrow e^0f^0 = \underline{e}\cdot\underline{f}$

Aus Cauchy-Schwarz-Ungl. folgt dann

$$|e|^2|f|^2 \geq (e\cdot f)^2 = (e^0)^2\cdot(f^0)^2 = (|e|^2+1)\cdot(|f|^2-1)$$
$$= |e|^2|f|^2 + |f|^2 - |e|^2 - 1$$
$$\Rightarrow (e^0)^2 = |e|^2 - 1 \geq |f|^2 > |f|^2 - 1 = (f^0)^2$$
$$\Rightarrow |f^0| < |e^0| \Rightarrow e^0 + f^0 \neq 0$$

Außerdem

$$|\underline{e}+\underline{f}|^2 = \langle \underline{e}+\underline{f}, \underline{e}+\underline{f}\rangle = |\underline{e}|^2 + |\underline{f}|^2 + 2\,\underline{e}\cdot\underline{f}$$
$$= |\underline{e}|^2+1+|\underline{f}|^2-1+2\,\underline{e}\cdot\underline{f}$$
$$= \underbrace{(e^0)^2}_{(i)} + \underbrace{(f^0)^2}_{(ii)} + \underbrace{2e^0\cdot f^0}_{(iii)} = (e^0+f^0)^2$$
$$\Rightarrow |\underline{e}+\underline{f}|^2 = (e^0+f^0)^2$$
$$\Rightarrow |\underline{e}+\underline{f}| = e^0+f^0$$
$\Rightarrow$ Also ist $\frac{\underline{e}+\underline{f}}{e^0+f^0}$ Einheits-vektor

$$\Rightarrow \lim_{s\to\infty} \frac{x(s)}{x^0(s)} = \Big(1, \underbrace{\frac{\underline{e}+\underline{f}}{e^0+f^0}}_{=1}\Big) \leftarrow \text{lichtartig.}$$

$$Q\Big(1, \frac{\underline{e}+\underline{f}}{e^0+f^0}\Big) = 1^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{e^i+f^i}{e^0+f^0} = 1-1=0$$

$\square$

2.2 Definition Randpunkte

Die lichtartigen 1d Unterräume von $\mathcal{F}$ bezeichnet man als Randpunkte von H

Bemerkung

Jede Gerade besitzt also unter den Randpunkten einen "Endpunkt".

2.3 Definition Busemann-Funktion

Zu einer gegebenen Gerade

$$x(s) = e \cosh s + f \sinh s$$

in H definiert man die Busemann-Funktion als

$$B(y) = \lim_{s \to \infty} [d(y, x(s)) - s].$$

Bemerkung

Die Funktion hängt von der Wahl der Geraden ab & der Wahl der Parametrisierung.
Da wir nur die Parametrisierung durch Bogenlänge zulassen, unterscheiden sich die Parametrisierungen derselben Gerade nur durch ihre Orientierung (Durchlaufsinn) & die Wahl des Nullpunktes $x(0)$.
Anschaulich gibt $B(y)$ den Abstand vom Endpunkt der Geraden an, abzüglich einer "unendlichen Konstante".

2.4 Beispiel

Die B-Funktion kann mit $\underline{x}(s) = \underline{e} + \underline{f}s$ mit $|\underline{f}| = 1$ auch im euklidischen Raum definiert werden. Dann ist $B(\underline{y}) = \lim [|\underline{y} - \underline{x}(s)| - s]$.

Wählen wir die cartesischen Koordinaten mit $\underline{e} = 0$ & $\underline{f} = (1, 0, \dots, 0)$, dann ist

$$B(\underline{y}) = \lim_{s \to \infty} [|(y_1 - s, y_2, \dots, y_n)| - s]$$

$$= \lim_{s \to \infty} \left[\sqrt{(y_1 - s)^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2} - s\right]$$

$$= \lim_{s \to \infty} \left[s\sqrt{1 - \frac{2y_1}{s} + \frac{y_1^2}{s^2} + \frac{y_2^2}{s^2} + \dots + \frac{y_n^2}{s^2}} - s\right]$$

NR: Taylor-Entwicklung um $z = 0$ von $\sqrt{1+z} \approx 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + O(z^3)$

Wähle $z = -\frac{2y_1}{s} + \frac{y_1^2}{s^2} + \dots + \frac{y_n^2}{s^2}$

$$\Rightarrow \sqrt{1+z} \approx 1 - \frac{y_1}{s} + \frac{\frac{y_1^2}{s^2} + \dots + \frac{y_n^2}{s^2}}{2} - \frac{\left(-\frac{2y_1}{s}\right)^2}{8} + O\left(\frac{1}{s^3}\right)$$

$$\approx 1 - \frac{y_1}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$= \lim_{s \to \infty} \left[s\left(1 - \frac{y_1}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)\right) - s\right]$$

$$= \lim_{s \to \infty} \left[-y_1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right]$$

$$= -y_1$$

Das kann man sich vorstellen als Abstand vom "unendlich fernen Punkt" in x_1-Richtung, abzüglich einer unendlichen Konstanten. Die Fläche konstanter B-Funktion sind hier parallele Ebenen, die auf der x^1-Achse senkrecht stehen.

2.5 Proposition

Die Horosphären sind genau die Flächen konstanter B-Funktion. Daher sind die Horosphären anschaulich die Flächen konstanten unendlichen Abstands von einem Randpunkt, also gewissermaßen Sphären um einen Randpunkt.

<u>Beweis:</u>

Durch geeignete L.-T. können wir $e = (1, 0, \dots, 0)$ & $f = (0, 1, 0, \dots, 0)$ erreichen

$$\Rightarrow x(s) = (\cosh s, \sinh s, 0, \dots, 0)$$

$$\Rightarrow \quad d(y, x(s)) = \operatorname{arcosh} \langle y, x(s) \rangle$$

$$= \operatorname{arcosh} (y^0 \cosh s - y^1 \sinh s)$$

$$= \operatorname{arcosh} \left(\tfrac{1}{2} e^s \left(y^0 (1 + e^{-2s}) - y^1 (1 - e^{-2s}) \right) \right) \quad (*)$$

$$\exists\, C > 0, x_0 > 0 : \quad \ln(2x) - \frac{C}{x^2} < \operatorname{arcosh} x < \ln(2x) \quad \text{für } x > x_0$$

Folgt aus der Reihenentwicklung von $\operatorname{arcosh}(x)$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(2x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2k \cdot (2k)!!} x^{-2k}$$

x^2

Es gilt $2\cosh y > e^y$. Für $y = \operatorname{arcosh} x$

$$\Rightarrow \underbrace{2\cosh \operatorname{arcosh} x}_{=x} > e^{\operatorname{arcosh} x}$$

$$\Rightarrow \ln(2x) > \operatorname{arcosh} x$$

falls lim existiert & positiv ist

$$\Rightarrow \lim_{s \to \infty} \left[\operatorname{arcosh} \left(\tfrac{1}{2} e^s f(s) \right) - s \right] = \ln \lim_{s \to \infty} f(s)$$

Anwenden auf $(*)$:

$$B(y) = \ln(y^0 - y^1)$$

Für den lichtartigen affinen Raum wie in 1.11,

$A = \{w + a + \lambda u : w \in W, \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit $a = (0, a^1, 0, \dots, 0)$, $u = (1, 1, 0, \dots, 0)$

& $W = \{(0, 0, w^2, \dots, w^n) : w^2, \dots, w^n \in \mathbb{R}\}$ gilt:

alle $y \in A$ haben $y^0 - y^1 = -a^1$.

$\Rightarrow$ B ist konstant auf $H \cap A$

$\Rightarrow$ $\forall h \in H$ $\exists$ negativer a^1-Wert: $h \in H \cap A$

$\Rightarrow$ Niveaumengen von B sind genau die Mengen der Form $H \cap A$

für verschiedene a^1-Werte. $\square$