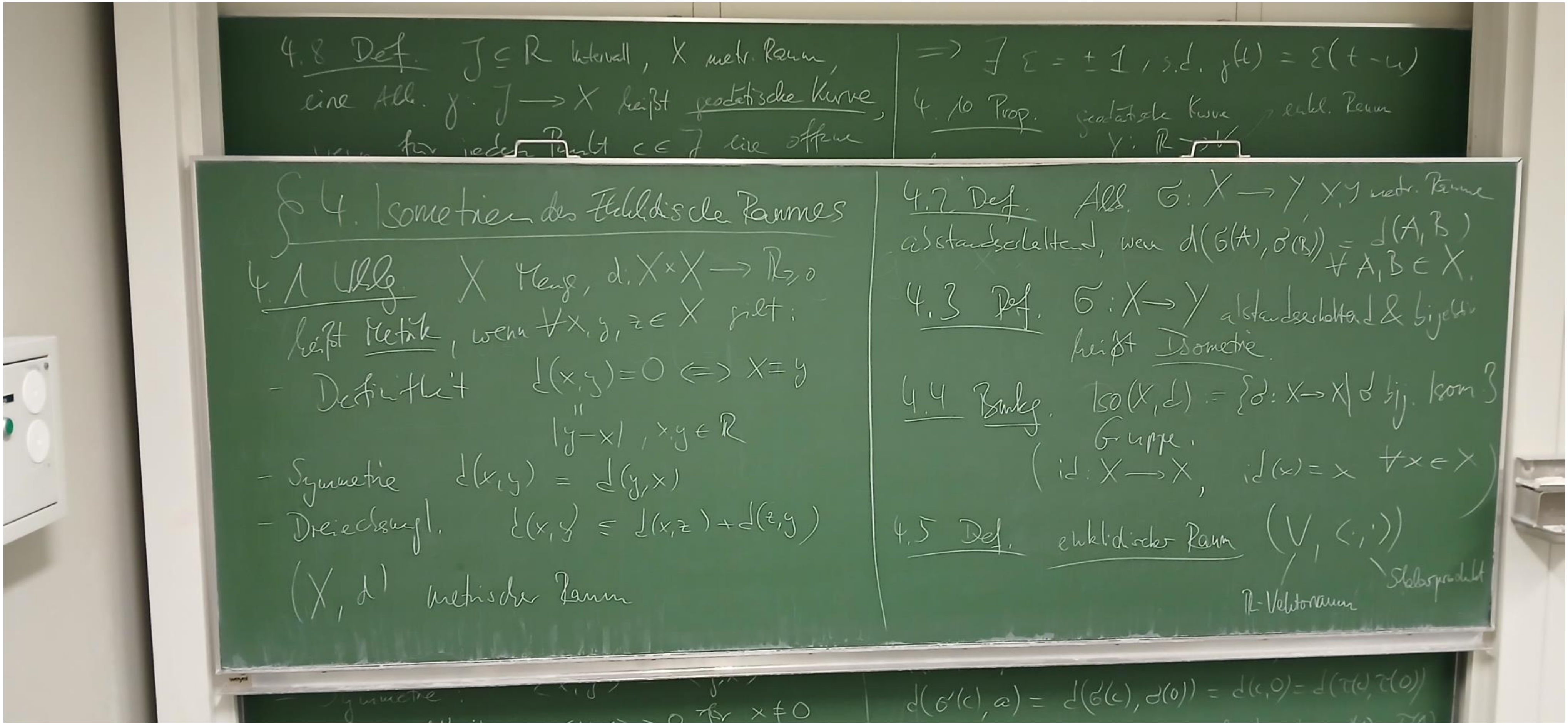
Vortrag von M. Kress zum Thema „Isometrien im euklidischen Raum“

- Eine **Kurzversion** des Vortrags ist auf meinem YouTube-Kanal abrufbar unter dem Link: https://youtu.be/Zyc0DPdJsTM?si=RNSOgDHzt2NOhTuf.
- Die Ausarbeitung folgt (bis auf die Einführung der Isometrien via orthogonale Matrizen…) dem Kapitel II aus dem Buch von **Iversen**.
- Die folgenden Bilder geben im Wesentlichen die **Tafelaufschriebe** wieder.



Vdlg. 4.6 V $\mathbb{R}$-VR, Abb. $\langle\,,\rangle: V\times V \to \mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$ heißt Skalarprodukt, falls gilt:

- Bilinearität: $\langle \lambda x+\mu y, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle$
  $\langle x, \lambda y+\mu z\rangle = \ldots$ analog
- Symmetrie: $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$
- positive Definitheit: $\langle x,x\rangle > 0$ für $x \neq 0$

4.7 Prop. Eine Isometrie $\sigma: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist entweder eine Translation $x\mapsto x+a$ oder eine Reflexion $x\mapsto b-x$.

Bew.: geg. σ Isometrie von $\mathbb{R}$, τ Reflexion oder Translation, die mit σ bei 0 oder 1 übereinstimmt.

z.z.: $\sigma = \tau$

Ann.: $\exists\, c\in\mathbb{R}: \tau(c)\neq\sigma(c) \Rightarrow a=\sigma(0)=\tau(0)$ ist Mittelpkt. von $\sigma(c)$ und $\tau(c)$, denn:

$d(\sigma(c),a) = d(\sigma(c),\sigma(0)) = d(c,0) = d(\tau(c),\tau(0))$
$= d(\tau(0),a)$. Ähnlich für b: $b=\sigma(1)=\tau(1)$

$\Rightarrow$ ↯ zu $a\neq b$. ▨

§4. Isometrien des Euklidischen Raumes

Vdlg. X Menge $d: X\times X\to\mathbb{R}_{\geq 0}$

4.2 Def. Abb. $\sigma: X\to Y$, X,Y metr. Räume abstandserhaltend, wenn $d(\sigma(A),\sigma(B)) = d(A,B)$ $\forall A,B\in X$.

4.3 Def $\sigma: X\to Y$ abstandserhaltend & bijektiv

4.8 Def. $J \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, X metr. Raum, eine Abb. $\gamma : J \longrightarrow X$ heißt <u>geodätische Kurve</u>, wenn für jeden Punkt $c \in J$ eine offene Umgebung $U \subseteq J$ existiert, so dass die Einschränkung von γ auf U ($\gamma : U \to X$) abstandserhaltend ist.

<u>Bsp. im $\mathbb{R}^n$:</u> Gerade

4.9 Lemma u Punkt in offenem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$, $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}$ geodätische Kurve mit $\gamma(u) = 0$.

$\Longrightarrow \exists\, \varepsilon = \pm 1$, s.d. $\gamma(t) = \varepsilon(t-u)$

4.10 Prop. geodätische Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to V$ (eukl. Raum) hat Form $\gamma(t) = et + v$, $t \in \mathbb{R}$, $|e| = 1$, v Punkt in V

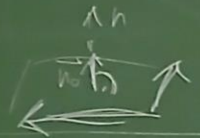
<u>Bew.:</u> $a \in \mathbb{R}$, J offenes Intervall um a, s.d. $\gamma|_J$ abstandserhaltend. $\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\Longrightarrow}$ für $r, s, t \in J$ liegen die Punkte $\gamma(r), \gamma(s), \gamma(t)$ auf einer <u>affinen</u> Linie.
fixiere $c, d \in J \to \gamma(J)$ enthalten in aff. Linie durch $\gamma(c), \gamma(d)$.

§ 4 Isometrien des Euklidischen Raumes

4.7 Def. Abb. $\sigma : X \longrightarrow Y$, X, Y metr. Räume abstandserhaltend, wenn $d(\sigma(A), \sigma(B)) = d(A, B)$ $\forall A, B \in X$.

$\Rightarrow$ Man kann Vektor c mit $|c| = 1$ finden, sodass
$\gamma(t) = c(t-a) + \gamma(a) \quad \forall t \in J$
$\Rightarrow$ diffbar mit $\gamma'(t)$ lokal konstant
$\Rightarrow \mathbb{R}$ zusammenhängend liefert $\gamma'(t)$ unabh. v. $t \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ Bel. ☐

4.11 Bsp. Reflexion R in affiner Hyperebene H von E mit $R(x) = x - 2\langle x-u, n\rangle n \quad \forall x \in V$



V eukl. Raum, $u \in H$ Pkt.
n Einheitsnormalenv. zu H

4.12 Satz Jede Isometrie I von $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ hat die Form $I(x) = Ox + b$, O orth. $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$

Wdhlg. A orthogonal $\Longleftrightarrow A^TA = AA^T = E_n$

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^TA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{E_2}_{n=2}$

Beweis zu 4.12

$\Rightarrow$ „$f(x) = Ox + v$ Isometrie?"
① Isometrie: $d(f(a), f(b)) = d(a,b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n$
② Berechnung der Abstände: geg.: $f(x) = Ox + b$.
$d(f(a), f(b))^2 = \langle f(a) - f(b), f(a) - f(b)\rangle$.
$f(a) = Oa + v, \quad f(b) = Ob + v$
daher: $f(a) - f(b) = Oa + v - (Ob + v) = O(a-b)$

$\Leftarrow$ „f Isometrie, dann hat die Form $f(x) = Ox + b$"
① f Isometrie, setze $v = -f(0)$, betrachte $T_v(x) = x + v$.
T_v ist ebenfalls Isometrie, da $d(T_v(x), T_v(y)) = d(x,y)$
② Verkettung der Isometrien: ...

(a) $d(\bar f(\lambda x), \lambda \bar f(x)) = 0 \Rightarrow \bar f(\lambda x) = \lambda \bar f(x)$
analog für (b)
$\bar f$ ist linear und kann als $\bar f(x) \overset{(*)}{=} Ax$ dargestellt werden ...

③ Orthogonalität von O: $O^TO = \mathbb{1}_n$

somit: $\langle O(a-b), O(a-b)\rangle = (O(a-b))^T(O(a-b)) = (a-b)^T O^T O(a-b)$

$\Rightarrow$ also $d(f(a), f(b))^2 = \langle a-b, a-b\rangle = d(a,b)^2$

$\Rightarrow$ Isometrie ✓ ☺

$\Leftarrow$ „f Isometrie, dann hat die Form $f(x) = Ox + b$"

① f Isometrie, setze $v = -f(0)$ betrachte $T_v(x) = x + v$.
T_v ist ebenfalls Isometrie, da $d(T_v(x), T_v(y)) = d(x,y)$

② Verkettung der Isometrien: $\bar f = T_v \circ f$. $\Rightarrow$ $\bar f$ Isometrie
$\rightsquigarrow$ $\bar f(0) = T_v(f(0)) = f(0) + v = 0$.

③ Linearität von $\bar f$: $\langle \bar f(x), \bar f(y)\rangle = \langle x,y\rangle$
Da $d(x,y) = d(\bar f(x), \bar f(y))$: $\langle x-y, x-y\rangle = \langle \bar f(x) - \bar f(y), \bar f(x) - \bar f(y)\rangle$

Weiter: $\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle - 2\langle x,y\rangle = \langle \bar f(x), \ldots\rangle \ldots$
da $\bar f(0) = 0$: $\langle x,x\rangle = \langle \bar f(x), \bar f(x)\rangle$ und $\langle y,y\rangle = \langle \bar f(y), \bar f(y)\rangle$
$\Rightarrow \langle \bar f(x), \bar f(y)\rangle = \langle x,y\rangle$

④ Skalar und Additivität
z.z.: ⓐ $\bar f(\lambda x) = \lambda \bar f(x)$, ⓑ $\bar f(x+y) = \bar f(x) + \bar f(y)$
ⓐ $d(\bar f(\lambda x), \lambda \bar f(x)) = 0 \Rightarrow \bar f(\lambda x) = \lambda \bar f(x)$
analog für ⓑ
$\bar f$ ist linear und kann als $\bar f(x) \overset{*}{=} Ax$ dargestellt werden, wobei $A \in Mat(n \times n)$.

⑤ Orthogonalität: $\langle x,y\rangle = \langle \bar f(x), \bar f(y)\rangle \overset{*}{=} (Ax)^T(Ay)$
$= x^T(A^TA)y \Rightarrow A^TA = \mathbb{1}_n \Rightarrow$ ✓ ☺

⑥ $\bar f(x) = Ax$, $\bar f = T_v \circ f$, $T_v \circ f(x) = Ax$.
$\Rightarrow f(x) = O(x) + b \Rightarrow$ Bew. ▨

$\Rightarrow$ Man kann Vektor c mit $|c| = 1$ finden, sodass
$\gamma(t) = c(t-a) + \gamma(a) \quad \forall t \in I$.
$\Rightarrow$ diffbar mit $\gamma'(t)$ lokal konstant
$\Rightarrow \mathbb{R}$ zusammenhängend liefert $\gamma'(t)$ und ... $t \in \mathbb{R}$

Wdh. A orthogonal $\Leftrightarrow A^TA = AA^T = E_n$

Bsp. $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow A^TA = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

4.13 Lemma Seien zwei Folgen von Pkt. $A_1, \dots, A_p$ und $B_1, \dots, B_p$ in E (eukl. Raum), s.d. $d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j)$ $\forall\, i,j = 1, \dots, p$

Dann: $\exists$ Isom. σ von E, die aus höchstens p Reflexionen besteht, wobei $\sigma(A_i) = B_i$ für $i = 1, \dots, p$.

Beweis: A, B Pkt., $\{X \in E \mid d(X,A) = d(X,B)\}$

Reflexion an Mittelsenkr.: $A \longleftrightarrow B$

(IA) $p = 1$ ✓

(IS) Isom. π besteht aus höchstens $p-1$ Reflexionen, überführt $A_1, \dots, A_{p-1} \to B_1, \dots, B_{p-1}$.

(1) $\pi(A_p) = B_p \to \sigma = \pi$

(2) $\pi(A_p) \neq B_p$, dann: $d(\pi(A_p), B_i) = \dots$

$\dots = d(\pi(A_p), \pi(A_i)) = d(A_p, A_i) = d(B_p, B_i)$ für $i = 1, \dots, p-1$

d.h. $B_1, \dots, B_{p-1}$ liegen auf Mittelsenkr. Hyperfläche

$\rightsquigarrow \rho$ Reflexion $\Rightarrow \sigma = \rho\,\tilde{\pi}$ ✓ ▨

4.14 Def. Ein euklidisches Simplex im n-dimensionalen Raum E ist eine Folge $A_0, A_1, \dots, A_n$ von Punkten in E, die in einer affinen Hyperfläche liegen.

def.

$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$ (const.), $a_1 \neq 0$, $a_n \neq 0$, $\forall a_i$

dim um 1 kleiner

⇒ Man kann Vektor e mit $|e| = 1$ finden, sodass $\gamma(t) = e(t-a) + \gamma(a)$ $\forall\, t \in J$.

Wdhlg. A orthogonal $\Longleftrightarrow A^T A = A A^T = E_n$

4.15 Satz $A_0, A_1, \dots, A_n$ euklidisches Simplex in E. Wenn zwei Isometrien α & β von E auf $A_0, \dots, A_n$ übereinstimmen, dann ist $\boxed{\alpha = \beta}$.

Beweis. (1) $\gamma = \beta^{-1} \circ \alpha$

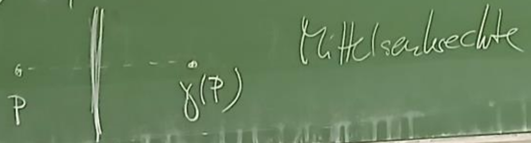
(2) $\gamma(A_i) = (\beta^{-1} \circ \alpha)(A_i) = \beta^{-1}(\beta(A_i)) = A_i$

d.h. γ lässt alle Ecken $A_0, \dots, A_n$ des Simplex fest.

(3) $\exists\, P \in E$, $\gamma(P) \neq P$.

(4) $d(\gamma(P), A_i) = d(P, A_i)$, weil γ Isometrie

(5)



(6) Da $\gamma(A_i) = A_i$ $\forall\, i = 0, \dots, n$, $d(\gamma(P), A_i) = d(P, A_i)$ müssen die Punkte $A_0, \dots, A_n$ alle auf dieser Mittelsenkrechten liegen. ↯ ∎

4.16 Satz Sei α eine Isometrie von E, die eine affine Hyperfläche K punktweise fixiert. Dann ist entweder α die Reflexion in K oder $\alpha = id$.

4.17 $e \in E$ (Vektor) $\quad \tau_e$ Translation $\quad \boxed{\tau_e(x) = e + x \quad \forall x \in E}$

Die Translationen bilden die Untergruppe $T(E)$ der Gruppe $Isom(E)$ aller Isometrien!

$\sigma \in O(E) \to$ orthogonale Gruppe des eukl. Raums

geschrieben werden.

als Produkt zweier ...

werden, d.h. $\psi = \tau_v \circ \varphi = \varphi \circ \tau_v$ mit τ_v

Translation entlang eines Vektors $v \in E$ und φ Isometrie mit festem Punkt. Eine solche Zerlegung von ψ

4.18 Satz. Jede Isometrie β des euklidischen Raumes E kann als $\beta = \tau_e \sigma$, $e \in E$, $\sigma \in O(E)$ → orthogonale Gruppe des eukl. Raums geschrieben werden.

Beweis $\overset{4.12}{\Longrightarrow}$ $I(x) = O(x) + b$ $\square$

4.19 Grundlegende Eigenschaften Linearisierung

① $\varphi(\psi(x)) = (\varphi \circ \psi)(x)$ für $\varphi, \psi \in Isom(E)$

② $\phi \in Isom(E) \rightsquigarrow \underbrace{\vec{\phi}}_{\text{Linearisierung}} = id \iff \phi$ Translation

③ $\sigma \tau_v \sigma^{-1} = \tau_{\sigma(v)}$ für $\sigma \in Isom(E)$, $v \in E$.

4.20 Klassifikationstheorem. Eine Isometrie ψ des euklidischen Raumes E kann als Produkt zweier kommutierender Isometrien zerlegt werden, d.h. $\psi = \tau_v \circ \varphi = \varphi \circ \tau_v$ mit τ_v Translation entlang eines Vektors $v \in E$ und φ Isometrie mit festem Punkt. Eine solche Zerlegung von ψ ist eindeutig.

4.21 Lemma. Eine Transformation $\sigma \in O(E)$ führt zu einer orthogonalen Zerlegung von E:

$$E = \ker(\sigma - id) \oplus Im(\sigma - id)$$

4.15 Satz. $A_0, A_1, \ldots, A_n$ euklidisches Simplex ... Isometrie/Transformation γ fixt

⑥ Da $\gamma(A_i) = A_i$ $\forall\, i = 0, \ldots, n$, $d(\gamma(P), A_i) = d(P, A_i)$ müssen die Punkte $A_0, \ldots, A_n$ alle auf dieser Mittel-

4.22 Anwendung des Klassifikationstheorems auf Dimensionen 2 und 3

2D-Isometrien

gerade Isometrien
- Rotation
- Translation

ungeraden Isometrien
- Spiegelung an Linie k
- Gleitspiegelung

3D-Isometrien

- Schraubung } gerade Isometrien
- Drehspiegelung
- Gleitspiegelung } ungerade Isometrien

4.15 Satz $A_0, A_1, \dots, A_n$ euklidisches Simplex in E, wenn zwei Isometrien α & β von E auf $A_0, \dots, A_n$ übereinstimmen, dann ist

⑥ Da $\gamma(A_i) = A_i \ \forall i = 0, \dots, n$, $d(\gamma(P), A_i) = d(P, A_i)$ müssen die Punkte $A_0, \dots, A_n$ alle auf dieser Mittelsenkrechten liegen. ↯ ▨

4.16 Satz Sei α eine Isometrie von E, die eine ... punktweise fixiert.