Grundlagen.

Wir betrachten einen reellen Vektorraum F der Dimension $n+1$ mit einer quadratischen Form vom Sylvester Typ $(-n,1)$.

① Die Hyperboloide $S(F)$ die aus allen Vektoren der Norm 1 besteht, besteht aus 2 Blättern.

Generell gibt es keine Möglichkeit, die beiden Blätter des Hyperboloide zu unterscheiden. Daher bezeichnen wir eines dieser Blätter mit H^n

Metrik auf H^n: Der Ausgangspunkt dafür ist $\langle P,Q\rangle \geq 1$ das von jeden zwei Punkten P und Q in H^n erfüllt wird (1.6.2., 1.6.4)

Wir definieren den hyp. Abstand $d(P,Q)$ zw. P & Q als die positive reele Zahl für die gilt: 4.1 $\cosh d(P,Q) = \langle P,Q\rangle$; $P,Q \in H^n$

Es gilt: $d(P,Q) = d(Q,P)$ aber auch $d(P,Q) > 0$ für $P \neq Q$

Wenn P und Q linear unabh., dann können wir zsm mit 1.6.2 folgern: $\langle P,Q\rangle > 1$

Definition der hyperbolischen Geometrie

Einführung

Grundlage: · reeler Vektorraum F der Dimension $n+1$, Sylvester Typ $(-n,1)$.

· Hyperboloide $S(F)$ besteht aus den Vektoren der Norm 1

Einführung einer Metrik: $<P,Q> \geq 1$, $P,Q \in H^n$

→ hyperbolischer Abstand $d(P,Q)$ ist symmetrisch in P und Q

4.1 $\cosh d(P,Q) = <P,Q>$; $P,Q \in H^n$

Es gilt: $d(P,Q) > 0$ für $P \neq Q$

Da P und Q lin. unabhängig, gilt nach 1.6.2 $<P,Q> > 1$

4.2 Dreiecksungleichung

Beliebige drei Punkte A,B,C im Raum H^n erfüllen die Ungleichung

$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$$

$<$, wenn A,B und C linear unabhängig im Raum F sind

Beweis

Betrachten wir die Punkte A,B,C im Raum H^n und setzen:

$a = d(B,C)$ (Distanz zw. B und C)

$b = d(C,A)$

$c = d(A,B)$

Wir berechnen die Determinante der Gram-Matrix (1.1.10) der Punkte A,B,C

mit dem hyperbolischen Abstand 4.1: $\cosh d(e_i,e_j) = <e_i,e_j>$

4.3

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{ch} a & \operatorname{ch} b \\ \operatorname{ch} a & 1 & \operatorname{ch} c \\ \operatorname{ch} b & \operatorname{ch} c & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (1-\cosh^2 c) - \cosh a(\cosh a - \cosh b \cosh c) + \cosh b(\cosh a \cosh c - \cosh b)$$

$$= 1 - \cosh^2 a - \cosh^2 b - \cosh^2 c + 2\cosh a \cosh b \cosh c$$

$$= (\cosh^2 b - 1)(\cosh^2 c - 1) - (\cosh b \cosh c - \cosh a)^2 - \sinh^2 b \sinh^2 c - (\cosh b \cosh c - \cosh a)^2$$

$$= (\cosh a - \cosh b \cosh c + \sinh b \sinh c)(\cosh b \cosh c + \sinh b \sinh c - \cosh a)$$

$$= [\cosh a - \cosh(b-c)][\cosh(c+b) - \cosh(a)]$$

$$= 4 \sinh \tfrac{1}{2}(a+b-c) \sinh \tfrac{1}{2}(a+c-b) \sinh \tfrac{1}{2}(a+b+c) \sinh \tfrac{1}{2}(c+b-a)$$

$$\boxed{4.4 \quad \Delta = 4 \operatorname{sh} p \operatorname{sh}(p-a) \operatorname{sh}(p-b) \operatorname{sh}(p-c)} \; ; \; p = \tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

Fall 1:

A, B, C sind linear unabhängig im umgebenden Raum F. mit einem Unterraum vom Sylvester-Typ $(-2,1)$.

Aus I.3.5 folgt $\Delta > 0$:

I.3.5: Discriminant inequality

Sei (E, Q) eine nicht singuläre quadratische Form vom Sylvestertyp $(-s,r)$ und

Sei $e_1, \dots, e_n$ eine bel. Basis des eukl. Raums E.

Dann gilt: $\operatorname{sgn} \det_{ij} \langle e_i, e_j \rangle = (-1)^s$

Mithilfe von dem Satz bestimmen wir das Vorzeichen der Δ.

$\Rightarrow$ ist nur von der Anzahl s der negativen Eigenwerte im Sylvestertyp abhängig

In unserem Fall für $(-2,1)$ ist $\Delta > 0$

Wenn $c \geq a$ und $c \geq b$, dann gilt:

$$p - a = \tfrac{1}{2}(a+b+c) - a = \tfrac{1}{2}(c-a) + \tfrac{1}{2} b > 0$$

$$p - b = \tfrac{1}{2}(a+b+c) - b = \tfrac{1}{2}(c-b) + \tfrac{1}{2} a > 0$$

Da $\Delta > 0$ und $p > 0$, folgt aus der Faktorisierung 4.4:

$$p - c > 0$$

Es folgt: $a + b - c = 2(p-c) > 0$

Somit erhalten wir die gesuchte scharfe Ungleichung $a + b > c$

Fall 2

Sind die Vektoren A, B, C linear abhängig im umgebenden Raum F, dann ist $\Delta = 0$

Wenn A, B, C nicht selben Punkt darstellen, gilt: $p \neq 0$

Aus 4.4 folgt: $p-a=0$ oder $p-b=0$ oder $p-c=0$

Für $p-c = \frac{1}{2}(a+b+c)-c = 0$ sodass $a+b=c$

Somit gilt: $d(A,B) \leq d(A,C)+d(C,B)$

$\square$

Definition 4.5

Ein Tangentialvektor T an einem Punkt $A \in H^n$ ist ein Vektor $T \in F$ mit $\langle T, A \rangle = 0$

Ein Tangentialvektor der Norm -1 wird als Einheitstangentialvektor bezeichnet

Der Raum der Tangentialvektoren an H^n bei A bildet eine Hyperebene im F vom Sylvester-Typ $(-n, 0)$, die als Tangentialraum $T_A(H^n)$ von H^n am Punkt A notiert wird.

Lemma 4.6

Seien A und B Punkte im hyperbolischen Raum H^n. So kann man einen Einheitstangentialvektor U zu H^n an A so wählen, sodass:

$$B = A \cosh d(A,B) + U \sinh d(A,B)$$

Beweis

1. Fall: $A=B$

Wenn $A=B$ und somit $d(A,B)=0$, dann gilt

$\cosh(A,B) = 1$ und $\sinh d(A,B) = 0$

Man wählt einen beliebigen Einheits-Tangentialvektor U an A, sodass:

$$B = A = A \cosh 0 + U \sinh 0 = A \cdot 1 + U \cdot 0 = A$$

$\Rightarrow$ Der erste Fall für $A=B$ ist erfüllt

Fall 2: $A \neq B$

Da $A \neq B$, sind beide Vektoren linear unabhängig. Die von A und B aufgespannte Ebene R hat den Sylvester Typ $(-1,1)$

I. 6.3 Diskriminantenlemma

Es sei $R \subseteq F$ eine Ebene, aufgespannt durch die Vektoren e, f. Die Signatur von R ist über die Diskriminante

$$\Delta = \langle e,e \rangle \langle f,f \rangle - \langle e,f \rangle^2$$

über folgende Tabelle festgelegt

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$(-1,1)$	$(-1,0)$	$(-2,0)$

Nach I.6.3 kann er nur eine von $(-1,1)$, $(-1,0)$ oder $(-2,0)$ annehmen.

$\rightarrow$ nur $(-1,1)$ beinhaltet die Vektoren der Norm 1.

Sei $\{A, U\}$ die Basis von R, können wir B schreiben als:

$$B = xA + yU \quad ; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Da $\langle A,A \rangle = 1$ $\langle U,U \rangle = -1$ und $\langle A,U \rangle = 0$:

$$\langle B,B \rangle = \langle xA+yU, xA+yU \rangle = x^2 \langle A,A \rangle + 2xy \langle A,U \rangle + y^2 \langle U,U \rangle$$

$$= x^2(1) + 0 + y^2(-1) = x^2 - y^2 = 1 \qquad \text{da } \langle B,B \rangle = 1$$

Also gilt: $x^2 - y^2 = 1$

Anwenden der hyperbolischen Identität: $\cosh^2 s - \sinh^2 s = 1$

So gilt: $x = \cosh s$ und $y = \sinh s$

$$B = A \cosh s + U \sinh s$$

Gleichung ändert sich nicht unter der Substitution $(U,s) \mapsto (-U,s)$

Sodass OE gilt: $s \geq 0$

Beachte: Unter Substitution bleibt die Darstellung von B unverändert für $u' = -u$, $s' = -s$

Bestimmen von s:

Nach 4.1 ist der hyperbolische Abstand definiert als $\cosh d(A,B) = \langle A,B \rangle$

$$\langle A,B \rangle = \langle A, A\cosh s + U \sinh s \rangle = \cosh s \langle A,A \rangle + \sinh s \langle A,U \rangle = \cosh s$$

So gilt: $\cosh d(A,B) = \cosh s$ also: $d(A,B) = s$

$$\rightarrow \quad B = A \cosh d(A,B) + U \sinh d(A,B)$$

$\square$

Geodäten

Ausgehend von einem Punkt $A \in H^n$ und einem Einheitstangentialvektor T bei H^n an A, kann man eine Kurve $\phi : \mathbb{R} \rightarrow H^n$ konstruieren durch:

$$\phi(s) = A \cosh s + T \sinh s \qquad ; s \in \mathbb{R}$$

Wir zeigen, dass ϕ eine Geodäte ist, mithilfe vom hyperbolischen Abstand zw. $\gamma(s)$ und $\gamma(t)$, $s,t \in \mathbb{R}$:

$$\cosh d(\gamma(t), \gamma(s)) = \langle \gamma(t), \gamma(s) \rangle = \cosh(t-s) = \cosh |t-s|$$

Es folgt: $d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t-s|$, $s,t \in \mathbb{R}$

$\phi : \mathbb{R} \rightarrow H^n$ ist eine Geodäten Kurve

Proposition 4.7

Jede Geodätenkurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow H^n$ kann geschrieben werden als:

$$\gamma(t) = A \cosh t + T \sinh t \qquad ; t \in \mathbb{R}$$

wobei $A \in H^n$ und T ein Einheits-Tangentialvektor zu H^n an A ist.

Beweis

Sei $u \in \mathbb{R}$ fest, J ein offenes Intervall um u, sodass γ auf J abstandserhaltend ist.

Aus Dreiecksungleichung 4.2:

Für drei Parameter $r, s, t \in J$ sind $\gamma(r), \gamma(s), \gamma(t)$ lin. abh.

Insbesondere gilt:

Wählen wir zwei Punkte $c, d \in J$ sodass $\gamma(c)$ und $\gamma(d)$ lin. unabh. sind, so spannen $\gamma(c)$ und $\gamma(d)$ eine Ebene R auf, die $\gamma(J)$ enthält.

Setze $A = \gamma(u)$ und sei $T \in T_A(H^n)$ ein in R enthaltender Einheitstangentialvektor.

Da $\gamma(J) \subseteq R$, gilt mit 4.6 und Lemma 1.5, dass wir ein $\varepsilon = \pm 1$ finden, sodass: $\gamma(t) = A \cosh \varepsilon(t-u) + T \sinh \varepsilon(t-u) \quad \forall t \in J$

$\Rightarrow$ γ ist stetig diffbar auf J mit $\gamma'(u) = \varepsilon T$

$$\gamma'(t) = A \cdot \varepsilon \sinh(\varepsilon(t-u)) + T \cdot \varepsilon \cosh(\varepsilon(t-u))$$

Für $t = u$ gilt: $\gamma'(t) = A \cdot \varepsilon \underbrace{\sinh(0)}_{0} + T \cdot \varepsilon \underbrace{\cosh(0)}_{1}$

$$\Rightarrow \gamma(t) = \gamma(u) \cosh(t-u) + \gamma'(t) \sinh(t-u)$$

γ wird in einer Umgebung von $u \in \mathbb{R}$ aus den Werten $\gamma(u)$ und $\gamma'(u)$ rekonstruiert

2. Schritt:

zu zeigen, dass zwei geodätische Kurven $\sigma, \gamma : \mathbb{R} \to H^n$ die auf einer Umgebung von 0 übereinstimmen, schon gleich sein müssen

Sei also $\{t \in \mathbb{R} \mid \sigma(t) = \gamma(t),\ \sigma'(t) = \gamma'(t)\}$

$\to$ Die Menge ist abgeschlossen, da $\sigma, \sigma', \gamma, \gamma'$ stetig und offen wegen $\gamma(t) = \gamma(u)\cosh(t-u) + \gamma'(t)\sinh(t-u)$

Da die Menge auch nicht leer ist, folgt aus der Tatsache, dass $\mathbb{R}$ zusammenhängend ist:

$\gamma = \sigma$

Angewandt auf eine geodätische Kurve γ und σ, und mit $u=0$ folgt:

$$\gamma(t) = A\cosh(t) + T\sinh(t) \quad , t \in \mathbb{R} \qquad \square$$

Eine Geodätenkurve $\gamma : \mathbb{R} \to H^n$ ist abstandserhaltend und nicht nur lokal abstandserhaltend.

Unter einer Geodätenlinie oder hyperbolischen Linie in H^n versteht man das Bild einer Geodätenkurve $\gamma : \mathbb{R} \to H^n$

Wir haben somit gesehen, dass durch zwei versch. Punkte von H^n eine eindeutige Geodätenlinie verläuft.

Isometrien

Eine Lorentz-Transformation $\sigma \in Lor(F)$ erhält die beiden Blätter der einheits Hyperbel $S(F)$: Sie induziert eine Isometrie des hyperbolischen Raums H^n.

Lemma 4.8

Gegeben seien zwei Folgen $A_1, \dots, A_p$ und $B_1, \dots, B_p$ von Punkten aus H^n, sodass:

$$d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j) \quad ; \quad i,j = 1, \dots, p$$

Dann existiert eine Isometrie σ, die aus höchstens p Lorentz-Reflexionen besteht, sodass $\sigma(A_i) = B_i \quad ; \quad i = 1, \dots, p$

Beweis:

Betrachte zwei versch. Punkte A und B in H^n. Die Mittelsenkrechte A und B sei:

$$\{ P \in H^n \mid d(A,P) = d(B,P) \}$$

Aus dem hyperbolischen Abstand folgt:

$$\cosh(A,P) = \langle A,P \rangle \qquad \cosh d(B,P) = \langle B,P \rangle$$

sodass $\langle A,P \rangle = \langle B,P \rangle$

Umgeformt: $\langle A-B, P \rangle = 0$

Setzen wir $N = A-B$: $\langle N, P \rangle = 0$

P ist orthogonal zu $N = A-B$ und der Schnitt zwischen dem Hyperboloid $\mathcal{H}^n$ und linearen Hyperebene $\langle N, P \rangle = 0$

Es gilt:

$$\langle N, N \rangle = \langle A-B, A-B \rangle = \langle A, A \rangle - 2\langle A, B \rangle + \langle B, B \rangle = 2 - 2\underbrace{\langle A, B \rangle}_{>0} < 0$$

Induktion:

Induktionsanfang:

für $p=1$: es existieren zwei Punkte A_1 und B_1 in $\mathcal{H}^n$

$\rightarrow$ Isometriegruppe von $\mathcal{H}^n$ ist transitiv auf $\mathcal{H}^n$

$\rightarrow$ Isometrie als einzige Lorentz-Reflexion dargestellt

Induktionsannahme:

Lemma gilt für $p-1$ Punkte $\Rightarrow$ Es gibt eine Isometrie ρ, zusammengesetzt aus höchstens $p-1$ Lorentz-Reflexionen,

sodass: $\rho(A_i) = B_i \quad \forall\, i = 1, \dots, p-1$

Induktionsschritt:

Betrachte p-ten Punkt, also $\rho(A_p)$ und B_p

1. Fall: $\rho(A_p) = B_p$

$\rightarrow$ Wenn Isometrie ρ, A_p auf B_p abbildet, ist sonst nichts mehr notwendig

Setze $\sigma = \rho$, dann gilt $\forall\, i = 1, \dots, p$: $\sigma(A_i) = B_i$

Somit ist Isometrie σ eine Verkettung von höchstens $p-1$ Lorentz-Reflexionen

Fall 2: $\rho(A_p) \neq B_p$: z.z.: Es gibt eine Lorentz Reflexion τ, sodass $\sigma = \tau \circ \rho$, und $\sigma(A_i) = B_i \quad \forall i = 1, \dots, p$

Da $d(\rho(A_p), B_i) = d(\rho(A_p), \rho(A_i)) = d(A_p, A_i) = d(B_p, B_i)$; $i = 1, \dots, p-1$;

liegen die Punkte $B_1, \dots, B_{p-1}$ auf hyp. Mittelsenkrechtenspiegel zw. $\rho(A_p)$ und B_p.

Spiegel: $\{ P \in \mathcal{H}^n \mid d(P, \rho(A_p)) = d(P, B_p) \}$

Definition der Lorentz-Reflexion J entlang der Hyperebene:

$J(\rho(A_p)) = B_p$ und $J(B_p) = \rho(A_p$

Es gilt:

$$\sigma(A_i) = (J \circ \rho)(A_i) = J(\rho(A_i)) = J(B_i) = B_i \quad ; \; i = 1, \dots, p-1$$

und

$$\sigma(A_p) = (J \circ \rho)(A_p) = J(\rho(A_p)) = B_p$$

$\rightarrow$ Die Isometrie σ ist eine Zusammensetzung aus höchstens p Lorentz-Reflexionen.

Theorem 3.11

Jede Isometrie β der Sphäre S^n wird induziert durch eine orth. Transformation des umgebenden eukl. Raums

Theorem 4.9

Eine Isometrie β des hyperbolischen Raums H^n wird durch eine Lorentz-Transformation des umgebenden Raums F induziert

Definition Hyperbolischer Simplex:

Unter einem hyperbolischer Simplex definiert man eine Folge $A_0, \dots, A_n$ von Punkten in H^n, die in F linear unabhängig sind.

Beweis

Wählen wir jetzt einen hyperbolischen Simplex und mit Lemma 4.8 können wir eine Isometrie wählen die sich aus höchstens $n+1$ Lorentz Refexionen zusammensetzt und $\sigma(A_i) = \beta(A_i) \; \forall \, i = 0, \dots, n$ erfüllt.

Definieren wir jetzt die Isometrie $J = \beta^{-1}\sigma$, dann gilt:

$$J(A_i) = \beta^{-1}\sigma(A_i) = \beta^{-1}\beta(A_i) = A_i \qquad \forall \; i = 0, 1, \dots, n$$

Somit fixiert J alle Punkte des Simplex $A_0, A_1, \dots, A_n$

Annahme: $\exists$ Punkt $P \in H^n$ mit $J(P) \neq P$.

Da J eine Isometrie, gilt $\forall\, i = 0, 1, \dots, n$:

$$d(J(P), A_i) = d(P, J^{-1}(A_i)) = d(P, A_i)$$

$\Rightarrow$ $J(p)$ und P haben gleichen Abstand von jedem A_i

Somit liegen die Punkte $A_0, A_1, \dots, A_n$ alle auf der hyperbolischen Hyperebene

Widerspruch: Da $A_0, A_1, \dots, A_n$ ein hyp. Simplex und linear unabh., können nicht alle in Hyperebene liegen.

Es muss daher gelten:

J = identität und somit $J(P) = P$ $\forall P \in H^n$. Es folgt:

$$\beta^{-1}\sigma = \mathrm{id} \implies \sigma = \beta$$

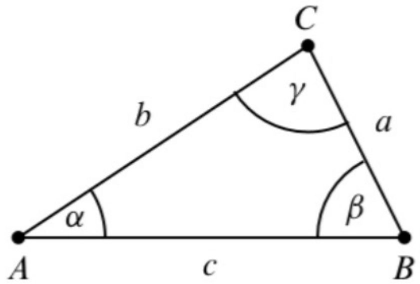
Da σ aus Lorentz-Transformationen besteht, folgt:

β wird durch Lorentz-Transformationen des umgebenden Raums F induziert $\square$

Trigonometrie

Betrachte ein geodätisches Dreieck ABC in der hyperb. Ebene H^n, die durch Geodätische der Länge a, b, c verbunden sind, die >0 sind.

Die Innenwinkel in den Ecken bezeichnen wir mit α, β, γ.



Beweis:

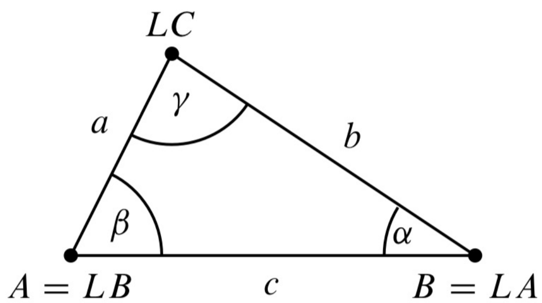
Wir wollen Beziehungen zw. den Seitenlängen und den Winkeln finden. Da Isometrien die Seitenlängen und die Winkel nicht ändern, können wir zunächst durch eine Isometrie den Punkt A auf

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ abbilden, und B in ~~xz-Ebene~~ drehen $B = \begin{pmatrix} \sinh(c) \\ 0 \\ \cosh(c) \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} \sinh(b)\cos(\alpha) \\ \sinh(b)\sin(\alpha) \\ \cosh(b) \end{pmatrix}$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gilt

Wir verwenden die Isometrie L aus (4.20) Bär, die die Punkte A und B vertauscht, mit $r = c$ auf das gesamte Dreieck an

$$L := \begin{pmatrix} -\cosh(r) & 0 & \sinh(r) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh(r) & 0 & \cosh(r) \end{pmatrix} \in G_K \qquad (4.20)$$



Da die Seite von LC nach LB Länge a hat und der Winkel in $A = LB$ β ist gilt:

Erste Darstellung von LC:

$$LC = \begin{pmatrix} \sinh(a)\cos(\beta) \\ \sinh(a)\sin(\beta) \\ \cosh(a) \end{pmatrix}$$

(Zweite Darstellung von $\angle C$:

$$\angle \cdot C = \begin{pmatrix} -\cosh(c) & 0 & \sinh(c) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh(c) & 0 & \cosh(c) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sinh(b)\cos(\alpha) \\ \sinh(b)\sin(\alpha) \\ \cosh(b) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\cosh(c)\sinh(b)\cos(\alpha) + \sinh(c)\cosh(b) \\ \sinh(b)\sin(\alpha) \\ -\sinh(c)\sinh(b)\cos(\alpha) + \cosh(c)\cosh(b) \end{pmatrix}$$

$\angle C = \angle \cdot C$

$$\sinh(a)\cos(\beta) = -\cosh(c)\sinh(b)\cos(\alpha) + \sinh(c)\cosh(b) \qquad \mathrm{I}$$

$$\sinh(a)\sin(\beta) = \sinh(b)\sin(\alpha) \qquad \mathrm{II}$$

$$\cosh(a) = -\sinh(c)\sinh(b)\cos(\alpha) + \cosh(b)\cosh(c) \qquad \mathrm{III}$$

Aus II folgt der Sinussatz: $\dfrac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \dfrac{\sinh(b)}{\sin(\beta)}$

Aus III folgt Seitenkosinussatz:

$$\cosh(a) = -\sinh(c)\sinh(b)\cos(\alpha) + \cosh(b)\cosh(c)$$

Winkelkosinussatz

$$\mathrm{I} \cdot \cos(\alpha) - \mathrm{II} \cdot \sin(\alpha)$$

$$\sinh(a)\cos(\beta)\cos(\alpha) = -\cosh(c)\sinh(b)\cos^2(\alpha) + \sinh(c)\cosh(b)\cos(\alpha)$$

$$\sinh(a)\sin(\beta)\sin(\alpha) = \sinh(b)\sin^2(\alpha)$$

$\mathrm{I} \cdot \cos(\alpha) - \mathrm{II} \cdot \sin(\alpha) =$ $\qquad \mathrm{IV}$

$$\sinh(a)\left(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\right) = -\cosh(c)\sinh(b)\cos(\alpha)^2 + \sinh(c)\cosh(b)\cos(\alpha) - \sinh(b)\sin(\alpha)^2$$

Wir betrachten in I das Dreieck ACB statt ABC (b und c vertauschen)

$$\sinh(a)\cos(\gamma) = -\cosh(b)\sinh(c)\cos(\alpha) + \sinh(b)\cosh(c) \qquad \mathrm{V}$$

V in IV einsetzen:

$$\sinh(a)(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta))$$

$$= -\cosh(c)\sinh(b)\cos(\alpha)^2 - \sinh(a)\cos(\gamma) + \sinh(b)\cosh(c) - \sinh(b)\sin(\alpha)^2$$

Trigonometrische Identität:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$= \cosh(c)\sinh(b)(1-\cos(\alpha)^2) - \sinh(a)\cos(\gamma) - \sinh(b)\sin(\alpha)^2$$

$$= \cosh(c)\sinh(b)\sin^2(\alpha) - \sinh(a)\cos(\gamma) - \sinh(b)\sin(\alpha)^2$$

Verwenden vom

Sinussatz:

$$\sinh(b) = \frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} \cdot \sin(\beta)$$

$$\Rightarrow \cosh(c)\sinh(a)\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) - \sinh(a)\cos(\gamma) - \sinh(a)\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Durch $\sinh(a)$ dividieren und addieren $\sin(\alpha)\sin(\beta)$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cosh(c)\sin(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\gamma)$$

$$\Rightarrow \cos(\gamma) = \cosh(c)\sin(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\alpha)\cos(\beta) \quad \square$$

Trigonometrische Identität

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$$

Kosinus - Additionstheorem

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

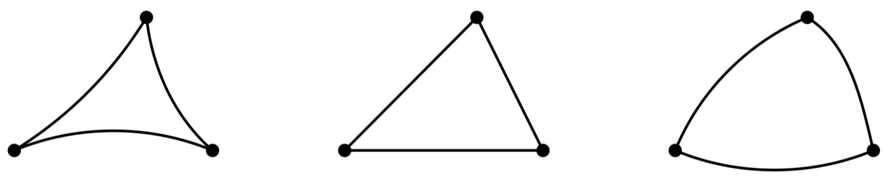
Winkelsumme für $\kappa=0$

$$\cos(\gamma) = \sin(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\alpha)\cos(\beta) = -\cos(\alpha+\beta) = \cos(\pi-\alpha-\beta)$$

falls $\kappa<0$, gilt für $c>0$, dass $\cosh(c)>1$:

$$\cos(\gamma) > \sin(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\alpha)\cos(\beta) = -\cos(\alpha+\beta) = \cos(\pi-\alpha-\beta)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha+\beta+\gamma < \pi$$



$\kappa < 0$ $\quad$ $\kappa = 0$ $\quad$ $\kappa > 0$