III. Hyperbolische Ebene H^2

1 Grundlagen der hyperbolischen Ebene

1.1.1 Def.: Der Vektorraum $sl_2(\mathbb{R})$

Die hyperbolische Ebene H^2 wird mithilfe des Vektorraums $sl_2(\mathbb{R})$ modelliert.
Der Raum $sl_2(\mathbb{R})$ ist definiert als der Vekorraum aller 2×2-Matrizen mit Spur 0:

$$sl_2(\mathbb{R}) = \{R \in M_2(\mathbb{R}) \mid tr(R) = 0\}$$

1.1.2 Behauptung: Eine Matrix $R \in sl_2(\mathbb{R})$ erfüllt die Eigenschaft:

$$R^2 = -\det(R)\cdot I \qquad (*)$$

Beweis

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & a^2+bc \end{bmatrix} = (a^2+bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2 Def.: Das innere Produkt

Für $R, S \in sl_2(\mathbb{R})$ gilt:

1. Die symmetrische bilineare Form $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist definiert durch $\langle R, S\rangle = -\frac{1}{2} tr(RS)$

2. Die zugehörige quadratische Form ist die Determinante: $\det(R) = \langle R, R$

1.3 Def

Durch Polarisation von $(*)$ in (1.1.2) erhalten wir $(R+S)^2 - R^2 - S^2 = -2\langle R, S\rangle \cdot I$

dadurch erhalten wir $RS + SR = -2\langle R, S\rangle \cdot I$ für $R, S \in sl_2(\mathbb{R})$

1.4 Behauptungen

(1) $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bilden eine Orthonomalbasis für $sl_2(\mathbb{R})$

(2) $sl_2(\mathbb{R})$ hat den Sylvester-Typ $(-2, 1)$

Beweis

(1) Für $\langle E_1, E_1\rangle = -\frac{1}{2} tr(E_1^2) \Rightarrow E_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow tr\, E_1^2 = tr(I) = 2$

somit $\langle E_1, E_1\rangle = -\frac{1}{2}\cdot 2 = -1$

Analog: $\langle E_2, E_2\rangle = -1$ und $\langle E_3, E_3\rangle = 1$

Orthogonalität: $\langle E_1, E_2\rangle = -\frac{1}{2} tr(E_1 E_2)$

$$E_1 E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$tr(E_1 E_2) = 0 \Rightarrow \langle E_1, E_2\rangle = -\frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

Analog $\langle E_2, E_3\rangle = 0$ und $\langle E_1, E_3\rangle = 0$

Da $\langle E_i, E_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ haben wir eine Orthonormalbasis für $sl_2(\mathbb{R})$

Gram-Matrix

(2) $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(B - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det(B - \lambda I) = (-1-\lambda)^2 (1-\lambda)$

$-1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ zweifache Nullstelle

$1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ einfache Nullstelle $\boxed{//}$

1.5 Def.: alternierende Volumenform $\Rightarrow$ Sylvestertyp $(-2, 1)$

Die alternierende Volumenform vol ist definiert durch.

$$\mathrm{vol}(K, L, M) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(KLM) \quad , \text{wobei} \quad K, L, M \in sl_2(\mathbb{R})$$

Diese Form eleminiert alle Tripel in denen 2 Vektoren gleich sind

1.6 Satz

Seien $K, L, M \in sl_2(\mathbb{R})$. Wenn K, L und M eine orthonormale Basis von $sl_2(\mathbb{R})$ bilden, dann gilt:

$$\mathrm{vol}(K, L, M) = \pm 1$$

Beweis

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$B_1 \cdot B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B_3$

$B_3 \cdot B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

$\operatorname{tr}(B_1 B_2 B_3) = \operatorname{tr}(-1) = -\operatorname{tr}(I) = -2$

$\mathrm{vol}(B_1, B_2, B_3) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(B_1 B_2 B_3) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) = 1$

1.7. Def.: Wedge-Produkt

Seien $K, L \in sl_2(\mathbb{R})$. Das Wedge-Produkt zweier Matrizen ist definiert als:

$$K \wedge L = \frac{1}{2}(KL - LK)$$

1.8 Satz

Das Wedge-Produkt hängt eng mit der alternierenden Volumenform zusammen, so gilt für $K, L, M \in sl_2(\mathbb{R})$

$$\langle K \wedge L, M \rangle = \mathrm{vol}(K, L, M)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\langle K \wedge L, M \rangle &\overset{\text{Def. 1.5}}{=} -\frac{1}{2} \operatorname{tr}((K \wedge L) M) \\
&\overset{\text{Def. 1.6}}{=} -\frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(\left(\frac{1}{2}(KL - LK)\right) M\right) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{tr}(KLM - LKM) \\
&= -\frac{1}{4} \operatorname{tr}(KLM) + \frac{1}{4} \operatorname{tr}(LKM) \\
&= \frac{1}{2} \mathrm{vol}(K, L, M) - \frac{1}{2} \mathrm{vol}(L, K, M) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{vol}(K, L, M) - \mathrm{vol}(L, K, M)) \\
&= \mathrm{vol}(K, L, M) \quad \square
\end{aligned}$$

1.9 Satz

Für $A,B,C \in sl_2(\mathbb{R})$ gilt $A\wedge(B\wedge C) = \langle A,C\rangle B - \langle A,B\rangle C$

Beweis:
$$\begin{aligned} A\wedge(B\wedge C) &= A\wedge\left(\tfrac{1}{2}(BC-CB)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(A\wedge(BC) - A\wedge(CB)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}(A(BC)-(BC)A) - (\tfrac{1}{2}(A(CB)-(CB)A))\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(A(BC)-(BC)A - A(CB) + (CB)A\right) \\ &= \tfrac{1}{4}(ABC - ACB - BCA + CBA) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(-(AC+CA)B - B(AC+CA) + (AB+BA)C + C(AB+BA)\right) \\ &\overset{\substack{RS+SR \\ = 2\langle R,S\rangle}}{=} \langle A,C\rangle B - \langle A,B\rangle C \end{aligned}$$

$\square$

1.10 Satz

Für $A,B,C \in sl_2(\mathbb{R})$ gilt: $\langle A\wedge B, C\wedge D\rangle = \langle A,C\rangle\langle B,D\rangle - \langle A,D\rangle\langle B,C\rangle$

Beweis: $\langle A\wedge B, C\wedge D\rangle \overset{1.8}{=} vol(A,B,C\wedge D) = vol(B,C\wedge D,A) = \langle B\wedge(C\wedge D),A\rangle$

$\overset{(1)}{=} \langle A,C\rangle\langle B,D\rangle - \langle A,D\rangle\langle B,C\rangle$

$B\wedge(C\wedge D) \overset{1.9}{=} \langle B,D\rangle C - \langle B,C\rangle D$ (1)

1.11 Satz

Für $A_1,A_2,A_3 \in sl_2(\mathbb{R})$ und $B_1,B_2,B_3 \in sl_2(\mathbb{R})$ gilt

$$vol(A_1,A_2,A_3)\, vol(B_1,B_2,B_3) = \det_{ij}\langle A_i, B_j\rangle$$

Beweis

Seien A_1,A_2,A_3 fest. Beide Seiten der Formeln sind alternierend in B_1,B_2,B_3, d.h wir können annehmen, dass B_1,B_2,B_3 eine festgelegte positiv orientierte orthonormale Basis bilden. Wir können eine Variation von A_1,A_2,A_3 vornehmen und beobachten, dass beide Seiten in A_1,A_2,A_3 alternierend sind. Es reicht also aus, den Fall zu behandeln, bei dem A_1,A_2,A_3 und B_1,B_2,B_3 die orthonormale Basis bilden. In diesem Fall folgt das Ergebnis aus der Tatsache, dass $sl_2(\mathbb{R})$ den Sylvester-Typ $(-2,1)$ hat.

2. Scharen von Geodäten / Geraden

2.1. Wdh. Eine Geodäte $\gamma(t)$ ist gegeben durch:

$$\gamma(t) = A\cosh(t) + T\sinh(t) \quad ; \ t \in \mathbb{R}$$

Außerdem ist $A = \gamma(0)$ und $T = \gamma'(0)$ ein Vektor orthogonal zu A mit $\langle T, T\rangle = 1$

2.2 Def.: Normalenvektor

Ein Normalenvektor N einer Geodäten $\gamma(t)$ wird definiert durch:

$$N = \gamma'(t) \wedge \gamma(t) \quad , t \in \mathbb{R}$$

Eigenschaften des Normalenvektors

(1) N ist unabh. von t

(2) Die Norm von N ist -1

Wdh.: II.4.6

Seien A und B Punkte aus H^n. Dann existiert ein Einheits-Tangentenvektor u zu H^n, sodass

$$B = A\cos d(A,B) + u\sinh d(A,B)$$

2.4 Proposition

Das Komplement einer Geodäte h in der hyperbolischen Ebene H^2 besteht aus zwei zusammenhängender Komponenten. Eine Reflexion τ entlang eines Normalenvektors N von h belässt die Punkte auf h unverändert, vertauscht jedoch die beiden zusammenhängenden Komponenten des Komplements.

Beweis:

Sei N ein Normalenvektor für h.

Die Funktion $x \mapsto \langle x, N\rangle$, $x \in H^2$, ist entlang h gleich null. Diese Funktion teilt das Komplement von h in H^2 in 2 offene Mengen U und V.

In U ist das Skalarprodukt $\langle X, N\rangle > 0$.

In V ist das Skalarprodukt $\langle X, N\rangle < 0$.

Die Mengen U und V werden durch die Reflexion τ vertauscht, da gilt $\quad \langle x, N\rangle = -\langle \tau(x), N\rangle \quad x \in H^2$

Nun muss noch gezeigt werden das U zusammenhängend ist

Wähle also 2 Punkte A und B in U:

Mit II.4.6 können wir einen Einheitsvektor T im Tangentialraum von H^2 so wählen, dass $B = A\cosh d + T\sinh d$, $d = d(A,B)$

Jetzt bilden wir das Skalarprodukt von N mit $\gamma(t) = A\cosh t + T\sinh t$, $t\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\langle \gamma(t), N\rangle &= \langle A\cosh(t) + T\sinh(t), N\rangle \\ &= \langle A,N\rangle \cosh(t) + \langle T,N\rangle \sinh(t) \\ &= \cosh(t)\left(\langle A,N\rangle + \langle T,N\rangle \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}\right) \\ &= \cosh(t)\left(\langle A,N\rangle + \langle T,N\rangle \tanh(t)\right)\end{aligned}$$

Nun schauen wir uns das Verhalten des Skalarproduktes an:

Fall 1: Wenn $\langle T,N\rangle 0$, dann ist das Skalarprodukt $\langle \gamma(t), N\rangle < 0$ für alle $t\in\mathbb{R}$

Das bedeutet $\gamma(t) \in U$ für alle $t\in\mathbb{R}$

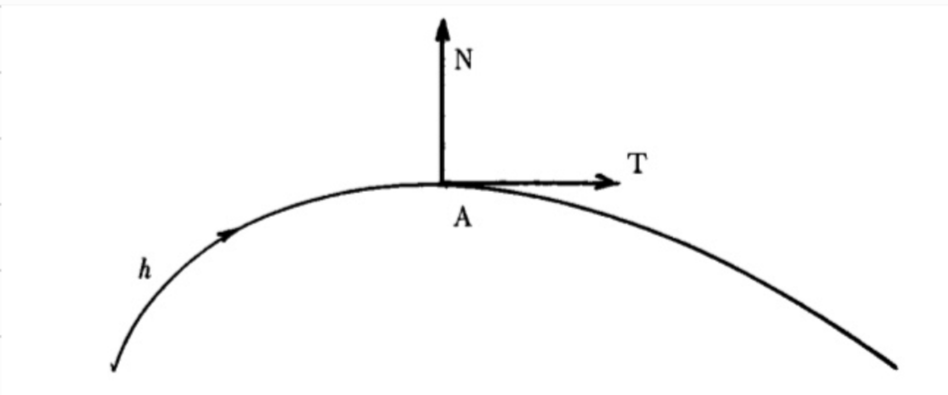
Fall 2: Wenn $\langle T,N\rangle < 0$, dann gibt es einen Wert $r\in\mathbb{R}$, sodass $\langle \gamma(t), N\rangle < 0$ für alle $t > r$, somit liegt $\gamma(t)$ in U

oder $\langle \gamma(t), N\rangle < 0$ für alle $t < r$, somit liegt $\gamma(t)$ in V

1.5 Def. Seiten

Die 2 verbundenen Komponenten der Komplementes von h werden Seiten von h genannt.

Wenn die Geodäte h von einem Normalvektor N orientiert wurde, können wir zwischen 2 Seiten von h unterscheiden: Eine Geodäte die durch den Punkt $A\in h$ mit Tangentenvektor T an A verläuft von der negativen Seite in die positive Seite von h.



2.5 Wdh.

Der Tangentialraum $T_A(H^2)$ an einem Punkt A ist der Raum der Vektoren in $sl_2(\mathbb{R})$, die orthogonal zum Vektor A sind.

Ein Paar von Tangentialvektoren X, Y ist positiv orientiert, wenn gilt: $\mathrm{vol}(A, X, Y) > 0$

sei $S \in T_A(H^2)$, dann bilden S und $S \wedge A$ eine positiv orientierte Basis für den Tangentialraum $T_A(H^2)$

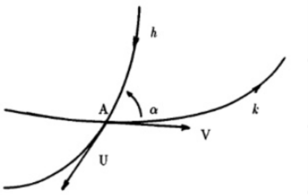
2.6. Def. (orientierte Winkel)

Seien S und T zwei Einheitsvektoren an H im Punkt $A \in H$, wird der orientierte Winkel $\angle_{or}(S,T)$ zwischen S und T definiert durch

$$T = S\cos(\angle_{or}(S,T)) + (S \wedge A)\sin(\angle_{or}(S,T)), \text{ wobei } \angle_{or}(S,T) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

2.7. Def.: Richtungswinkel

Wir betrachten zwei orientierte Geodäten h und k, welche sich im Punkt $A \in H^2$ schneiden. Wir definieren den Richtungswinkel α von h nach k wie folgt:



$$\alpha = \angle_{or}(V, -U)$$

$$\text{wobei } -U = V\cos\alpha + V \wedge A \sin\alpha$$

Aus 1.8 und 1.9 folgt $\langle U, V\rangle = \cos\alpha$ und $U \wedge V = A \sin\alpha$

Für die Normalenvektoren $H = U \wedge A$ und $K = V \wedge A$ gilt mit 1.10

$$\langle H, K\rangle = \cos\alpha \quad \text{und} \quad H \wedge K = A\sin\alpha$$

Wdh.: **Discriminant lemma 6.3** Let R be a plane in F generated by two vectors e and f. The Sylvester type of R is determined by the discriminant

$$\Delta = \langle e,e\rangle \langle f,f\rangle - \langle e,f\rangle^2$$

according to the following table

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
(−1,1)	(−1,0)	(−2,0)

2.8 Proposition

Zwei unterschiedliche Geodäten h und k in H^2 schneiden sich genau dann, wenn die Normalenvektoren H und K die Bedingung $|\langle H, K\rangle| < 1$ erfüllen

Beweis:

„$\Leftarrow$" Angenommen H und K erfüllen $|\langle H,K\rangle| < 1$. Die Vektoren H und K spannen die Ebene E im Vektorraum $sl_2(\mathbb{R})$ auf. Die Diskriminante wird berechnet durch

$$\Delta = \langle H,H\rangle\langle K,K\rangle - \langle H,K\rangle^2 \overset{\substack{\langle H,H\rangle=1\\ \langle K,K\rangle=1}}{=} 1 - \langle H,K\rangle^2 = 1-\cos^2(\alpha) > 0$$

$\Delta > 0$, d.h E hat den Sylvester-Typ $(-2,0)$.

Daraus folgt, das die Linie $E^\perp$ den Typ $(0,1)$ hat und der Punkt A des Schnitts zwischen H^2 und $E^\perp$ sowohl auf h als auch auf k liegt

„$\Rightarrow$" folgt aus 2.7

$\langle H,K\rangle = \cos\alpha \Rightarrow$ Ang. $|\cos\alpha| = 1 \Rightarrow \alpha = 0$ ↯

weil h und k unterschiedlich sind

2.9 Korollar

Die Geodäten h und k in H^2 sind genau dann senkrecht zueinander, wenn für ihre Normalenvektoren H und K $\langle H,K\rangle = 0$ gilt.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Angenommen h und k sind senkrecht zueinander $\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

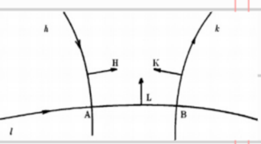
mit 2.7 folgt $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \langle H,K\rangle = 0$

„$\Leftarrow$" Wenn $\langle H,K\rangle = 0$, da $|\langle H,K\rangle| < 1$ schneiden sich die Geodäten

und da $\langle H,K\rangle = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ ☐

2.10 Geodäten mit einer gemeinsamen Senkrechten

Skizze



Seien h und k 2 Geodäten, die beide senkrecht zu derselben Geodäte l stehen. Die Schnittpunkte mit l werden als A und B bezeichnet. Sei L der Normalenvektor von l, der die Orientierung von l von A nach B angibt

Wir definieren den Normalenvektor H für die Geodäte h als: $H = A \wedge L$

Und den Normalenvektor K für k als: $K = -B \wedge L$

2.10.1 Beh.: $\langle H,K\rangle = \cosh(d(A,B))$

Bew

Schauen wir uns das innere Produkt von H und K an

$$\langle H,K\rangle = \langle A\wedge L, -B\wedge L\rangle = -\langle A\wedge L, B\wedge L\rangle = -(\langle A,B\rangle\langle L,L\rangle - \langle A,L\rangle\langle L,B\rangle)$$

$$= -\langle A,B\rangle \underbrace{\langle L,L\rangle}_{-1} + \underbrace{\langle A,L\rangle}_{=0}\underbrace{\langle L,B\rangle}_{=0}$$

$$= \langle A,B\rangle$$

Damit erhalten wir $\langle H,K\rangle = \cosh(d(A,B))$

2.10.2 Satz

Seien h und k Geodäten und l eine Geodäte die zu h und k senkrecht steht. Seien außerdem die Normalenvektoren H von h und K von k so definiert:
$H = A \wedge L$ und $K = -B \wedge L$ seien A und B die Schnittpunkte der Geodäten,
dann gilt: $\mathrm{vol}(H, L, K) = -\sinh d(A, B)$

Beweis:

$$L \wedge K = L \wedge (-B \wedge L) = -\underbrace{(L \cdot L)}_{=-1} B + \underbrace{(L \cdot B)}_{=0} L = B$$

$$\mathrm{vol}(H, L, K) = \langle H, L \wedge K \rangle = \langle H, B \rangle$$

Da $H = A \wedge L$ und B entlang der Geodäte l liegt, können wir B schreiben als

$$B = A\cos(d(A, B)) + H \sinh(d(A, B))$$

$$\langle H, B \rangle = \langle H, A\cos(d(A, B)) + H \sinh(d(A, B)) \rangle$$
$$= \underbrace{\langle H, A \rangle}_{=0} \cos(d(A, B)) + \underbrace{\langle H, H \rangle}_{=-1} \sinh d(A, B)$$
$$= -\sinh(d(A, B))$$

$\boxed{///}$

2.11 Theorem

(1) h und k stehen zu derselben Geodäte l senkrecht genau dann, wenn für H und K $|\langle H, K \rangle| > 1$ gilt
Die gemeinsame senkrechte Geodäte l ist eindeutig, wenn sie existiert

Beweis:

H und K spannen eine Ebene E auf

$$\Delta = \langle H, H \rangle \langle K, K \rangle - \langle H, K \rangle^2 = 1 - \langle H, K \rangle^2$$

„$\Leftarrow$" Wenn $|\langle H, K \rangle| > 1$ folgt $\Delta < 0$. Aus dem Diskriminantenlemma folgt das die Ebene E den Sylvester-Typ $(-1, 1)$ hat
Das bedeutet, dass $E^\perp$ einen Vektor L enthält mit Norm $\langle L, L \rangle = -1$
$\Rightarrow$ Geodäte l mit Normalenvektor L steht senkrecht auf h und k

„$\Rightarrow$" Sei l eine Geodäte, die sowohl zu h als auch zu k senkrecht ist $\Rightarrow \langle L, H \rangle = 0$ und $\langle L, K \rangle = 0$, $E = \mathrm{span}(H, K) \Rightarrow L \in E^\perp \Rightarrow \langle L, L \rangle = -1$
L ist bis auf ein Vorzeichen eindeutig $\boxed{//}$

2.12 Def.
Die Geodäte h in H^2 spannt eine lineare Ebene vom Typ $(-1,1)$ auf. Die zwei isotropen Geraden in dieser Ebene werden die Enden von h genannt. Der Normalenvektor H für h ist orthogonal zu den beiden Enden von h.

2.13 Proposition
2 verschiedene Geodäten h und k in H^2 haben genau dann ein gemeinsames Ende, wenn ihre Normalvektoren H und K die Bedingung $|\langle H, K\rangle| = 1$ erfüllen

Beweis
„=>" H und K spannen eine Ebene E auf $\Rightarrow \Delta = \langle H,H\rangle\langle K,K\rangle - \langle H,K\rangle^2 = 1 - \langle H,K\rangle^2$
Falls h und k ein gemeinsames Ende S haben muss $S = E$ gelten.
$\Rightarrow$ Gerade E ist isotrop. $\Rightarrow$ E hat den Typ $(-1,0)$ $\Rightarrow$ $\Delta = 0$, d.h. $|\langle H,K\rangle| = 1$
„<=" Falls $|\langle H,K\rangle| = 1$ $\Rightarrow$ $\Delta = 0$ $\Rightarrow$ E ist eine isotrope Linie und damit ein gemeinsames Ende von h und k

2.14 Def (Scharen von Geodäten)
Eine Schar von Geodäten in H^2 ist eine Menge φ von Geodäten, für die es eine lineare Ebene P in $sl_2(\mathbb{R})$ gibt, so dass φ der Menge der Geodäten mit Normalenvektoren entspricht.
Die Ebene P wird durch Normalenvektoren der Geodäten in dem von ihr bestimmten Schar erzeugt
Schauen wir uns die verschiedenen Sylvester-Typen an:
(1) Typ $(-2,0)$: Die Linie $P^\perp$ hat den Typ $+1$ und schneidet H^2 in einem Punkt A
φ ist eine Menge aller Geodäten, die durch den Punkt A gehen

(2) Typ $(-1,1)$: Die Linie $P^\perp$ hat den Typ -1 und wird durch den Normalenvektor einer Geodäte h erzeugt
φ ist die Menge aller Geodäten, die senkrecht zu h stehen

(3) Typ $(-1,0)$: Die Linie $S = P^\perp$ ist isotrop
φ ist die Menge der Geodäten mit dem Ende S.

2.15

Behauptungen:

(i) Durch zwei gegebene Punkte A und B verläuft eine eindeutige Geodäte h

(ii) Durch einen gegebenen Punkt A verläuft eine eindeutige Geodäte, die senkrecht zu einer gegebenen Geodäte l steht.

(iii) Durch ein Punkt A verläuft eine eindeutige Geodäte mit einem gegebenen Ende

(iv) Es gibt eine eindeutige Geodäte mit einem gegebenen Ende S, die senkrecht zu einer gegebenen Geodäte h steht vorrausgesetzt, die Enden von h sind verschieden von S

(v) Es gibt eine eindeutige Geodäte mit gegebenen Enden R und S

Beweis:

(i), (ii) und (iii)

Sei A ein Punkt in H^2 und $\mathcal{A}$ der Pencil der Geodäten durch A. Die Ebene $\mathcal{A}$ hat den Typ (-2,0). Daraus folgt: Der Schnitt zwischen $\mathcal{A}$ und jeder anderen Ebene P ist eine Linie vom Typ -1 ist.

(iv) wähle einen Normalvektor N zu h. N hat den Typ (-1,1), während S den Typ (-1,0) hat. $\Rightarrow$ Der Schnitt der beiden Ebenen hat den Typ -1 oder 0 können wir ausschließen, da S kein Ende von h ist.

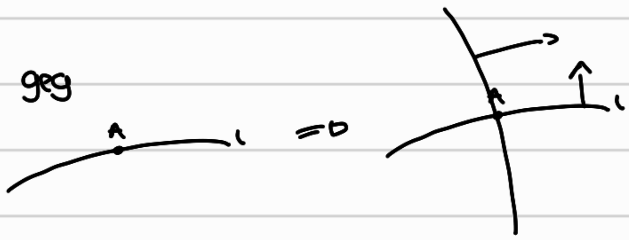
(v) R und S haben den Typ (-1,0). Der Schnitt ist eine Linie vom Typ -1 oder unsere Form ist nicht-singulär $\Rightarrow$ 0 kann ausgeschlossen werden

$\boxtimes$

Skizzen

(i)

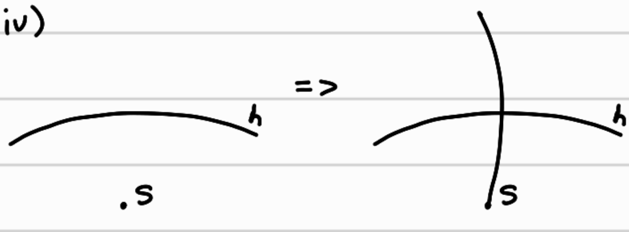
(ii) geg



(iii)

geg.:

iv)



(v) geg