

Karten von Klein und Poincaré

In dem heutigen Vortrag wollen wir uns mit Karten der hyperbolischen Ebene befassen. Hier ist es im Gegensatz zur Sphäre möglich, Karten zu finden, die die ganze hyperbolische Ebene erfassen. Diese Karten wollen wir Modelle der hyperbolischen Geometrie nennen.

• Tripel (U, F, ν) nennt man lokale Parametrisierung (Seite 1 Skript E. Wiebach)

• M_{-1} : Wir definieren die hyperbolische Ebene wie folgt: $\hat{M}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -x^2 - y^2 + z^2 = 1 \right\}$

dies entspricht genau unserer bisherigen Definition einer Einheitssphäre im Minkowski-Raum der dim 3, d.h. in einem Raum mit Sylvester-Typ $(-2, 1)$

(Def. 6.1, Bem. 6.2, Lem. 6.3, E. Wiebach)

• $S \in \mathbb{R}^3$ reg. Fläche. Eine riemannsche Metrik g auf S ordnet jedem Punkt $p \in S$ ein eukl. Skalarprodukt auf $T_p S$ zu, sodass:

$\forall (U, F, \nu)$:

$g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto g_{F(u)} \left(\frac{\partial F}{\partial u_i}(u), \frac{\partial F}{\partial u_j}(u) \right)$
glatt sind, d.h. dass die Abb. auf die Gramsche Matrix bzgl. der Basis $\frac{\partial F}{\partial u_1}(u), \frac{\partial F}{\partial u_2}(u)$ von $T_{F(u)} S$ und $g_{F(u)}$ glatt ist.

Beachte jedoch, dass eine riemannsche Metrik auf S keine Metrik auf S im Sinne der metr. Räume ist.

- Die erste Fundamentalform ordnet jedem Punkt einer regulären Fläche die Einschränkung des Standardskalarprodukts auf dessen Tangentialebene zu, also $g_{ij}(u) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(u), \frac{\partial F}{\partial u_j}(u) \right\rangle$

Es handelt sich um eine Verkettung von glatten Abb. und damit um eine riemannsche Metrik.

(Def. 3.1, Def. 3.2, E. Wiebach)

- Minkowski - Produkt:

Der Vektorraum \mathbb{R}^{n+1} zusammen mit dem Pseudoskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das durch die Minkowski - Metrik

$$\tilde{g}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \text{ gegeben ist, heißt Minkowski - Raum}$$

Bem.: Das Skalarprodukt ist also hier durch

$$\langle x, y \rangle = - \sum_{i=1}^n x_i y_i + x_0 y_0 \text{ gegeben. Da ein Skalarprodukt}$$

immer eine quadratische Form Q impliziert, erhalten wir mit dem Satz von Sylvester die Signatur $(-n, 1)$ für die quadratische Form Q .

(Def. 1.3, L. Berger)

Falls (U, F, ν) eine solche Karte mit $M_{-1} \subset \mathbb{C}V$ ist, dann ist F ein Diffeomorphismus von U nach M_{-1} und alle Untersuchungen der hyperbolischen Geometrie können auf U durchgeführt werden, (sind) die Funktionen $g_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}$ zu benutzen, die die hyperbolische riemannsche Metrik in dieser Karte beschreiben.

Da die hyperbolische Metrik durch Einschränkung des Minkowski - Produktes auf dem \mathbb{R}^3 anstelle des euklidischen Skalarprodukts entstand, haben wir

$$g_{ij}(u^1, u^2) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(u^1, u^2), \frac{\partial F}{\partial u_j}(u^1, u^2) \right\rangle_{-1} .$$

I. 1 Klein'sches Modell:

Die erste Karte erhalten wir durch Zentralprojektion vom Ursprung auf die Einheitskreisscheibe in $U \rightarrow M_{-1}$ mit $U \subset T_e M_{-1}$

- Prop. 3.2.4 Bär: Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ offen, sei $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, sei $S = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$. Es gelte $\text{grad } f(p) \neq 0$ für alle $p \in S$. Dann steht für $p \in S$ der Gradient von f senkrecht auf der Tangentialebene $T_p S = \text{grad } f(p)^\perp$. (Bär)

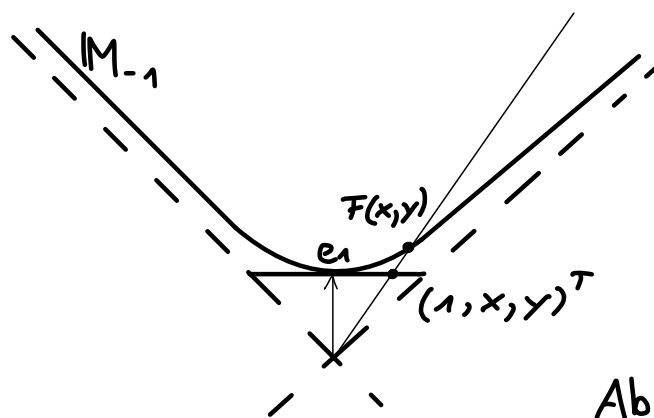


Abb. 1

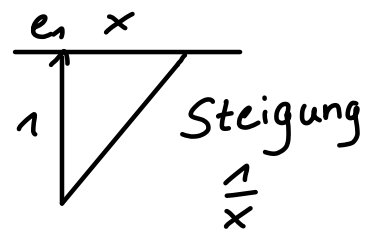
In Formeln heißt das $U = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ und

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Diese Karte ist bekannt als Klein'sches Modell, als Cayley-Klein-Modell, als projektives Modell und auch als Beltramin-Klein-Modell der hyperbolischen Geometrie.

Überprüfe die Formel $F(x, y)$:

Zur Vereinfachung: setze $y=0$



$$\Rightarrow f(\xi) = \frac{1}{x} \xi$$

Für den Schnittpunkt mit der hyperbolischen Ebene muss gelten:

$$f(\xi)^2 = 1 + \xi^2$$

$$f(\xi)^2 - \xi^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \xi^2 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \xi^2 \left(\frac{1-x^2}{x^2} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \xi^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Wir berechnen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (1-x^2-y^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} x \\ 1-y^2 \\ xy \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = (1-x^2-y^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} y \\ xy \\ 1-x^2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} g_{11}(x, y) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial x} \right\rangle \\ &= (1-x^2-y^2)^{-3} \cdot (-x^2 + (1-y^2)^2 + (xy)^2) \\ &= \frac{1-y^2}{(1-x^2-y^2)^2} \end{aligned}$$

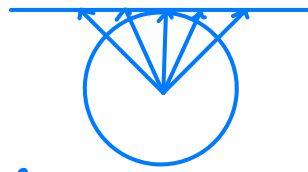
und ähnlich für die anderen Koeffizienten der Metrik.

Wir erhalten

$$(g_{ij}(x, y)) = \frac{1}{(1-x^2-y^2)^2} \begin{pmatrix} 1-y^2 & xy \\ xy & 1-x^2 \end{pmatrix}$$

(4)

- Zentralprojektion: Die nächste azimuthale Karte ist die gnomonische Projektion oder Zentralprojektion.



Hier haben wir $U = \mathbb{R}^2$, $V = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ und $F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} (x, y, 1)^T$. Man berechnet

$$(g_{ij}(x, y)) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} 1+y^2 & -xy \\ -xy & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

und $dA = (1+x^2+y^2)^{-3/2} dx dy$

- Karte ist weder Flächen- noch winkeltreu
- aber es werden die Geodätischen auf der Sphäre, die Großkreise, in der Karte durch Geraden dargestellt

(Bär, S. 230)

- Flächentreu: Eine Karte ist Flächentreu, falls das Flächenelement der Sphäre, ausgedrückt in den Koordinaten u^1, u^2 mit dem Flächenelement der euklidischen Metrik der Ebene übereinstimmt, $dA = du^1 du^2$. (Bär, S. 227)

- Winkeltreu: Seien S und S' reguläre Flächen, versehen mit Riemannschen Metriken g bzw. g' . Ein lokaler Diffeomorphismus $\Phi: S \rightarrow S'$ heißt winkeltreu oder konform, falls es eine positive Funktion $c: S \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $\Phi^* g' = c \cdot g$.

(Bär, S. 228)

Die hyperbolische Metrik sieht im Klein'schen Modell zwar nicht sonderlich einfach aus, aber dieses Modell hat eine sehr schöne Eigenschaft:

I.1.1 Beh.: Geodätische in M_{-1} entsprechen Geraden in U .

Beweis: Geometrisch: Die Geodätischen in M_{-1} sind nämlich genau die Durchschnitte von M_{-1} mit Ebenen E , die den Ursprung enthalten. Unter der Zentralprojektion werden sie auf den Durchschnitt von E mit der Einheitsscheibe in $T_e M_{-1}$ abgebildet. Der Durchschnitt der beiden Ebenen E und $T_e M_{-1}$ ist eine Gerade.

Um dies zu sehen betrachten wir erneut Abb. 1. Das eben gesagte kann man sich hier nun so vorstellen: Wir betrachten den Sachverhalt hier in 2D von der Seite. Wir laufen nun jeden Punkt auf der Kurve M_{-1} ab und ziehen von dort aus Geraden durch den Ursprung. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Tangentialebene bilden nun wieder eine Gerade.

Parallelenaxiom

• Parallelenaxiom:

Sei L eine Gerade, p ein Punkt, $p \notin L$. Dann gibt es höchstens eine Gerade, die p enthält und die L nicht schneidet.

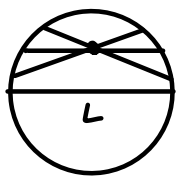
(Bär, S. 14)

Dies erlaubt eine einfache Diskussion des Parallelenaxioms. In der Sprechweise und den Notationen aus dem ersten Kapitel nehmen wir als Menge der Punkte jetzt die Punkte der hyperbolischen Ebene M_{-1} und als Menge der „Geraden“ die Menge der Spuren der Geodätischen,

$$\mathcal{P} := M_{-1},$$
$$\mathcal{G} := \{M_{-1} \cap E \mid E \subset \mathbb{R}^3 \text{ ist zweidimensionaler Untervektorraum}\} - \{\emptyset\}$$

I.12 Beh. Allein das Parallelenaxiom ist nicht gültig, Parallelen sind nicht eindeutig.

Beweis: Geometrisch: Dies sieht man leicht im Klein'schen Modell. Zu einem gegebenen Geradensegment L in U gibt es unendlich viele Geradensegmente, die L nicht schneiden, aber einen Punkt gemein haben



Wdh.

- Metrik: X Menge, $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik,
Wenn $\forall x, y, z \in X$ gilt:
 - Definitheit $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
" $|y - x|$, $x, y \in \mathbb{R}$
 - Symmetrie $d(x, y) = d(y, x)$
 - Dreiecksungl. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (X, d) metrischer Raum.

Wdh.: Der sphärische Abstand $d(P, Q)$ zwischen zwei Punkten P, Q in der Einheitskugel S^n ($S^n := \{x \in F \mid \|x\| = 1\}$, $F = \text{eukl. Raum}$) wird definiert mit $\cosh d(P, Q) = \langle P, Q \rangle$

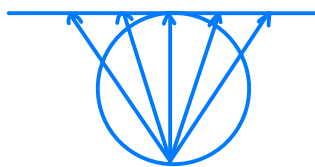
(Unser F von vorher können wir allgemein schreiben als $p(A) = \frac{(A, 1)}{\sqrt{1 - \langle A, A \rangle}}$)

- Sei D^n dabei die offene Einheitskugel und H der hyperbolische Raum.
- Die Metrik im Klein-Modell ist gegeben durch $\cosh d(A, B) = \frac{1 - \langle A, B \rangle}{\sqrt{(1 - \langle A, A \rangle)(1 - \langle B, B \rangle)}}$, $A, B \in D^n$

I.2 Poincaré'sches Scheibenmodell

Nun gehen wir zum hyperbolischen Analogon der stereografischen Projektion aus der sphärischen Geometrie über. Im Prinzip müssen wir lediglich wie in der sphärischen Geometrie den Projektionspunkt vom Ursprung nach $-e_1$ verlagern. Um etwas einfachere Formeln zu bekommen, projizieren wir nicht auf $T_{e_1}M_{-1}$, sondern auf die parallele Ebene, die von e_2 und e_3 aufgespannt wird. Der Unterschied besteht lediglich in einer Streckung um den Faktor 2.

- Stereografische Projektion: Wenn wir den Projektionspunkt vom Mittelpunkt der Sphäre zum Südpol verschieben, erhalten wir die stereografische Projektion.



In diesem Fall ist $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, -1\}^T$,

$$F(x, y) = \frac{1}{4 + x^2 + y^2} (4x, 4y, 4 - x^2 - y^2)^T,$$

$$(g_{ij}(x, y)) = \frac{16}{(4 + x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } dA = \frac{16}{(4 + x^2 + y^2)^2} dx dy$$

Daher ist die stereografische Projektion konform, aber nicht flächentreu. (Bär, S. 232)

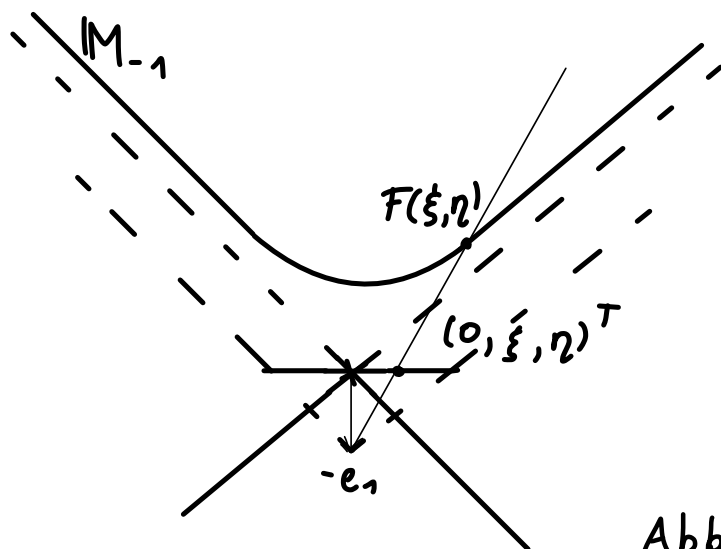


Abb. 2

Damit ist U die Einheitsscheibe wie im Fall des Klein'schen Modells und man berechnet leicht, dass

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{1 - \xi^2 - \eta^2} \begin{pmatrix} 1 + \xi^2 + \eta^2 \\ 2\xi \\ 2\eta \end{pmatrix}$$

Eine Berechnung ähnlich zu der für das Klein'sche Modell liefert

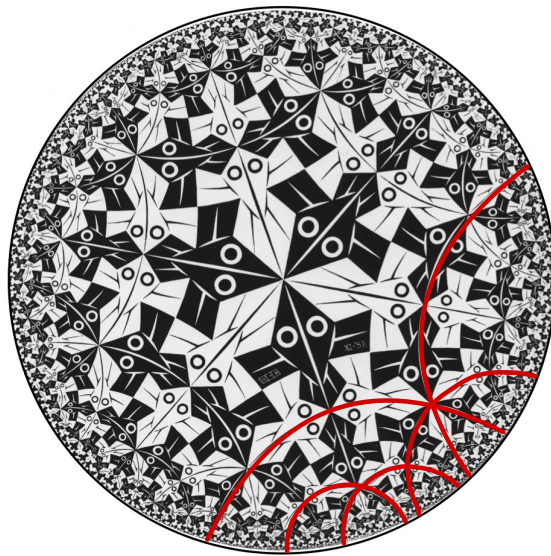
$$(g_{ij}(\xi, \eta)) = \frac{4}{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Modell der hyperbolischen Geometrie konform genau wie die stereografische Projektion.

Aus geometrischer Sicht ist dies die bereits betrachtete stereografische Projektion mit Mittelpunkt $(0, -1)$. Das Ergebnis des Transports der hyperbolischen Metrik entlang f ist gegeben durch

$$\cosh d(P, Q) = 1 + 2 \frac{|P - Q|^2}{(1 - |P|^2)(1 - |Q|^2)}, P, Q \in U$$

Man nennt dieses Modell das Poincaré-Scheibenmodell oder auch das konforme Scheibenmodell. Es wurde vom niederländischen Künstler Maurits Cornelis Escher (1898-1972) durch seine berühmten Holzschnitte wie etwa „Circle Limit I“ aus dem Jahre 1958 popularisiert.



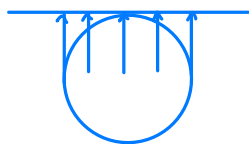
Die Geraden durch den Mittelpunkt der Scheibe entsprechen den Geodätischen von M_{-1} , die durch den Schnitt mit denjenigen Ebenen gegeben sind, die neben dem Ursprung auch den Punkt e_1 enthalten. Die anderen Geodätischen entsprechen den Kreisbögen, die den Rand der Scheibe senkrecht schneiden. Eschers Holzschnitt zeigt einige davon. Die schwarzen Fische sind alle kongruent bzgl. der hyperbolischen Metrik. Insbesondere haben sie alle denselben Flächeninhalt und Ähnliches gilt für die weißen Fische.

Man fragt sich jetzt, wie dieses Bild wohl im Klein'schen Modell aussehen würde. Die Kreisbögen müssen dann durch Geradensegmente ersetzt werden. In der Tat, Eschers Circle Limit I sieht nach Transformation in das Klein'sche Modell wie folgt aus:



I.3 Poincaré'sches Halbebenenmodell

• Parallelprojektion:
(oder orthografische
Projektion)



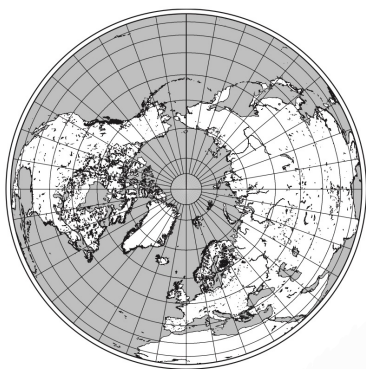
Hier haben wir $U = \{(x, y)^T \mid x^2 + y^2 < 1\}$,
 $V = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ und $F(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})^T$.

Man beachte, dass die lokale Parametrisierung die Umkehrabbildung zur Projektion ist. Man berechnet

$$(g_{ij}(x, y)) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2} \begin{pmatrix} 1 - y^2 & xy \\ xy & 1 - x^2 \end{pmatrix} \text{ und somit}$$

$$dA = \sqrt{\det(g_{ij}(x, y))} dx dy = (1 - x^2 - y^2)^{-1/2} dx dy$$

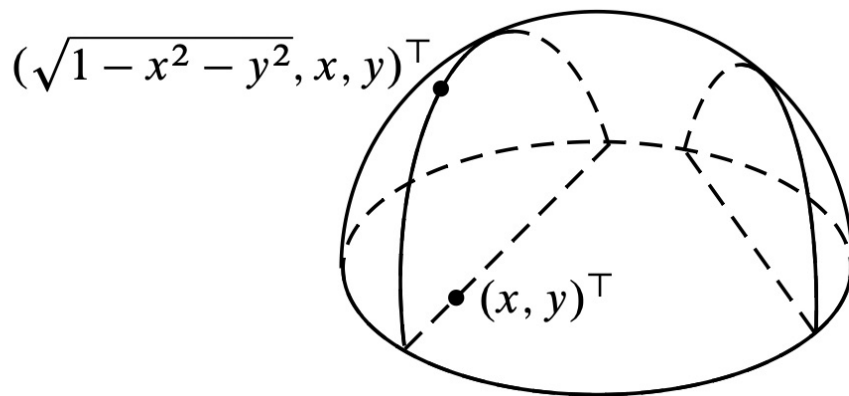
Somit ist die orthografische Projektion weder flächen- noch winkeltreu. Sie zeigt die Erde, wie sie aus dem Weltall betrachtet aussieht.



(Bär, S. 229)

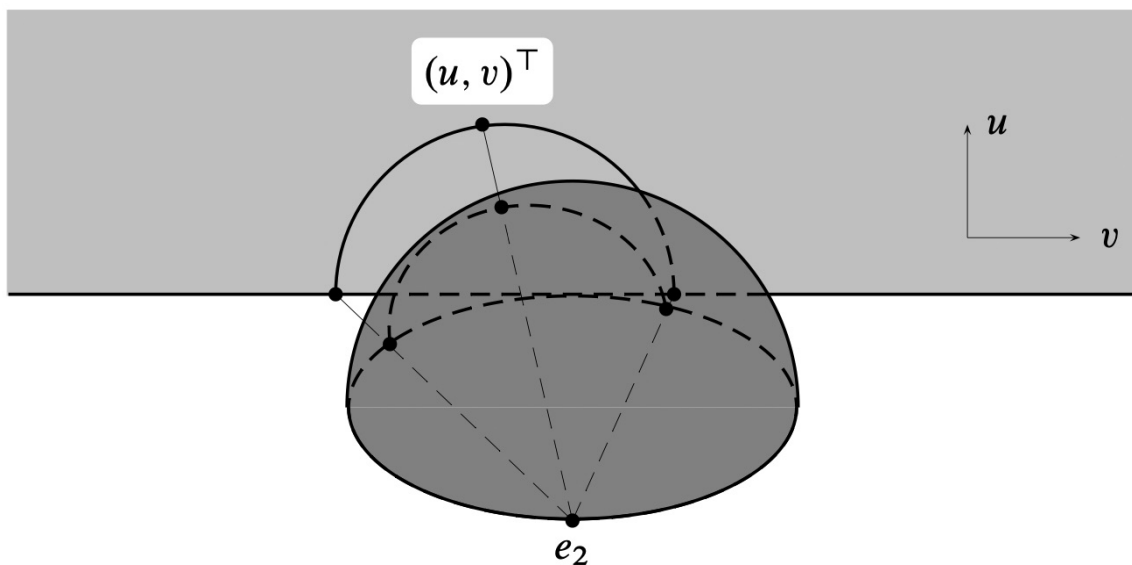
Es gibt ein weiteres interessantes und wichtiges Modell. Wir konstruieren es folgendermaßen.

Wir starten mit dem Klein'schen Modell und führen eine Parallelprojektion auf die obere Halbsphäre durch, d.h. der Punkt $(x, y)^T$ wird auf $(\sqrt{1 - x^2 - y^2}, x, y)^T$ abgebildet. Dies ist die Transformation, die uns in der Kartografie die orthografischen Karten liefert. Die Geradensegmente in der Scheibe werden dabei auf Kreisbögen abgebildet, die den Äquator senkrecht treffen.



Der Vorteil hierbei ist, dass wir nun eine 3D-Kugelfläche betrachten können und somit auch die Riemann-Metrik nutzen können. Dann gilt auch die Winkeltreue wieder.

Nun wählen wir einen Punkt auf dem Äquator, etwa e_2 , und führen eine stereografische Projektion von e_2 auf die Tangentialebene der Sphäre im gegenüberliegenden Punkt $-e_2$ durch. Dies bildet die obere Halbsphäre auf die obere Halbebene ab. Die Kreisbögen werden dabei auf Kreisbögen in der Halbebene abgebildet mit Ausnahme derer, die den Punkt e_2 enthalten. Diese werden auf Geraden projiziert. Sowohl die Kreisbögen als auch die Geraden treffen den Rand der Halbebene in einem rechten Winkel.



Es handelt sich also um eine Verkettung einer Parallelprojektion mit einer stereografischen Projektion.

Das Bild von $(\sqrt{1-x^2-y^2}, x, y)^T$ unter dieser stereografischen Projektion berechnet sich zu

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{1-x} \begin{pmatrix} 2\sqrt{1-x^2-y^2} \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Wir lösen nach $(x, y)^T$ auf und erhalten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{u^2+v^2+4} \begin{pmatrix} u^2+v^2-4 \\ 4v \end{pmatrix}$$

Setzen wir dies in die Parametrisierung $(F(x,y))$ des Klein'schen Modells ein, so erhalten wir das Poincaré'sche Halbebenenmodell

$$F(u,v) = \frac{1}{4u} \begin{pmatrix} u^2 + v^2 + 4 \\ u^2 + v^2 - 4 \\ 4v \end{pmatrix}$$

mit $U = \{(u,v)^T \mid u > 0\}$. Wie zuvor berechnet man

$$(g_{ij}(u,v)) = \frac{1}{u^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist auch das Poincaré'sche Halbebenenmodell konform.

Nach einer etwas längeren Rechnung, die wir hier aus Zeitgründen überspringen möchten, erhält man für die Metrik der Poincaré-Scheibe auf dem oberen Halbraum E^+

$$\cosh d(P,Q) = 1 + \frac{|P-Q|^2}{2hk}, \quad P=(p,h), Q=(q,k)$$

Eschers Holzschnitt sieht in diesem Modell folgendermaßen aus:

