

Proseminar Hyperbolische Geometrie

1. Der Minkowski-Raum

1.1 Definition. Pseudoskalarprodukt

Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Pseudoskalarprodukt** falls für alle $x, y, z \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt

- 1) $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ und $\langle x, \alpha y + z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \langle y, z \rangle$ (Bilinearität)
- 2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (Symmetrie)
- 3) $\forall x \neq 0 \exists y \in V: \langle x, y \rangle \neq 0$ (nicht ausgeartet)

Bemerkung: Anders als zum Skalarprodukt fordern wir hier also nicht positive Definitheit.

1.2 Satz

Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist Pseudoskalarprodukt \Leftrightarrow Es gibt eine inv.'bare symmetrische Matrix g sodass $\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i y_j$.

Beweis: „ \Rightarrow “: Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Pseudoskalarprodukt, also eine symmetrische Bilinearform. Sei weiter $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V . Wir definieren nun $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ für $i, j = 1, \dots, n$. Da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ symmetrisch ist, ist $g_{ij} = g_{ji}$ und die Matrix ist symmetrisch.

Für beliebige Vektoren $x, y \in V$ können wir schreiben

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{und} \quad y = \sum_{j=1}^n y_j e_j,$$

dann gilt:

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i y_j$$

. Da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht ausgeartet ist, ist g_{ij} auch invertierbar.

„ \Leftarrow “: Sei g eine symmetrische, invertierbare Matrix und $\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i y_j$, für $x, y \in V$ in Bezug auf eine Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$. Da g symmetrisch ist folgt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i y_j = \sum_{i,j=1}^n g_{ji} y_j x_i = \langle y, x \rangle.$$

Für $a \in \mathbb{R}$ und $x, y, z \in V$ gilt

$$\langle ax + y, z \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} (ax_i + y_i) z_j = a \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

Hieraus folgt also die Linearität in beiden Argumenten.
 Da g_{ij} invertierbar ist folgt, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht entartet ist. ■

g heißt Pseudo-Metrik. Wählen wir nun für $g = \text{diag}(1, -1, -1, \dots, -1)$ so erhalten wir folgende Definition.

1.3 Definition. Minkowski-Raum

Der Vektorraum \mathbb{R}^{n+1} zusammen mit dem Pseudoskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das durch die **Minkowski-Metrik**

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, heißt **Minkowski-Raum**.

Bemerkung. Das Skalarprodukt ist also hier durch

$$\langle x, y \rangle = - \sum_{i=1}^n x_i y_i + x_0 y_0$$

gegeben. Da ein Skalarprodukt immer eine quadratische Form Q impliziert, erhalten wir mit dem Satz von Sylvester die Signatur $(-n, 1)$ für die quadratische Form Q .
 (Im Folgenden meinen wir mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das obige Skalarprodukt.)

2. Lorentz-Gruppe und Lorentz-Transformationen

Betrachten wir also einen Vektorraum F über \mathbb{R} mit $\dim(F) = n + 1$ und einer quadratischen Form Q mit der Signatur $(-n, 1)$.

Für einen Vektor $f = (f_0, f_1, \dots, f_n) \in F$ gilt nach (1.3), dass er die folgende quadratische Form hat

$$Q(f) = f_0^2 - \sum_{i=1}^n f_i^2.$$

Vektoren $f \in F$ welche $Q(f) = 1$ erfüllen, bilden den **Hyperboloiden** (oder **Pseudospähre**)

$$S(F) = \{f \in F \mid \langle f, f \rangle = 1\}$$

welcher aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht.

Beispiel: Betrachten wir den $\mathbb{R}^{2,1}$ so wird es klar, dass es sich hier um das Hyperboloid handelt.

Wir haben die Signatur $(-2, 1)$ und erhalten somit die Gleichung

$$-x^2 - y^2 + t^2 = 1 \xrightarrow{y=0} t^2 - x^2 = 1$$

Aus Vortrag (1) wissen wir, dass das eine Hyperbel ist. Lassen wir diese um die t -Achse rotieren, so erhalten wir das zweischalige Hyperboloid.

Bevor wir die Lorentz-Gruppe einführen zeigen wir noch ein nützliches Lemma.

2.1 Lemma. Diskriminanten Lemma

Es sei $R \subseteq F$ eine Ebene, aufgespannt durch die Vektoren e, f . Die Signatur von R ist über die Diskriminante

$$\Delta = \langle e, e \rangle \langle f, f \rangle - \langle e, f \rangle^2$$

über folgende Tabelle festgelegt

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$(-1, 1)$	$(-1, 0)$	$(-2, 0)$

Beweis: Wir zeigen zuerst dass R einen Vektor der Norm -1 enthält. Hierfür nehmen wir uns eine ONB von F , und betrachten eine Hyperebene vom Typ $(-n, 0)$. Die Dimensionsformel liefert nun

$$\underbrace{\dim(R)}_{=2} + \underbrace{\dim(E)}_{=n} - \underbrace{\dim(R + E)}_{\leq n+1} = \underbrace{\dim(R \cap E)}_{\geq 1}$$

Somit enthält R mindestens einen Vektor mit negativer Norm. Es folgt somit dass R nur die folgenden Sylvester-Typen haben kann: $(-2, 0)$, $(-1, 1)$, $(-1, 0)$ wobei wir im letzten Fall noch einen Vektor der Länge Null hätten.

Aus der Diskriminaten-Ungleichung folgt somit dass diese 3 Typen durch die Tabelle festgelegt sind. ■

Betrachten wir nun nicht den Spezialfall $n = 2$ so folgt aus der Dimensionsformel

$$\underbrace{\dim(R)}_{=n} + \underbrace{\dim(E)}_{=n} - \underbrace{\dim(R + E)}_{\leq n+1} = \underbrace{\dim(R \cap E)}_{\geq n-1}$$

Und somit folgt dass jede Hyperebene nur die Typen $(-n, 0)$, $(-(n-1), 1)$, $(-(n-1), 0)$ (im letzten Fall existiert wieder ein Vektor mit Norm Null).

2.2 Proposition

Der Hyperboloid $S(F)$ hat zwei Zusammenhangskomponenten. Die Punkte $x, u \in S(F)$ sind im gleichen Blatt genau dann wenn $\langle x, u \rangle > 0$

Beweis: Es sei $u \in S(F)$ fix, und sei E die Hyperebene senkrecht zu u . Die Hyperebene E teilt $S(F)$ in die beiden Mengen

$$H = \{x \in S(F) \mid \langle x, u \rangle > 0\}, \quad H^- = \{x \in S(F) \mid \langle x, u \rangle < 0\}.$$

Diese zwei Mengen sind die zusammenhängenden Komponenten des Hyperboloids.

Es bleibt zu zeigen dass H und H^- zusammenhängend sind.

Die Abbildung $\varphi : H \rightarrow H^-, x \mapsto -x$ ist offensichtlich homöomorph, somit reicht es zu zeigen dass H zusammenhängend ist. Wir zeigen das indem wir einen Homöomorphismus zwischen H und der offenen Einheitscheibe $D := \{y \in E \mid -\langle y, y \rangle < 1\}$ angeben.

Um diese Abbildung zu finden schauen wir uns die Gerade durch die beiden Punkte $x \in H$ und $-u$ an. Diese ist durch Parametrisierung gegeben über $(x + u)t - u, t \in \mathbb{R}$.

Den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Hyperebene E erhalten wir über

$$\langle (x + u)t - u, u \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{1 + \langle u, x \rangle}.$$

Wir erhalten somit für unseren Schnittpunkt $g(x)$

$$g(x) = \frac{x - \langle x, u \rangle u}{1 - \langle u, x \rangle}.$$

Somit ist also $\langle g(x), u \rangle = 0$ und durch Berechnung sehen wir, dass

$$\langle g(x), g(x) \rangle = \frac{1 - \langle x, u \rangle}{1 + \langle x, u \rangle} < 1$$

also $g(x) \in D$. Um zu zeigen, dass $g : H \rightarrow D$ ein Homöomorphismus ist finden wir die Umkehrabbildung $f : D \rightarrow H$. Hierfür betrachten wir den Schnittpunkt von H mit der Geraden durch $z \in D$ und $-u$. Diese ist gegeben durch $zt - u(1 - t), t \in \mathbb{R}$. Es muss gelten

$$\begin{aligned} \langle f(t), f(t) \rangle = 1 &\Leftrightarrow \langle zt - u(1 - t), zt - u(1 - t) \rangle = 1 \\ &\Leftrightarrow t(\langle z, z \rangle + 1) - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{2}{1 + \langle z, z \rangle} \end{aligned}$$

. Eingesetzt ergibt sich somit

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2z}{1 + \langle z, z \rangle} - u \left(1 - \frac{2}{1 + \langle z, z \rangle} \right) \\ &= 2 \frac{z + u}{1 + \langle z, z \rangle} - u. \end{aligned}$$

Durch überprüfen findet man dann das g ein Homöomorphismus ist. ■

2.3 Definition. Lorentz-Transformationen und Lorentz-Gruppe

Eine **Lorentz-Transformation** ist eine orthogonale Abbildung $\sigma \in \mathcal{O}(F)$ welche die Zusammenhangskomponenten des Hyperboloiden erhält.

Die Lorentz-Transformationen bilden eine Gruppe, die **Lorentz-Gruppe**. Wir schreiben $\text{Lor}(F)$.

2.4 Bemerkung. (a) Aus Proposition (2.1) folgt, dass wir eine Lorentz-Transformation über die Ungleichung

$$\langle x, \sigma(x) \rangle > 0 \quad \sigma \in \text{Lor}(F), x \in S(F)$$

charakterisieren können.

(b) Da $\sigma \in \mathcal{O}(F)$ hat eine Lorentz-Transformation Determinante ± 1 .

Lorentz-Transformationen mit Determinante 1 heißen **spezielle** Lorentz-Transformationen und bilden die **spezielle Lorentz-Gruppe** $\text{Lor}^+(F)$. Diese ist eine Untergruppe von $\text{Lor}(F)$ mit Index 2.

2.5 Proposition.

Die spezielle Lorentz-Gruppe $\text{Lor}^+(F)$ operiert transitiv auf dem Raum der Vektoren $N(F)$ mit Norm -1 , falls $\dim(F) \geq 3$.

Schauen wir uns im Folgenden ein paar Beispiele zu Lorentz-Transformationen an.

2.6 Beispiele. (a) Die antipodale Abbildung $x \mapsto -x$ ist keine Lorentz-Transformation denn es gilt

$$\langle x, \sigma(x) \rangle = \langle x, -x \rangle = -\langle x, x \rangle < 0.$$

(b) Ein weiteres Beispiel einer Lorentz-Transformation ist die Spiegelung entlang eines Vektors $c \in F$ für den $\langle c, c \rangle = -1$ gilt. Durch diese Bedingung vereinfacht sich Gleichung (2.1) (Ivers.) zu

$$\tau_c(x) = x + 2 \langle x, c \rangle c \quad x \in F$$

Wir verwenden nun (2.3) um zu sehen dass es sich hierbei wirklich um eine Lorentz-Transformation handelt. Direkte Berechnung liefert

$$\langle \tau_c(x), x \rangle = \langle x, x \rangle + \langle 2 \langle x, c \rangle c, x \rangle = 1 + 2 \langle x, c \rangle^2 > 0 \quad x \in S(F)$$

(c) Sei $\dim(F) = 2$ und σ eine Lorentz-Transformation. Weiter wählen wir eine Orthonormalbasis e und f von F so, dass $\langle e, e \rangle = 1$ und $\langle f, f \rangle = -1$. Der Punkt $v = xe + tf \in S(F)$ $x, t \in \mathbb{R}$ liegt auf der Hyperbel genau dann wenn $x^2 - t^2 = 1$ (um das zu überprüfen berechne $\langle v, v \rangle$). Diese Hyperbel können wir nun parametrisieren indem wir $x = \cosh(s)$ und $t = \sinh(s)$ mit $s \in \mathbb{R}$ setzen.

Da σ eine Lorentz-Transformation ist muss sie das Skalarprodukt invariant lassen, und es muss somit gelten $\langle \sigma(e), \sigma(e) \rangle = 1$ und $\langle \sigma(f), \sigma(f) \rangle = -1$.

Wir erhalten somit $\sigma(e) = e \cosh(s) + f \sinh(s)$ und $\sigma(f) = \mp(e \sinh(s) + f \cosh(s))$ wobei $\sigma(e) \perp \sigma(f)$.

Im ersten Fall erhalten wir somit die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cosh(s) & -\sinh(s) \\ \sinh(s) & -\cosh(s) \end{pmatrix}.$$

Man sieht schnell $\det(\sigma) = -1$ und $\text{tr}(\sigma) = 0$. Es folgt, dass σ die beiden Eigenwerte ± 1 hat. Für den Fall $s = 0$ erhalten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hierbei handelt es sich um eine Matrix welche eine Spiegelung entlang des Vektors f mit Norm -1 beschreibt. Den Vektor e lässt sie jedoch unverändert.

Im zweiten Fall erhalten wir die Matrix

$$L(s) = \begin{pmatrix} \cosh(s) & \sinh(s) \\ \sinh(s) & \cosh(s) \end{pmatrix}.$$

Wie bei den trigonometrischen Funktionen können wir auch bei den hyperbolischen Funktionen Additionstheoreme definieren.

Durch Nachrechnen sieht man $L(s + t) = L(s)L(t)$.

Somit können wir für $\dim(F) = 2$ einen Isomorphismus zwischen der speziellen Lorentz-Gruppe und den reellen Zahlen über

$$\text{Lor}^+(F) \longrightarrow \mathbb{R}, L(s) \mapsto s$$

definieren.

2.7 Satz. Lorentz-Transformationen als Komposition von Spiegelungen

Es sei F ein Vektorraum der Dimension $n+1$ ausgestattet mit einer quadratischen Form mit Signatur $(-n, 1)$. Jede Lorentz-Transformation σ ist das Produkt von höchstens $n+1$ Spiegelungen τ_c , wobei $c \in F$ und $\langle c, c \rangle = -1$ ist.

Beweis: Es sei $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ eine Basis von F , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Minkowski-Produkt (1.3) und σ eine Lorentztransformation. Es sei $c_1 \in F$ ein Vektor der Form

$$c_1 = \frac{\sigma(e_1) - e_1}{\sqrt{-2 \langle e_1, e_1 \rangle + 2 \langle \sigma(e_1), e_1 \rangle}} = \lambda_1(\sigma(e_1) - e_1)$$

mit

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{-2 \langle e_1, e_1 \rangle + 2 \langle \sigma(e_1), e_1 \rangle}}.$$

Spiegelung an diesem Vektor gibt uns nun

$$\begin{aligned} \tau_{c_1}(e_1) &= e_1 + 2 \langle \lambda_1(\sigma(e_1) - e_1), e_1 \rangle \lambda_1(\sigma(e_1) - e_1) \\ &= e_1 + 2\lambda_1 \langle \sigma(e_1), e_1 \rangle - \langle e_1, e_1 \rangle (\sigma(e_1) - e_1) \\ &= e_1 + (\sigma(e_1) - e_1) = \sigma(e_1). \end{aligned}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $\sigma(e_1) = e_1$. Wähle $\varphi_1 = \text{id}$.

2. Fall: $\sigma(e_1) \neq e_1$. Wähle nun $\varphi_1 = \tau_{c_1}$

Für beide Fälle definieren wir nun $\sigma_1 := \varphi_1 \circ \sigma$. In beiden Fällen gilt nun $\sigma_1(e_1) = e_1$. Im ersten Fall ist das klar für den zweiten Fall rechnen wir das explizit nach. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \sigma_1(e_1) &= \tau_{c_1}(\sigma(e_1)) = \sigma(e_1) + 2\lambda_1^2 \langle \sigma(e_1) - e_1, \sigma(e_1) \rangle (\sigma(e_1) - e_1) \\ &= \sigma(e_1) + 2\lambda_1^2 \langle \sigma(e_1), \sigma(e_1) \rangle - \langle \sigma(e_1), e_1 \rangle (\sigma(e_1) - e_1) \\ &= \sigma(e_1) + \frac{2 \langle e_1, e_1 \rangle - 2 \langle \sigma(e_1), e_1 \rangle}{-2 \langle e_1, e_1 \rangle + 2 \langle \sigma(e_1), e_1 \rangle} (\sigma(e_1) - e_1) \\ &= e_1, \end{aligned}$$

wobei wir im 3. Schritt verwendet haben dass σ eine Lorentz-Transformation ist.

Wir sehen also, dass in beiden Fällen e_1 auf e_1 geschickt wird.

Diesen Vorgang wiederholen wir. Wir wählen nun $c_2 \in F$ wie folgt

$$c_2 = \frac{\sigma_1(e_2) - e_2}{\sqrt{-2 \langle e_2, e_2 \rangle + 2 \langle \sigma_1(e_2), e_2 \rangle}} = \lambda_2(\sigma_1(e_2) - e_2)$$

mit

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{-2 \langle e_2, e_2 \rangle + 2 \langle \sigma_1(e_2), e_2 \rangle}}$$

Spiegelung an diesem Vektor c_2 ergibt sich analog zu oben, und wir erhalten

$$\tau_{c_2}(e_2) = \sigma_1(e_2)$$

Wieder machen wir eine Fallunterscheidung.

1. Fall: $\sigma_1(e_2) = e_2$. Wähle $\varphi_2 = \text{id}$.

2. Fall: $\sigma_1(e_2) \neq e_2$. Wähle nun $\varphi_2 = \tau_{c_2}$.

Für beide Fälle definieren wir uns nun wieder $\sigma_2 := \varphi_2 \circ \sigma_1$. Auch hier gilt in beiden Fällen wieder $f_2(e_2) = e_2$. Auch hier ist der erste Fall wieder klar.

Auch der zweite Fall ist klar denn es gilt $e_2 = \tau_{c_2} \circ \sigma_1(e_2) = \sigma_2(e_2)$.

Zusätzlich fordern wir jetzt noch dass der Vektor e_1 fixiert wird von dieser Abbildung. Es muss also $\sigma_2(e_1) = e_1$ sein. Es gilt

$$\begin{aligned} \sigma_2(e_1) &= \tau_{c_2}(\tau_{c_1}(\sigma(e_1))) = \tau_{c_2}(e_1) = e_1 + 2\lambda_2^2(\langle \sigma_1(e_2), e_1 \rangle - \langle e_1, e_2 \rangle)(\sigma_1(e_2) - e_2) \\ &= e_1 + 2\lambda_2^2(\langle \sigma_1(e_2), \sigma_1(e_1) \rangle - \langle e_1, e_2 \rangle)(\sigma_1(e_2) - e_2) \\ &= e_1. \end{aligned}$$

Somit wird der Vektor fixiert.

Wir können diesen Vorgang sukzessiv so fortsetzen.

Für einen Vektor $c_i \in F$ $i = 1, \dots, n$ erhalten wir somit

$$c_i = \lambda_i(\sigma_{n-1}(e_i) - e_i) \quad \text{mit} \quad \lambda_i = \frac{1}{\sqrt{-2 \langle e_i, e_i \rangle + 2 \langle \sigma_{n-1}(e_i), e_i \rangle}}$$

Durch Rechnung sieht man schnell $\tau_{c_i}(e_i) = \sigma_{n-1}(e_i)$.

Fallunterscheidung liefert

1. Fall: $\sigma_{i-1}(e_i) = e_i$. Wähle $\varphi_i = \text{id}$

2. Fall: $\sigma_{i-1}(e_i) \neq e_i$. Wähle $\varphi_i = \tau_{c_i}$.

Wir definieren nun $\sigma_i := \varphi_i \circ \sigma_{i-1}$. Es gilt auch hier $\sigma_i(e_i) = e_i$ in beiden Fällen analog zu oben.

Ebenfalls gilt $\sigma_i(e_k) = e_k$ für $k \leq i + 1$. Eingesetzt ergibt sich

$$\tau_{c_i}(e_k) = e_k + 2\lambda_i^2 \langle \sigma_{i-1}(e_i) - e_i, e_k \rangle (\sigma_{i-1}(e_i) - e_i) = e_k$$

Am Ende erhalten wir also

$$\text{id} = \sigma_n(e_n) = \varphi_n \circ \sigma_{n-1}(e_n) = \varphi_n \circ \varphi_{n-1} \circ \sigma_{n-2}(e_n) = \dots = \varphi_n \circ \varphi_{n-1} \circ \sigma_{n-2} \circ \dots \circ \varphi_1 \circ \sigma(e_n)$$

Hieraus folgt die Behauptung. ■

Wir betrachten im folgenden spezielle Vektoren $x \in F$ welche bezüglich des Minkowski-Produkts (1.3) eine Länge von Null haben. Diese Vektoren bilden den Lichtkegel. Wir

wollen im Weiteren die Lorentz-Gruppe auf diesem Kegel operieren lassen.

2.8 Definition. Isotroper Kegel

Der **isotrope Kegel** (oder auch Lichtkegel) $C(F)$ ist die Menge aller Vektoren deren Norm 0 ist, also

$$C(F) = \{x \in F \mid \langle x, x \rangle_{-n,1} = 0\}$$

2.9 Definition. Projektiver Kegel

Der **projektive Kegel** $PC(F)$ ist die Menge aller isotropen Geraden in F .

2.10 Proposition. Homöomorphismus zwischen $PC(F)$ und \mathbb{S}^{n-1}

Es sei F ein Vektorraum der Dimension $n+1$ ausgestattet mit einer quadratischen Form mit Signatur $(-n, 1)$. Der projektive Kegel ist homöomorph zur Sphäre \mathbb{S}^{n-1} .

Beweis: Sei $\mathbb{S}^{n-1} = \partial D$ die Grenze der Einheitsscheibe in der Hyperebene E senkrecht zu einem Vektor $u \in S(F)$. Wir definieren uns die Abbildung

$$\phi : E \longrightarrow F : z \mapsto 2z + u - \langle z, z \rangle u.$$

Setzen wir $\langle u, z \rangle = 0$ so erhalten wir durch Rechnung

$$\langle \phi(z), \phi(z) \rangle = (1 + \langle z, z \rangle)^2.$$

Ist nun $z \in \partial D$ so folgt $\langle z, z \rangle = -1$ weshalb $\langle \phi(z), \phi(z) \rangle = 0$. Da also $\phi(z) \in C(F)$ induziert ϕ die Abbildung $\partial D \longrightarrow C(F)$. Durch Komposition mit der Projektion $C(F) \longrightarrow PC(F)$ erhalten wir somit die Abbildung $\Phi : \partial D \longrightarrow PC(F)$. Es bleibt zu zeigen dass diese Abbildung homöomorph ist.

Nach dem Diskriminanten Lemma folgt, dass u und $z \in \partial D$ eine Ebene des Typs $(-1, 1)$ aufspannen. Die beiden Vektoren $\phi(z)$ und $\phi(-z)$ sind linear unabhängig, isotrop und liegen in dieser aufgespannten Ebene.

Um zu zeigen das $\Phi(z) = \text{span}(\phi(z))$ injektiv ist, wählen wir $z_1, z_2 \in \partial D$ mit $z_1 \neq z_2$. Somit ist auch $\phi(z_1) \neq \phi(z_2)$ (aufgrund der Abbildungsvorschrift von ϕ). Da die beiden Vektoren linear unabhängig sind $\phi(z_1) \neq \lambda \phi(z_2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ folgt somit $\Phi(z_1) \neq \Phi(z_2)$.

Für die Surjektivität wählen wir eine isotrope Gerade L , welche zusammen mit dem Vektor u eine Ebene R vom Typ $(-1, 1)$ aufspannen was aus dem Diskriminanten-Lemma folgt.

2.11 Korollar. Operation auf $PC(F)$

Sei F ein Vektorraum mit $\dim(F) \geq 3$. Dann operiert die Lorentz-Gruppe treu auf $PC(F)$.

Beweisidee: Es sei σ eine Lorentz-Transformation in F , welche trivial auf $PC(F)$ operiert, und schauen uns die Abbildung $\Phi : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow PC(F)$ an.

Es sei weiter $\lambda(z)$ der Eigenwert zu $\phi(z)$, d.h. $\sigma(\phi(z)) = \lambda(z)\phi(z)$. Damit nun $\text{Lor}(F)$ treu operieren kann muss aus $\sigma(\phi(z)) = \phi(z)$ folgen, dass $\sigma = e$. Man muss also zuerst zeigen das die Funktion $\lambda(z)$ konstant ist, und nur den Wert eins annehmen darf.

Ist λ konstant so kann sie maximal die beiden Werte ± 1 annehmen, denn sonst wäre σ keine orthogonale Transformation.

Der Wert -1 scheidet jedoch aus da die Abbildung $x \mapsto -x$ keine Lorentz-Transformation ist.

Somit ist $\lambda = 1$ die einzige Möglichkeit und damit ist $\sigma = e$ und die Operation ist treu.

2.12 Proposition.

Der gekürzte isotrope Kegel $C^*(F) = C(F) \setminus \{0\}$ hat für $\dim(F) \geq 3$ zwei Zusammenhangskomponenten. Diese werden durch $\text{Lor}(F)$ erhalten.

Beweis: Es sei $u \in S(F)$ fest, und $C^*(F) = C^+(F) \cup C^-(F)$ mit

$$C^+(F) := \{c \in F \mid \langle c, u \rangle > 0\} \quad \text{und} \quad C^-(F) := \{c \in F \mid \langle c, u \rangle < 0\}$$

Diese beiden Mengen sind die zusammenhängenden Komponenten von $C^*(F)$.

Wir wollen noch zeigen, dass der Wechsel des Bezugspunktes u zu einem anderen Punkt v in der gleichen Komponente von $S(F)$, die Zusammenhangskomponente unverändert lässt. Sei also $c \in C^*(F)$ mit $\langle c, c \rangle = 0$. Wir wollen nun zeigen, dass $\langle c, u \rangle$ und $\langle c, v \rangle = 0$ das gleiche Vorzeichen haben.

Hierfür betrachten wir die Abbildung $\varphi : S(F) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, c \rangle$.

Sei $\sigma \in \text{Lor}(F)$, dann sind $\sigma(u)$ und u im selben Blatt, und $\langle \sigma(x), u \rangle$ und $\langle \sigma(x), \sigma(u) \rangle$ haben für $x \in C^*(F)$ das gleiche Vorzeichen. Speziell für $x \in C^+(F)$ gilt $\langle \sigma(x), \sigma(u) \rangle = \langle x, u \rangle > 0$ und es folgt $\langle \sigma(x), u \rangle > 0$ womit auch $\sigma(x) \in C^+(F)$. Analoges gilt natürlich für $x \in C^-(F)$.

2.13 Proposition

Es sei L eine isotrope Gerade in F und $\text{Lor}_L(F)$ die Gruppe der Lorentz-Transformationen welche L stabilisiert. Die Einschränkung von F auf L^\perp definiert einen Isomorphismus

$$\text{Lor}_L(F) \rightarrow \mathcal{O}_\infty(L^\perp),$$

wobei $\mathcal{O}_\infty(L^\perp) \leq \mathcal{O}(L)$ ist, welche aus orthogonalen Transformationen mit positiven Eigenwerten besteht.

Wir verzichten hier auf den Beweis denn dieser beruht zum Teil auf dem Satz von Witt aus Vortrag 1. Stattdessen erläutern wir etwas mehr die Begrifflichkeiten.

Stabilisator einer Gruppe: Sei G eine Gruppe. Mit $G_x = \{g \in G \mid g * x = x\} \subseteq G$ bezeichnen wir den Stabilisator einer Gruppe. (Das sind also alle Elemente aus G die ein gegebenes $x \in X$ festhalten.)

Die Stabilisierung der Geraden L durch die Gruppe $\text{Lor}_L(F)$ bedeutet also, dass für alle $\sigma \in \text{Lor}_L(F)$ gilt

$$\sigma(L) = L.$$

$\mathcal{O}_\infty(L^\perp) = \{\sigma \in \mathcal{O}(L^\perp) \mid \mu(\sigma) > 0\}$ wobei $\mu : \mathcal{O}(L) \rightarrow \mathbb{R}^\times$ der Multiplizierer (multiplier) ist welcher den Eigenwert von $\sigma \in \mathcal{O}(L)$ auf der isotropen Gerade angibt.