Universität Tübingen, Fachbereich Mathematik — Wintersemester 24/25
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Klausur am 12.02.2025

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.**

Es sind maximal 100 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (3+6 = 9 Punkte)

Sei $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ \forall\ n \geq 2$. Sei weiter

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 und a_7.
b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n+1} \end{pmatrix} \qquad \forall\ n \geq 1\,.$$

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-1)\sin^2(x) + (x^2+1)\cos^2(x)}{3x^2 - x + 2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^6 - 3x^3} - \sqrt{x^6 + x^3}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-1)\sin^2(x) + (x^2+1)\cos^2(x)}{3x^2 - x + 2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} \frac{\cos(\pi x)}{\log(2x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^5(x)}{x^3(x^4 - 2x^2)}$

Aufgabe 3 (4+4+4 = 12 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{100} \cos(\pi\nu)$

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 3^{n-k}$

c) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=\nu}^{n} \frac{\mu\, 3^\nu}{3^{\mu+1} - 1}$

Aufgabe 4 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\displaystyle\frac{4}{16 + x^4}$ und b) $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^{-x^2} - 1}{x^2}$ (stetig fortgesetzt bei $x = 0$) um null, sowie von

c) e^{-2x} um $x_0 = 5$ und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 5 (2+4+6+3 = 15 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.

a) Wo ist f stetig fortsetzbar und wie?
b) Bestimmen Sie alle (senkrechten, waagerechten und schiefen) Asymptoten.
c) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
d) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die Funktion $f_a : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_a(x) = \frac{\mathrm{e}^{-ax^2}}{1 - x^2}\,,$$

bei $x = 0$ eine Maximalstelle, für welche eine Minimalstelle?

Hinweis: Bestimmen Sie die ersten Terme der Taylorentwicklung um null – Sie müssen dazu nicht ableiten!

Aufgabe 7 (4+2+2+6+2+6 = 22 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) \qquad \text{und} \qquad \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h. die Vektoren $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^4$, $j = 1, \ldots, 4$, bilden die Spalten der Matrix A.

a) Berechnen Sie $\det(A)$.
b) Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort in einem Satz.
c) Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$ linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort in einem Satz.
d) Berechnen Sie A^{-1}.
e) Bestimmen Sie alle Lösungen von $A\vec{x} = \vec{a}_5$.
f) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_5)$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 8 (3+3+3 = 9 Punkte)

Sie

$$M = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det A = 1 \right\}$$

Zeigen Sie:

a) Aus $A, B \in M$ folgt $A \cdot B \in M$.
b) Aus $A \in M$ folgt $A^{-1} \in M$.
c) Es gibt $A, B \in M$ mit $A \cdot B \neq B \cdot A$