

## Mathematik 1 für Naturwissenschaftler\*innen

Übungsblatt 13 (Abgabe spätestens 24.01.2025, 8:00)

---

### Aufgabe 69

(7 Zusatzpunkte)

Berechnen Sie – falls möglich – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- a)  $AA^T$ ,      b)  $A^T A$ ,      c)  $AA^T B$ ,      d)  $A^T AB$ ,  
e)  $B^T AA^T$ ,      f)  $A^2$ ,      g)  $A^T AA^T A$ .

HINWEIS: Assoziativität, d.h.  $(AB)C = A(BC)$ , ist hilfreich.

### Aufgabe 70

(4+4 = 8 Punkte)

Berechnen Sie die Inversen von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 71

(5+7+4+4 = 20 Punkte)

Seien

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie  $\det A$ .  
b) Berechnen Sie  $B^{-1}$  und  $\det B$ .  
c) Bestimmen Sie  $\det C$ ,  $\det(C^{-1})$  und  $\det(C^5)$ .  
d) Berechnen Sie mithilfe von  $B^{-1}$  die Lösungen  $\vec{x}$  und  $X$  von

$$B\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad BX = C.$$

Wie hätten Sie  $\vec{x}$  oder  $X$  berechnen können, ohne zunächst  $B^{-1}$  zu bestimmen?

**Aufgabe 72**

(10 Zusatzpunkte)

Wir definieren die Potenz  $A^n$  einer quadratischen Matrix  $A$  durch

$$A^0 = I \text{ und } A^{n+1} = AA^n,$$

$$\text{d.h. } A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^3 = AAA, \dots$$

Weiter definieren wir  $e^{Ax}$  für  $x \in \mathbb{R}$  durch die bekannte Taylorreihe der e-Funktion, d.h.  $e^{Ax} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$ . Berechnen Sie  $e^{Ax}$  für  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

HINWEISE: (i) Berechnen Sie zunächst  $A^2$ ,  $A^3$  und  $A^4$ . Folgern Sie daraus, wie  $A^n$  aussieht. (ii) Aus der Definition der Matrixaddition (komponentenweise) folgt

$$\sum_n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n a_n & \sum_n b_n \\ \sum_n c_n & \sum_n d_n \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 73**

(4 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 02.02.2025 auf [www.khanacademy.org](http://www.khanacademy.org) die Skills

- *Inverse of a  $3 \times 3$  matrix* und
- *Determinant of a  $3 \times 3$  matrix*.

HINWEISE: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).