

# Mathematik 1 für Naturwissenschaftler\*innen

Übungsblatt 12 (Abgabe spätestens 17.01.2025, 8:00)

## Aufgabe 62

(8 Punkte)

Bestimmen Sie die Polardarstellung der folgenden Punkte  $(x, y)$  aus  $\mathbb{R}^2$ :

- a)  $(3, 3)$                       b)  $(-1, \sqrt{3})$                       c)  $(4, -4)$                       d)  $(-\sqrt{3}, -1)$

## Aufgabe 63

(4+4+4 = 12 Zusatzpunkte)

Die Lösungsmenge des folgenden LGS ist eine Ebene  $E_1$  im  $\mathbb{R}^3$ ,

$$2x_1 + 2 + 2x_3 = 4x_2.$$

- a) Geben Sie eine Parameterdarstellung sowie die Hessesche Normalform von  $E_1$  an.  
Welchen Abstand hat die Ebene vom Ursprung?

Die Ebene  $E_2$  im  $\mathbb{R}^3$  ist gegeben als

$$E_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- b) Geben Sie die Hessesche Normalform von  $E_2$  an.  
c) Bestimmen Sie die Schnittmenge von  $E_2$  und  $E_1$ .

## Aufgabe 64

(8 Punkte)

Geben Sie die folgenden Punkte  $(x, y, z)$  aus  $\mathbb{R}^3$  in Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \phi)$  an:

- e)  $(5, 0, 0)$                       f)  $(0, 0, -\pi)$                       g)  $(0, 1, -1)$                       h)  $(1, 1, -\sqrt{2})$

## Aufgabe 65

(10 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie: Die Einheitsvektoren für Kugelkoordinaten,

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

bilden (an jedem Punkt) (a) eine ONB des  $\mathbb{R}^3$  und (b) ein Rechtssystem (in der angegebenen Reihenfolge). Berechnen Sie außerdem (c) die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten, d.h. berechnen Sie  $\dot{\vec{x}}$  für

$$\vec{x}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \sin(\theta(t)) \cos(\phi(t)) \\ \sin(\theta(t)) \sin(\phi(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix},$$

und drücken Sie das Ergebnis als Linearkombination von  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  und  $\vec{e}_\phi$  aus.

**Aufgabe 66**

(8 Punkte)

Sei  $t \in [0, 2\pi]$ . Berechnen Sie für die folgenden Kurven die Geschwindigkeit  $\dot{\vec{x}}(t)$  und zeichnen Sie die Kurven.

$$\text{a) } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (3\pi - t) \cos t \\ (3\pi - t) \sin t \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \\ t \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 67**

(2+2+4=8 Punkte)

Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = AB$ , und  $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Berechnen Sie  $C = AB$ .
- Berechnen Sie  $BA$ .
- Berechnen Sie  $CD$  und  $DC$ .

**Aufgabe 68**

(10 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 02.02.2025 auf [www.khanacademy.org](http://www.khanacademy.org) die Skills

- *Matrix elements,*
- *Multiply matrices by scalars,*
- *Matrix equations: scalar multiplication,*
- *Multiply matrices und*
- *Divide complex numbers.*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).